Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen.

Von K. Weierstrass.

Zweite Mittheilung.

Es bedeute $f(x)$, wie in der am 9. Juli d. J. in der Akademie gelesenen Mittheilung, eine für jeden reellen Werth der Veränderlichen x eindeutig definirte, reelle und stetige Function, deren absoluter Betrag eine endliche obere Grenze (G) hat. Dagegen sei $\psi(x)$ eine transcendente ganze Function, von der zunächst nur angenommen wird, dass sie reell sei für reelle Werthe von x, und der Bedingung $\psi(-x) = \psi(x)$ genüge. Ferner seien u, v reelle, von einander unabhängige Veränderliche, und es werde

$$\sqrt{\psi(u+vi)\,\psi(u-vi)} = \psi(u, v)$$

gesetzt, wo der Quadratwurzel ihr positiver Werth beizulegen ist. Dann ist der absolute Betrag von $\dfrac{\psi(u+vi)}{\psi(u,v)}$ gleich 1, und man hat daher, wenn a, b reelle Grössen sind,

$$\int_a^b f(u)\,\psi(u+vi)\,du = \int_a^b f(u)\frac{\psi(u+vi)}{\psi(u,v)}\cdot\psi(u,v)\,du = \varepsilon G\int_a^b \psi(u,v)\,du,$$

wo ε eine complexe Grösse, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, bezeichnet. Angenommen nun, es sei $\psi(x)$ so beschaffen, dass das Integral

$$\int_0^{+\infty} \psi(u, v)\,du$$

für jeden Werth von v einen endlichen Werth hat, so erhalten, wenn a_1, a_2, b_1, b_2 positive Grössen sind, $b_1 > a_1$, $b_2 > a_2$, die Integrale

$$\int_{a_2}^{b_2} \psi(u, v)\,du, \quad \int_{-b_1}^{-a_1} \psi(u, v)\,du,$$

von denen das zweite $\left(\text{weil } \psi(-u, v) = \psi(u, v)\right)$ gleich

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} \psi(u, v)\, du$$

ist, beide unendlich kleine Werthe, wenn a_1, b_1 unendlich gross werden. Dasselbe gilt also, der vorstehenden Gleichung zufolge, für die Integrale

$$\int\limits_{-b_1}^{-a_1} f(u)\psi(u+vi)\,, \quad \int\limits_{a_2}^{b_2} f(u)\psi(u+vi)\, du\,;$$

und es hat demnach das Integral

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi(u+vi)\, du$$

einen bestimmten endlichen Werth für jeden Werth von v.

Ich will ferner annehmen, es convergire das Integral

$$\int\limits_{a_2}^{+\infty} \psi(u, v)\, dv\,,$$

wenn a_2 unendlich gross wird, für alle Werthe von v, deren absoluter Betrag einen beliebig festgesetzten Grenzwerth nicht übersteigt, gleichmässig gegen die Grenze Null, so gilt der Gleichung (1) zufolge dasselbe von dem Integral

$$\int\limits_{a_2}^{+\infty} f(u)\,\psi(u+vi)\, du\,,$$

und ebenso, wenn a_1 unendlich gross wird, von

$$\int\limits_{-\infty}^{-a_1} f(u)\,\psi(u+vi)\, du\,.$$

Es lassen sich also, wenn V, g gegebene positive Grössen sind, von denen V beliebig gross und g beliebig klein sein kann, immer zwei positive Grössen a_1, a_2 so bestimmen, dass der absolute Betrag der Differenz

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi(u+vi)\, dv - \int\limits_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi(u+vi)\, du$$

für jeden der Bedingung

$$-V \leqq v \leqq V$$

entsprechenden Werth von v kleiner als g ist.

Nun sei $x = \xi + \xi' i$ eine complexe Veränderliche und, wie in der ersten Mittheilung, k eine positive Constante, $\omega = \int\limits_0^{+\infty} \psi(u)\, du$. Dann ist also nach dem Vorstehenden das Integral

$$(1)\qquad \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi + ku)\,\psi\left(u - \frac{\xi' i}{k}\right)du = \frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

eine für jeden endlichen Werth von x eindeutig definirte, endliche Grösse, die a. a. O. mit $F(x, k)$ bezeichnet worden ist.

Es muss nun nachgewiesen werden, dass $F(x, k)$ eine (transcendente) ganze Function von x ist.

Man setze für den absoluten Betrag von x eine obere Grenze r fest, so kann man, nach Annahme zweier beliebig kleinen positiven Grössen g', g'', zwei andere (a_1, a_2) bestimmen, für welche die Summe

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{-a_1} f(\xi + ku)\,\psi\left(u - \frac{\xi' i}{k}\right)du + \frac{1}{2\omega}\int_{a_2}^{+\infty} f(\xi + ku)\,\psi\left(u - \frac{\xi' i}{k}\right)du$$

für alle der Bedingung

$$\xi^2 + \xi'^2 \leqq r^2$$

entsprechenden Werthe von ξ, ξ' kleiner als g' ist. Dann hat man

$$F(x, k) = \frac{1}{2k\omega}\int_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \varepsilon' g',$$

wo ε' eine Grösse, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, bedeutet. Das Integral auf der Rechten dieser Gleichung lässt sich aber in eine beständig convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ entwickeln, und man kann, wenn die Summe der n ersten Glieder von $\frac{1}{2k\omega}\mathfrak{P}(x)$ mit $G^{(n)}(x)$ bezeichnet wird, n so gross annehmen, dass für jeden der Bedingung $|x| \leqq r$ entsprechenden Werth von x

$$|F(x, k) - G^{(n)}(x)| < g' + g''$$

ist.

Dies festgestellt, kann man ferner durch das zur Begründung des Satzes (C.) der ersten Mittheilung angewandte Verfahren zeigen, dass $F(x, k)$ sich darstellen lässt in der Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder ganze rationale Functionen von x sind, und dass diese Reihe für alle in irgend einem endlichen Bereiche enthaltenen Werthe von x gleichmässig convergirt. Man hat zu dem Ende zwei Reihen positiver Grössen

$$r_1, r_2, r_3, \ldots$$
$$g_1, g_2, g_3, \ldots$$

so anzunehmen, dass $\lim\limits_{n=\infty} r_n = \infty$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$ einen endlichen Werth hat, sodann eine Reihe von ganzen rationalen Functionen $G_1(x), G_2(x), G_3(x), \ldots$ so zu bestimmen, dass für jeden der Bedingung $|x| \leqq r_\nu$ entsprechenden Werth von x

$$(2)\qquad |F(x, k) - G_\nu(x)| < g_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \infty)$$

ist, und

(4) $$f_0(x) = G_1(x)\,,\; f_\nu(x) = G_{\nu+1}(x) - G_\nu(x)$$

zu setzen; dann ist

(5) $$F(x\,,k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x).$$

Nach einem Satze aber, den ich früher (Monatsberichte der Akademie aus dem Jahre 1880, S. 723) in elementarer Weise bewiesen habe, kann man die Reihe auf der Rechten dieser Gleichung, weil sie in jedem endlichen Bereiche gleichmässig convergirt, in eine für jeden endlichen Werth von x convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ verwandeln.

Nimmt man

$$\psi(x) = e^{-x^2},$$

so ist

$$\psi(u\,,v) = e^{-u^2+v^2},$$

und diese Function $\psi(u\,,v)$ hat die im Vorstehenden angenommene Beschaffenheit. Dasselbe ist der Fall, wenn man

$$\psi(x) = e^{-(c_1x^2 + c_2x^4 + \ldots + c_\varrho x^{2\varrho})}$$

setzt und der Constante c_ϱ einen positiven Werth giebt, während $c_1, \ldots c_{\varrho-1}$ beliebige reelle Werthe haben können.

Es existiren also in der That, wie in der ersten Mittheilung bei Begründung des Satzes (A.) angegeben worden ist, unzählige Functionen $\psi(x)$ von der Beschaffenheit, dass die zugehörigen Functionen $F(x\,,k)$ transcendente ganze Functionen sind.

Jetzt bedeute $F(x,k)$ irgend eine bestimmte von diesen Functionen, so lässt sich die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$, durch welche dieselbe dargestellt werden kann, in eine nach Kugelfunctionen fortschreitende, ebenfalls für jeden endlichen Werth von x convergirende Reihe verwandeln. Aus dem bekannten Satze des Hrn. C. Neumann, betreffend die Entwickelung eindeutiger analytischer Functionen einer complexen Veränderlichen x nach den Kugelfunctionen erster Art, ergiebt sich nämlich unmittelbar, dass jede (transcendente oder rationale) ganze Function $G(x)$ dargestellt werden kann durch eine für jeden endlichen Werth von x convergirende Reihe von der Form

$$G(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu P^{(\nu)}(x).$$ [1]

[1] Dies lässt sich übrigens auch folgendermaassen beweisen. Aus der Definition der Kugelfunctionen ergiebt sich:

$$|P^{(n)}(x)| \leqq |x + \sqrt{x^2-1}|^n,$$

wenn man $\sqrt{x^2-1}$ so bestimmt, dass $|x + \sqrt{x^2-1}| \geqq 1$ ist. Ferner ist

$$x^n = c_{n,0}P^{(n)}x + c_{n,1}P^{(n-2)}(x) + \ldots,$$

Die Coefficienten dieser Reihe sind so beschaffen, dass

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |C_\nu| r^\nu$$

für jeden positiven Werth r einen endlichen Werth hat. Ferner ist die Reihe für alle einem endlichen Bereiche angehörigen Werthe von x gleichmässig convergent. (Vergl. die Abhandlung des Hrn. THOMÉ: Über die Reihen, welche nach Kugelfunctionen fortschreiten, BORCHARDT's Journal, B. 66, S. 337). Auf der letzteren Eigenschaft der Reihe beruht es, dass man

$$\int_{-1}^{+1} G(x') P^{(\mu)}(x') dx' = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \int_{-1}^{+1} P^{(\mu)}(x') P^{(\nu)}(x') dx'$$

hat, wo x' eine reelle Veränderliche bezeichnet; woraus sich

$$C_\mu = \frac{2\mu+1}{2} \int_{-1}^{+1} G(x') P^{(\mu)}(x') dx' \qquad (\mu = 0, 1, \ldots \infty)$$

ergiebt.

Für die Function $F(x, k)$ hat man also

$$C_\nu = \frac{2\nu+1}{2} + \frac{1}{2k\omega} \int_{-1}^{+1} P^{(\nu)}(x') dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \psi\left(\frac{u-x'}{k}\right) du$$

$$= \frac{2\nu+1}{4\omega} \int_{-1}^{+1} P^{(\nu)}(x') \int_{-\infty}^{+\infty} f(x'+ku) \psi(u) du,$$

woraus man, wenn

$$\frac{2\nu+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x'+u) P^{(\nu)}(x') dx' = f_\nu(u)$$

---

und somit, wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$

eine beständig convergirende Potenzreihe von x ist,

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \sum_n \sum_\nu A_n c_{n,\nu} P^{(n-2\nu)}(x).$$

Es sind aber die $c_{n,\nu}$ sämmtlich positive Grössen und $\sum_\nu c_{n,\nu} = 1$; also ist

$$\sum_\nu | c_{n,\nu} P^{(n-2\nu)}(x) | \leqq | x + \sqrt{x^2-1} |^n.$$

Daraus folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_\nu | A_n c_{n,\nu} P^{(n)}(x) |$ eine endliche Grösse ist, und daher wenn (für $\mu = 0, 1, 2 \ldots \infty$)

$$C_\mu = \sum_{\substack{n,\nu \\ (n-2\nu=\mu)}} c_{n,\nu} A_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\mu+2\nu,\nu} A_{\mu+2\nu}$$

gesetzt wird, die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = C_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} C_\mu P^{(\mu)}(x)$$

besteht.

gesetzt wird,

$$C_\nu = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du$$

erhält.

Die Function $f_\nu(u)$ ist ebenso wie $f(u)$ eine durchweg stetige Function, deren absoluter Betrag höchstens gleich $(2\nu+1)\,G$ werden kann, da der absolute Betrag von $P^{(\nu)}(x')$ für die dem Intervalle $(-1\ldots+1)$ angehörigen Werthe von x' nicht grösser als 1 wird. Es ist aber, wenn a eine beliebige positive Grösse ist

$$C_\nu = \frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{a} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du + \frac{1}{2\omega}\int_{a}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du + \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{-a} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du$$

$$= \frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{a} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du$$

$$+ \frac{1}{2\omega} f_\nu(ka\ldots+\infty)\int_{a}^{+\infty}\psi(u)\,du + \frac{1}{2\omega} f_\nu(-\infty\ldots-ka)\int_{-\infty}^{-a}\psi(u)\,du\,;$$

wenn man daher k unendlich klein werden lässt, so bekommt man

$$\operatorname*{Lim}_{k=0}\cdot C_\nu = f_\nu(0)\cdot\frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a}\psi(u)\,du + \ldots\,,$$

wo die weggelassenen Glieder auf der Rechten unendlich kleine Werthe erhalten, wenn a unendlich gross wird. Da man nun a beliebig gross annehmen darf, so ergiebt sich

$$\operatorname*{Lim}_{k=0}\cdot C_\nu = f_\nu(0) = \frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,P^{(\nu)}(x)\,dx\,.$$

Setzt man

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du = \phi_\nu(k)\,,$$

und versteht unter δ eine kleine reelle Grösse, so ist

$$\phi_\nu(k+\delta) - \phi_\nu(k) = \frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a}\big(f_\nu(ku+\delta u) - f_\nu(ku)\big)\,\psi(u)\,du + \ldots\,,$$

wo wieder die fortgelassenen Glieder auf der Rechten beliebig kleine Werthe erhalten, wenn a gross genug angenommen wird. Ist daher δ_1 eine gegebene, beliebig kleine Grösse, so kann man dem a einen bestimmten Werth beilegen, für welchen

$$\phi_\nu(k+\delta) - \phi_\nu(k) = \frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{+a}\big(f_\nu(ku+\delta u) - f_\nu(ku)\big)\,\psi(u)\,du$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als δ_1 ist, und zwar bei beliebigen Werthen von k,δ. Dann lässt sich ferner, wenn δ_2 eine zweite, beliebig anzunehmende kleine Grösse ist, für den absoluten Betrag von δ eine obere Grenze δ' so festsetzen, dass

$$\frac{1}{2\omega}\int_{-a}^{a}(f_\nu(ku+\delta u)-f_\nu(ku))\,\psi(u)\,du$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als δ_2 und somit

$$|\,\phi_\nu(k+\delta)-\phi_\nu(k)\,|<\delta_1+\delta_2$$

ist, wenn $|\delta|<\delta'$. Es ist also $\phi_\nu(k)$ eine stetige Function von k.

Hiermit ist also bewiesen:

»Ist $\psi(x)$ eine Function von der oben angegebenen Beschaffenheit, und

$$F(x\,,k)=\frac{1}{2k\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du\,,$$

so hat man für jeden endlichen complexen Werth von x

$$F(x\,,k)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\phi_\nu(k)\,P^{(\nu)}(x)\,, \tag{6}$$

wenn

$$\left\{\begin{aligned} f_\nu(u)&=\frac{2\nu+1}{2}\int_{-1}^{+1}f(x'+u)\,P^{(\nu)}(x')\,dx',\\ \phi_\nu(k)&=\frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty}f_\nu(ku)\,\psi(u)\,du \end{aligned}\right. \tag{7}$$

gesetzt wird; und es sind dann die $\phi_\nu(k)$ stetige Functionen von k.«

Jetzt werde unter x wieder eine reelle Veränderliche verstanden, so dass

$$f(x)=\operatorname*{Lim}_{k=0}\cdot F(x\,,k)$$

ist. Wird dann x auf das Intervall

$$-a\leqq x\leqq a$$

beschränkt, wo a eine beliebige positive Grösse bedeutet, so kann man, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g', zunächst dem Parameter k einen bestimmten Werth k' beilegen, für welchen

$$|\,f(x)-F(x\,,k')\,|<g'$$

ist. Bezeichnet man ferner mit R den grössten Werth, den der absolute Betrag der Grösse

$$\sqrt{x^2-1}+x$$

für die jetzt betrachteten Werthe von x erhalten kann, so hat man

$$R=\begin{cases}1, \text{ wenn } a\leqq 1,\\ a+\sqrt{a^2-1}, \text{ wenn } a>1,\end{cases}$$

und es ist daher, wie schon bemerkt,

$$|\,P^{(\nu)}(x)\,|\leqq R^\nu.$$

Da nun die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\phi_\nu(k')| R^\nu$$

einen endlichen Werth hat, so ist es, nach Annahme einer zweiten positiven Grösse g'', immer möglich, eine ganze positive Zahl n zu ermitteln, für welche der absolute Betrag von

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \phi_\nu(k') P^{(\nu)}(x)$$

kleiner als g'' ist. Setzt man also

$$G^{(n)}(x, k) = \sum_{\nu=0}^{n} \phi_\nu(k) P^{(\nu)}(x), \tag{8}$$

so ist

$$|f(x) - G^{(n)}(x, k')| < g' + g''.$$

Hiernach lässt sich der Satz (B.) meiner ersten Mittheilung folgendermaassen aussprechen:

»Es seien a, g positive Grössen, von denen die erste beliebig gross und die andere beliebig klein angenommen werden kann, so ist es immer möglich, in dem durch die vorstehende Gleichung definirten Ausdruck $G^{(n)}(x, k)$, der eine ganze rationale Function $n$ten Grades von x ist, dem Parameter k und der Zahl n solche Werthe zu geben, dass für die dem Intervall $(-a \ldots a)$ angehörigen Werthe von x die Differenz zwischen

$$f(x) \text{ und } G^{(n)}(x, k)$$

ihrem absoluten Betrage nach eine vorgeschriebene Grenze, die beliebig klein angenommen werden kann, nicht überschreitet.«

Der im Vorstehenden entwickelte Ausdruck der Function $F(x, k)$ hat vor der Darstellung derselben in Gestalt einer Potenzreihe den wesentlichen Vorzug, dass die Coefficienten des ersteren — die $\phi_\nu(k)$ — in einer Form sich darstellen, welche erkennen lässt, dass dieselben stetige Functionen der Grösse k sind, und dass es für jeden einzelnen Coefficienten eine Grenze giebt, welche sein absoluter Betrag für keinen Werth von k überschreitet, während zugleich, für jeden bestimmten Werth von k, $\lim_{\nu=a} \phi_\nu(k) = 0$ ist.

Damit ist der Übelstand beseitigt, welcher sich, wie am Schlusse meiner ersten Mittheilung hervorgehoben worden ist, herausstellt, wenn man die im Satze (B.) vorkommende Function $G(x)$ so definirt, wie es dort geschehen ist.

Es ist bisher in Betreff der Function $f(x)$ angenommen worden, dass der absolute Betrag derselben eine endliche obere Grenze habe. Diese Annahme kann man fallen lassen, wenn es sich bloss darum handelt, eine ganze rationale Function $G(x)$ zu bestimmen, welche sich in einem gegebenen endlichen Intervall $(x_1 \dots x_2)$ der Function $f(x)$ so genau anschliesst, dass der absolute Betrag der Differenz $f(x) - G(x)$ für jeden Werth von x unter einer beliebig festgesetzten Grenze g liegt.

In der That, definirt man eine Function $f_1(x)$, indem man festsetzt, es solle

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f(x_1) \text{ sein, wenn } x < x_1, \\ f_1(x) &= f(x), \text{ wenn } x_1 \leqq x \leqq x_1, \\ f_1(x) &= f(x_2), \text{ wenn } x > x_2, \end{aligned}$$

so ist $f_1(x)$ so beschaffen, wie bisher von der Function $f(x)$ angenommen worden ist, und man kann demnach eine Function $G(x)$ so bestimmen, dass für jeden in dem Intervalle $(x_1 \dots x_2)$ enthaltenen Werth von x

$$|f_1(x) - G(x)| < g,$$

und somit auch

$$|f(x) - G(x)| < g$$

ist.

Nun ist bei dem in der ersten Mittheilung gegebenen Beweise des Satzes (C.) von der Function $f(x)$ nur vorausgesetzt worden, dass es nach beliebiger Annahme zweier positiven Grössen a_ν, g_ν möglich sei, eine ganze rationale Function $G_\nu(x)$ herzustellen, für welche

$$|f(x) - G_\nu(x)| < g \text{ ist, wenn } -a_\nu \leqq x \leqq a_\nu;$$

und es gilt also der in Rede stehende Satz in unveränderter Fassung, wenn von der Function $f(x)$ nur angenommen wird, dass sie für jeden endlichen reellen Werth von x einen bestimmten endlichen und mit x stetig sich ändernden Werth habe.

Es bleibt jetzt noch zu untersuchen, welche Modificationen die bisher entwickelten Sätze erleiden, wenn man auch die Annahme, dass $f(x)$ eine durchweg stetige Function sei, fallen lässt. Damit beabsichtige ich in einer folgenden Abhandlung mich zu beschäftigen. Darauf wird dann die Untersuchung auch auf eindeutige Functionen von mehreren reellen Argumenten auszudehnen sein, was für durchweg stetige Functionen keine Schwierigkeit hat.

Ich will jetzt annehmen, es sei $f(x)$ eine periodische Function, d. h. sie ändere ihren Werth nicht, wenn ihr Argument um eine bestimmte positive Grösse $2c$ vermehrt wird. Dann lässt sich die zugehörige Function $F(x, k)$ auch darstellen in der Form einer für jeden complexen Werth von x convergirenden FOURIER'schen Reihe, deren Coefficienten stetige Functionen der Grösse k sind.

Aus der obigen Gleichung (1) ergiebt sich:

$$F(x+2c\,,\,k) = F(x\,,\,k);$$

setzt man also, unter z eine neue complexe Veränderliche verstehend,

$$\overline{F}(z) = F\left(\frac{c}{\pi i}\log z\,,\,k\right),$$

so ist $\overline{F}(z)$ eine eindeutige analytische Function von z, für welche im ganzen Gebiete dieser Grösse nur zwei singuläre Stellen, nämlich 0 und ∞ existiren, und die daher in eine beständig convergirende Reihe von der Form

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu z^\nu$$

entwickelt werden kann. Setzt man $z = e^{\frac{\pi x}{c}i}$, so wird $\overline{F}(z) = F(x\,,\,k)$, und es ist demnach

$$F(x\,,\,k) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu e^{\frac{\nu\pi x}{c}i}$$

für jeden endlichen Werth von x.

Da diese Entwickelung von $F(x\,,\,k)$ in jedem endlichen Bereiche der Veränderlichen x gleichmässig convergirt, so ist, wenn man mit x' wieder eine reelle Veränderliche und mit n eine ganze Zahl bezeichnet,

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} F(x'\,,\,k)\, e^{-\frac{nx'\pi}{c}i}\, dx' = \frac{1}{2c}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} C_\nu \int_{-c}^{c} e^{\frac{(\nu-n)\pi x'}{c}i}\, dx' = C_n.$$

Man hat also

$$\begin{aligned} 2c\,C_n &= \frac{1}{2k\omega}\int_{-c}^{c} e^{-\frac{n\pi x'}{c}i}\, dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x'}{k}\right) du \\ &= \frac{1}{2\omega}\int_{-c}^{c} e^{-\frac{n\pi x'}{c}i}\, dx' \int_{-\infty}^{+\infty} f(x'+ku)\,\psi(u)\, du \\ &= \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u)\, e^{-\frac{nku\pi}{c}i}\, du \int_{-c}^{c} f(x'+ku)\, e^{-\frac{n\pi}{c}(x'+ku)i}\, dx'. \end{aligned}$$

Nun hat man aber, wenn man

$$f_1(x') = f(x')\, e^{-\frac{n\pi x'}{c}i}$$

setzt, und unter x_0 eine von x' unabhängige Grösse versteht,

$$\begin{aligned} \int_{-c}^{c} f_1(x')\, dx' &= \int_{-c}^{x_0-c} f_1(x')\, dx' + \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')\, dx' = \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')\, dx' + \int_{-c}^{x_0-c} f_1(x'+2c)\, dx' \\ &= \int_{x_0-c}^{c} f_1(x')\, dx' + \int_{c}^{x_0+c} f_1(x')\, dx' = \int_{x_0-c}^{x_0+c} f_1(x')\, dx' = \int_{-c}^{c} f_1(x'+x_0)\, dx'; \end{aligned}$$

es ist also

$$\int_{-c}^{c} f(x'+ku)\, e^{-\frac{n\pi}{c}(x'+ku)i}\, dx' = \int_{-c}^{c} f(x')\, e^{-\frac{n\pi x'}{c}i}\, dx',$$

und somit, wenn man, unter v eine beliebige reelle Grösse verstehend,

$$(9) \qquad \phi(v) = \frac{1}{2\omega}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u)\, e^{-uvi}\, du = \frac{1}{\omega}\int_{0}^{\infty} \psi(u) \cos(vu)\, du$$

setzt:

$$(10) \qquad C_n = \phi\left(\frac{nk\pi}{c}\right) \int_{-c}^{c} \frac{1}{2c} f(x')\, e^{-\frac{n\pi x'}{c}i}\, dx'.$$

Setzt man

$$(11) \qquad A_n = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x') \cos\frac{n\pi}{c} x'\, dx', \quad A'_n = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x') \sin\frac{n\pi}{c} x'\, dx',$$

so ist

$$(12) \qquad C_n = (A_n - iA'_n)\, \phi\left(\frac{n\pi k}{c}\right)$$

und somit

$$(13) \qquad F(x, k) = A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \phi\left(\frac{nk\pi}{c}\right) \cdot \left(A_n \cos\frac{n\pi}{c} x + A'_n \sin\frac{n\pi}{c} x\right).$$

Nach der vorstehenden Formel ist $\phi(v)$ eine stetige Function von v, die für $v = 0$ den Werth 1 annimmt.

Setzt man in dem Ausdrucke auf der Rechten der vorstehenden Gleichung $k = 0$, so reducirt er sich auf

$$A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{n\pi}{c} x + A'_n \sin\frac{n\pi}{c} x\right),$$

d. h. er geht in die Reihe über, in welche sich die Function $f(x)$ im Allgemeinen — d. h. wenn man von speciellen, bisher noch nicht hinreichend charakterisirten Functionen absieht — nach dem FOURIER'schen Theorem entwickeln lässt. Da aber, wie zuerst Hr. P. DU BOIS-REYMOND an einem Beispiele nachgewiesen hat, in der That Functionen $f(x)$ existiren, welche für gewisse Werthe von x, die sogar in jedem noch so kleinen Intervall $(x_1 \ldots x_2)$ in unendlicher Anzahl vorhanden sein können, durch die vorstehende Reihe nicht dargestellt werden, so ist damit dargethan, dass man, um die Grenze zu bestimmen, der sich die Reihe auf der Rechten der Gleichung (13) nähert, wenn k unendlich klein wird, nicht unbedingt in jedem einzelnen Gliede der Reihe $k = 0$ setzen darf.

Die Reihe $\sum\limits_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n z^n$ convergirt, wie gezeigt worden ist, für jeden Werth von z, mit Ausnahme der beiden Werthe 0, ∞. Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$$

convergirt also für jeden endlichen Werth von z.

Nimmt man nun z. B.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{n_2} \cos\left(\frac{n\pi}{c} x\right),$$

so ist

$$A_n = \frac{1}{n^2}, \quad A'_n = 0$$

und daher

$$C_n = \frac{1}{n^2} \phi\left(\frac{nk\pi}{c}\right);$$

daraus folgt, dass auch die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \phi\left(\frac{nk\pi}{c}\right) z^n$$

für jeden endlichen Werth von z convergirt.

Setzt man also

$$\chi(x; v) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \phi(nv) e^{nxi}, \tag{14}$$

so ist $\chi(x; v)$ eine für jeden endlichen complexen Werth von x und für jeden reellen Werth von v definirte eindeutige analytische Function, für welche sich auch, da $\phi(-v) = \phi(v)$ ist, der Ausdruck

$$\chi(x; v) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \phi(nv) \cos nx = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \phi(nv) \cos nx \tag{15}$$

ergiebt; und es lässt sich dann die Function $F(x, k)$ folgendermaassen ausdrücken:

$$F(x, k) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x') \chi\left(\frac{x - x'}{c}\pi; \frac{k\pi}{c}\right) dx'. \tag{16}$$

Jetzt seien wieder g', g'' gegebene positive Grössen von beliebiger Kleinheit, und k' ein bestimmter Werth von k, der so anzunehmen ist, dass

$$|f(x) - F(x, k')|$$

für jeden reellen Werth von x kleiner als g' ist. Bestimmt man dann eine ganze positive Zahl n so, dass der absolute Betrag von

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \phi\left(\frac{\nu k' \pi}{c}\right)\left(A_\nu \cos\frac{\nu\pi}{c} x + A'_\nu \sin\frac{\nu\pi}{c} x\right)$$

für jeden reellen Werth von x kleiner als g'' ist, und setzt

$$f(x) = A_0 + 2 \sum_{\nu=1}^{n} \phi\left(\frac{\nu k' \pi}{c}\right)\left(A_\nu \cos\frac{\nu\pi}{c} x + A'_\nu \sin\frac{\nu\pi}{c} x\right) + R_n, \tag{17}$$

so ist der absolute Betrag von R_n stets kleiner als $g' + g''$.

So ergiebt sich der Satz

D. »Ist $f(x)$ eine für jeden reellen Werth von x eindeutig definirte, durchweg stetige und reell-periodische Function, so lässt sich nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g, auf mannigfaltige Weise eine endliche FOURIER'sche Reihe herstellen, welche sich der Function $f(x)$ so genau anschliesst, dass der Unterschied zwischen beiden Functionen für keinen Werth von x mehr als g beträgt.«

Aus diesem Satze lässt sich dann durch das beim Beweise des Satzes (C.) angewandte Verfahren, wenn man unter den dortigen Functionen $G_1(x)$, $G_2(x)$, $G_3(x)$, ... jetzt endliche FOURIER'sche Reihen versteht, welche dieselbe primitive Periode wie $f(x)$ haben, der folgende ableiten:

E. »Jede Function $f(x)$ von der unter (D.) angegebenen Beschaffenheit lässt sich, wenn $2c$ die primitive Periode derselben ist, darstellen in der Form einer Summe, deren Glieder sämmtlich endliche FOURIER'sche Reihen mit der Periode $2c$ sind. Diese Reihe convergirt unbedingt für jeden Werth von x und gleichmässig in jedem endlichen Intervalle.«

Um das Vorstehende durch ein einfaches Beispiel zu erläutern, nehme ich

$$\psi(x) = e^{-x^2}.$$

Dann ist $2\omega = \sqrt{\pi}$ und

$$\phi(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2-uvi}\,du = \frac{e^{-\frac{v^2}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(u+\frac{vi}{2}\right)^2} du = e^{-\frac{v^2}{4}}.$$

Daraus ergiebt sich

$$(18)\qquad \chi(x;v) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos \nu x,$$

also, wenn man

$$(19)\qquad q = e^{-\frac{v^2}{4}}$$

setzt,

$$(20)\qquad \chi(x;v) = \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, q\right),$$

wo $\vartheta_3(x, q)$ die JACOBI'sche Function

$$1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9 \cos 6x + \ldots$$

ist.

Hiernach hat man

$$(21)\qquad F(x,k) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} f(x')\,\vartheta_3\left(\frac{x-x'}{2c}\pi, q\right) dx', \text{ wo } q = e^{-\frac{k^2\pi^2}{4c^2}}.$$

Die Formel auf der rechten Seite dieser Gleichung kommt schon bei FOURIER vor (Théorie analytique de la chaleur, Chapitre X.). Um den Temperaturzustand eines unendlich dünnen homogenen Ringes von der Länge $2c$, der keine Wärme ausstrahlt, für einen beliebigen Zeitpunkt anzugeben, wenn derselbe in irgend einem Momente bekannt ist, hat man eine Function ϕ von zwei reellen Veränderlichen x, t so zu bestimmen, dass dieselbe der Differentialgleichung

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

genügt, wo μ eine positive Constante bedeutet, als Function von x betrachtet, die Periode $2c$ besitzt und für $t = 0$ in dem Intervalle

$$-c \leqq x \leqq c$$

einer gegebenen willkürlichen Function $F(x)$ gleich ist, wobei nur angenommen wird, dass $F(x)$ stetig und $F(-c) = F(c)$ sei.

Fourier findet für die so definirte Function ϕ den Ausdruck

$$\phi = \frac{1}{2c}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_{-c}^{c} F(x')e^{-\frac{\nu^2\mu\pi^2}{c^2}t}\cos\left(\nu\frac{x-x'}{c}\pi\right)dx' \tag{22}$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c} F(x')\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} e^{-\frac{\nu^2\mu\pi^2}{c^2}t}\cos\left(\nu\frac{x-x'}{c}\pi\right)dx',$$

also

$$\phi = F(x, k), \tag{23}$$

wenn man die Function $f(x)$ so bestimmt, dass sie in dem Intervalle $(-c \leqq x \leqq c)$ mit $F(x)$ übereinkommt, und

$$k = 2\sqrt{\mu t} \tag{24}$$

nimmt. Fourier setzt, um zu beweisen, dass ϕ für $t = 0$ in dem Intervalle $(-c \leqq x \leqq c)$ gleich $F(x)$ sei, in den einzelnen Gliedern seines Ausdrucks $t = 0$, wodurch derselbe in die Reihe

$$\frac{1}{2c}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\int_{-c}^{c} F(x')\cos\left(\nu\frac{x-x'}{c}\pi\right)dx'$$

übergeht, von der er annahm, dass sie stets in dem angegebenen Intervall die Function $F(x)$ darstelle. Es verdient aber bemerkt zu werden, dass ungeachtet der Einwendungen, die gegen Fourier's Verfahren gemacht werden können, der aufgestellte Ausdruck der Function ϕ ausnahmslos richtig ist. Denn da derselbe, wie gezeigt worden ist, sich in $F(x, 2\sqrt{\mu t}$ umformen lässt, so ergiebt sich zunächst, ohne dass das Fourier'sche Theorem zu Hülfe genommen wird, dass

$$\lim_{t=0} \cdot \phi = F(x)$$

ist. Ferner genügen die einzelnen Glieder der Differentialgleichung

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \mu\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2},$$

woraus folgt, dass auch ϕ selbst ihr genügt, da die in Rede stehende Reihe eine eindeutige analytische Function von x und t ist, wenn man die Grösse t der Bedingung unterwirft, dass ihr reeller Bestandtheil positiv sein soll, und weil überdies die Reihe in jedem endlichen Bereiche der Grössen x, t gleichmässig convergirt. Endlich ändert die Reihe ihren Werth nicht, wenn $x + 2c$ für x gesetzt wird; es entspricht also die durch sie ausgedrückte Function vollständig den gestellten Bedingungen.

Es ist äusserst merkwürdig, dass bei einem Problem der mathematischen Physik für eine gesuchte, von zwei veränderlichen Grössen, die nach ihrer physikalischen Bedeutung nur reelle Werthe haben können, abhängige Function, welche für einen bestimmten Werth eines ihrer Argumente einer gegebenen willkürlichen Function des anderen gleich sein soll, ein Ausdruck sich ergiebt, der eine analytische Function der Veränderlichen ist und somit auch für complexe Werthe der letzteren eine Bedeutung hat.

Es bedeute jetzt n eine ganze positive Zahl, und es werde gesetzt

$$\chi(x;v)_n = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos \nu x,$$

so ist nach Gleichung (18)

$$\chi(x;v) = \chi(x;v)_n + 2\sum_{\nu=n+1}^{\nu=\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} \cos \nu x.$$

Für reelle Werthe von x ist aber der absolute Betrag des zweiten Gliedes auf der Rechten dieser Gleichung, der mit R_n bezeichnet werde, niemals grösser als

$$2\sum_{\nu=n+1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2+2n\nu+\nu^2}{4}v^2},$$

also

$$R_n < e^{-\frac{n^2+2n}{4}v^2} \cdot 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}}.$$

Setzt man nun in der bekannten Gleichung

$$1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu^2 \tau\pi} = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left(1 + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2\pi}{\tau}}\right),$$

wo unter τ eine positive Grösse zu verstehen ist, $\tau = \frac{v^2}{4\pi}$, so ergiebt sich, wenn v positiv ist,

$$2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{\nu^2 v^2}{4}} = \frac{2\sqrt{\pi}}{v} - 1 + \frac{4\sqrt{\pi}}{v}\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{4\nu^2\pi^2}{v^2}};$$

es ist also

$$R_n < \frac{2\sqrt{\pi}}{v} e^{-\frac{(n+1)^2}{4}v^2} \cdot \left\{1 - \frac{v}{2\sqrt{\pi}} + 2\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\frac{4\nu^2\pi^2}{v^2}}\right\} e^{\frac{v^2}{4}}.$$

Setzt man nun, unter m eine positive Grösse verstehend,

$$v = \frac{2\sqrt{m \log(n+1)}}{n+1}, \tag{25}$$

so ist

$$R_n < \frac{(n+1)^{-m+1}}{2\sqrt{m \log(n+1)}} \cdot \left(1 + [n]\right),$$

wo $[n]$ eine Grösse bedeutet, die für einen unendlich grossen Werth von n unendlich klein wird. Nimmt man also

$$m \geqq 1,$$

so wird

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \cdot R_n = 0.$$

Es ist aber dann

$$e^{-\frac{v^2}{4}} = e^{-\frac{m \log(n+1)}{(n+1)^2}} = (n+1)^{-\frac{m}{(n+1)^2}},$$

also, wenn man

$$(n+1)^{-\frac{m}{(n+1)^2}} \text{ mit } \{n\} \tag{26}$$

bezeichnet, und

$$\chi(x, n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \{n\}^{\nu\nu} \cos \nu x = 1 + 2 \sum_{\nu=1}^{n} \{n\}^{\nu\nu} \cos \nu x \tag{27}$$

setzt:

$$\chi(x; v)_n = \chi(x, n).$$

Aus der Gleichung

$$F(x, k) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x') \chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi ; \frac{k\pi}{c}\right) dx'$$

ergiebt sich dann

$$F\left(x, \frac{cv}{\pi}\right) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x') \chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi ; v\right) dx' = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x') \chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi, n\right) dx' + R_n',$$

wo auch R_n' eine Grösse bedeutet, die für einen unendlich grossen Werth von n unendlich klein wird. Da nun $\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \cdot v = 0$ und $\operatorname*{Lim}_{v=0} \cdot F\left(x, \frac{cv}{\pi}\right) = f(x)$ ist, so ergiebt sich

$$f(x) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \cdot \frac{1}{2c} \int_{-c}^{c} f(x') \chi\left(\frac{x-x'}{c}\pi, n\right) dx'. \tag{28}$$

Das Fourier'sche Theorem, präcise ausgedrückt, besagt, dass

$$f(x) = \operatorname*{Lim}_{n=\infty} \cdot \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} f(x') \bar{\chi}\left(\frac{x-x'}{c}\pi, n\right) dx' \tag{29}$$

sei, wenn

$$\bar{\chi}(x, n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \cos \nu x \tag{30}$$

gesetzt wird. An die Stelle dieser Gleichung, die nicht unter allen Umständen richtig ist, tritt also die vorhergehende, ausnahmslos geltende, in der die Function $\bar{\chi}(x, n)$ ersetzt ist durch eine andere, $\chi(x, n)$, welche gleich $\bar{\chi}(x, n)$ die Form

$$1 + 2(n, 1)\cos x + 2(n, 2)\cos 2x + \ldots + 2(n, n)\cos nx$$

hat, wo (n, ν) eine von n und ν abhangende positive Grösse bedeutet, die in $\bar{\chi}(x)$ sich auf die Einheit reducirt. Für jede bestimmte Zahl ν ist

$$\lim_{n=\infty} \cdot (n, \nu) = 1;$$

man kann also n so gross nehmen, dass die $(\nu+1)$ ersten Glieder von $\chi(x, n)$ mit den entsprechenden Gliedern von $\bar{\chi}(x, n)$ so nahe übereinstimmen, wie man will.

Functionen $\chi(x, n)$ von derselben Form und Beschaffenheit, wie die hier betrachtete, für welche die Gleichung (28) ebenfalls unbedingte Gültigkeit hat, lassen sich auch aus der obigen Function $\chi(x; v)$, die aus einer beliebigen Function $\psi(u)$ entspringt, ableiten. Man kann immer eine von n abhängende positive Grösse v_n so bestimmen, dass die Differenz

$$\chi(x; v_n) - \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \phi(\nu v_n) \cos \nu x$$

gegen Null convergirt, wenn n ohne Ende wächst, und dann ist

$$(31) \qquad \chi(x, n) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \phi(\nu v_n) \cos \nu x = 1 + 2\sum_{\nu=1}^{n} \phi(\nu v_n) \cos \nu x$$

eine Function von der angegebenen Beschaffenheit.

Selbstverständlich soll damit nicht gesagt sein, dass man auf diese Weise alle Functionen der in Rede stehenden Art erhalte.

Schliesslich möge noch bemerkt werden, dass die Gleichung (28) für die zwischen $-c$ und c liegenden Werthe von x, wie leicht zu beweisen ist, auch dann noch besteht, wenn unter $f(x)$ eine Function verstanden wird, welche in dem Intervalle von $x = -c$ bis $x = c$ eindeutig definirt und stetig ist, ohne dass $f(c) = f(-c)$ zu sein braucht. Für $x = \pm c$ ist dann auf der Linken der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\big(f(-c) + f(c)\big)$$

statt $f(\pm c)$ zu setzen.