Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen.

Von K. Weierstrass.

Erste Mittheilung.

Ist $f(x)$ eine für jeden reellen Werth der Veränderlichen x eindeutig definirte, reelle und stetige Function, deren absoluter Betrag eine endliche obere Grenze hat, so gilt bekanntlich die nachstehende Gleichung, in der u eine zweite reelle Veränderliche bedeutet und unter k eine von x und u unabhängige positive Grösse zu verstehen ist:

$$(1.)\qquad \operatorname*{Lim}_{k=0} \cdot \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du = f(x).$$

Der in dieser Gleichung ausgesprochene Satz lässt sich leicht verallgemeinern.

Es werde irgend eine Function $\psi(x)$ von derselben Beschaffenheit wie $f(x)$ angenommen, welche ihr Zeichen nicht ändert, der Gleichung $\psi(-x) = \psi(x)$ genügt und überdies der Bedingung entspricht, dass das Integral

$$\int_0^{+\infty} \psi(x)\, dx$$

einen endlichen Werth haben muss, der mit ω bezeichnet werden möge. Setzt man dann

$$(2.)\qquad F(x, k) = \frac{1}{2k\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, \psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

so ist

$$(3.)\qquad \operatorname*{Lim}_{k=0} \cdot F(x, k) = f(x).$$

In Betreff des Beweises der Gleichungen (1, 3) möge Folgendes bemerkt werden. Es seien a_1, a_2, b_1, b_2 positive Grössen, $b_1 > a_1$, $b_2 > a_2$, so hat man

$$\frac{1}{k}\int\limits_{-b_1}^{b_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du - \frac{1}{k}\int\limits_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

$$= \frac{1}{k}\int\limits_{-b_1}^{-a_1} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{k}\int\limits_{a_2}^{b_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

$$= f(-b_1\ldots -a_1)\int\limits_{\frac{a_1+x}{k}}^{\frac{b_1+x}{k}} \psi(u)\,du + f(a_2\ldots b_2)\int\limits_{\frac{a_2-x}{k}}^{\frac{b_2-x}{k}} \psi(u)\,du.\text{[1]}$$

In Verbindung mit den in Betreff der Functionen $f(x)$, $\psi(x)$ gemachten Annahmen lehrt diese Gleichung, dass das Integral

$$\frac{1}{k}\int\limits_{-a_1}^{a_2} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du,$$

wenn man den Grössen x, k bestimmte Werthe giebt und dann a_1, a_2 unabhängig von einander unendlich gross werden lässt, sich einer bestimmten endlichen Grenze nähert und somit das Integral

$$\frac{1}{k}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

eine wohldefinirte Grösse ist.

Dies festgestellt, sei nun δ eine beliebig klein anzunehmende positive Grösse, so ist

$$F(x,k) = \frac{1}{2k\omega}\int\limits_{-\infty}^{x-\delta} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{2k\omega}\int\limits_{x+\delta}^{+\infty} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

$$+ \frac{1}{2k\omega}\int\limits_{x-\delta}^{x} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du + \frac{1}{2k\omega}\int\limits_{x}^{x+\delta} f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right)du$$

$$= \frac{1}{2\omega}f(-\infty\ldots x-\delta)\int\limits_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du + \frac{1}{2\omega}f(x+\delta\ldots+\infty)\int\limits_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty}\psi(u)\,du$$

$$+ \frac{1}{2\omega}\int\limits_{0}^{\frac{\delta}{k}}\big(f(x-ku)+f(x+ku)\big)\,\psi(u)\,du.$$

[1] Ich bezeichne mit $f(x_1\ldots x_2)$ einen Mittelwerth zwischen dem kleinsten und grössten derjenigen Werthe, welche $f(x)$ in dem Intervall von $x=x_1$ bis $x=x_2$ annimmt.

Daraus folgt:

$$F(x, k) - f(x) = \frac{f(-\infty \ldots + \infty) - f(x)}{\omega} \int_{\frac{\delta}{k}}^{\infty} \psi(u)\, du$$

$$+ \frac{1}{2\omega} \int_{0}^{\frac{\delta}{k}} \big(f(x - ku) + f(x + ku) - 2f(x)\big)\, \psi(u)\, du$$

$$= \frac{f(-\infty \ldots + \infty) - f(x)}{\omega} \int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty} \psi(u)\, du$$

$$+ \tfrac{1}{2}\, \varepsilon_1 \big(f(x - \varepsilon\delta) + f(x + \varepsilon\delta) - 2f(x)\big),$$

wo $\varepsilon, \varepsilon_1$ positive, zwischen 0 und 1 enthaltene Grössen bedeuten.

Nun seien x_1, x_2 irgend zwei bestimmte Werthe von x, G die obere Grenze für den absoluten Betrag von $f(x)$, und g_1, g_2 zwei positive Grössen, die beliebig klein angenommen werden können. Dann kann man zunächst der Grösse δ einen so kleinen Werth geben, dass der absolute Betrag von

$$\tfrac{1}{2}\big(f(x - u) + f(x + u) - 2f(x)\big)$$

stets kleiner als g_1 ist, wenn x in dem Intervall $(x_1 \ldots x_2)$, und zugleich u in dem Intervall $(0 \ldots \delta)$ angenommen wird. Hat man einen solchen Werth von δ fixirt, so kann man ferner eine positive Grösse k' so bestimmen, dass für jeden Werth von k, der $< k'$,

$$\frac{2G}{\omega} \int_{\frac{\delta}{k}}^{+\infty} \psi(u)\, du < g_2,$$

also vermöge der vorstehenden Gleichung die Differenz zwischen $F(x, k)$ und $f(x)$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als $g_1 + g_2$ ist, und zwar für jeden der betrachteten Werthe von x.

Hiermit ist also nicht nur bewiesen, dass $F(x, k)$ für jeden einzelnen Werth von x der Grenze $f(x)$ sich nähert, wenn k unendlich klein wird, sondern auch, dass die Annäherung für alle einem endlichen Intervalle angehörigen Werthe von x eine gleichmässige ist.

Aus der Gleichung (3.) ziehe ich nun eine bemerkenswerthe Folgerung.

Unter den Functionen $\psi(x)$, welche den oben angegebenen Bedingungen entsprechen, giebt es unzählige, welche transcendente ganze Functionen und zugleich so beschaffen sind, dass auch die zugehörigen Functionen $F(x, k)$ für jeden bestimmten Werth der Grösse k in beständig convergirende Potenzreihen von x entwickelt werden können. Nimmt man für $\psi(x)$ eine derartige Function, z. B. $\psi(x) = e^{-xx}$, so ergiebt sich der folgende, wie es mir scheint, merkwürdige und fruchtbare Satz:

A. »Ist $f(x)$ eine nur für reelle Werthe der Veränderlichen x eindeutig definirte und durchweg stetige Function, so lässt sich auf mannigfaltige Weise eine transcendente ganze Function $F(x, k)$ herstellen, welche ausser x noch einen veränderlichen (positiven) Parameter k enthält und so beschaffen ist, dass für jeden reellen Werth von x die Gleichung

$$\operatorname*{Lim}_{k=0} \cdot F(x, k) = f(x)$$

besteht.«

Unter der Bedingung, dass die Veränderliche x auf irgend ein endliches Intervall beschränkt werde, kann man ferner, wie gezeigt worden ist, nach Annahme einer beliebig kleinen Grösse g', dem Parameter k einen so kleinen Werth k' geben, dass für jeden Werth von x die Differenz zwischen $F(x, k')$ und $f(x)$ ihrem absoluten Betrage nach kleiner als g' ist. Stellt man sodann $F(x, k')$ in der Form einer Potenzreihe

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$$

dar und bezeichnet die Summe der n ersten Glieder dieser Reihe mit $G(x)$, so kann man, nach Annahme einer anderen positiven Grösse g'', dem n einen so grossen Werth geben, dass für jeden dem angenommenen Intervall angehörigen Werth von x der absolute Betrag von $F(x, k') - G(x)$ kleiner als g'', mithin der absolute Betrag von $f(x) - G(x)$ kleiner als $g' + g''$ ist.

Damit ist bewiesen:

B. »Ist $f(x)$ eine Function von der angegebenen Beschaffenheit, und wird die Veränderliche x auf irgend ein endliches Intervall beschränkt, so lässt sich, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse g, auf mannigfaltige Weise eine ganze rationale Function $G(x)$ bestimmen, welche in dem festgesetzten Intervalle sich der Function $f(x)$ so genau anschliesst, dass die Differenz $f(x) - G(x)$ ihrem absoluten Betrage nach beständig kleiner als g ist.«

Nun nehme man zwei unendliche Reihen positiver Grössen

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$
$$g_1, g_2, g_3, \ldots$$

so an, dass $\operatorname*{Lim}_{x=\infty} \cdot a_n = \infty$ ist und $\sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu$ einen endlichen Werth hat;

dann kann man dem Vorstehenden gemäss eine Reihe von ganzen rationalen Functionen

$$G_1(x), G_2(x), G_3(x), \ldots$$

so bestimmen, dass (für $\nu = 1, 2, \ldots \infty$)

$$|f(x) - G_\nu(x)| < g_\nu$$

ist, wenn x in dem Intervall $(-a_\nu \ldots a_\nu)$ liegt. Setzt man sodann

$$f_0(x) = G_1(x), f_\nu(x) = G_{\nu+1}(x) - G_\nu(x),$$

so ist

$$\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu(x) = G_{n+1}(x),$$

und für jeden bestimmten Werth von x

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \cdot G_{n+1}(x) = f(x);$$

woraus sich

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

ergiebt.

Nun seien x_1, x_2 irgend zwei bestimmte, endliche Werthe von x, so ergiebt sich aus den Ungleichheiten

$$\begin{aligned} |f(x) - G_\nu(x)| &< g_\nu, (-a_\nu \leqq x \leqq a_\nu,) \\ |f(x) - G_{\nu+1}(x)| &< g_{\nu+1}, (-a_{\nu+1} \leqq x \leqq a_{\nu+1}) \end{aligned}$$

dass für jeden dem Intervalle $(x_1 \ldots x_2)$ angehörigen Werth von x

$$|f_\nu(x)| < g_\nu + g_{\nu+1}$$

ist, sobald ν grösser ist als eine bestimmte Zahl ν', die dadurch definirt wird, dass jedes Intervall $(-a_\nu \ldots a_\nu)$, für welches $\nu > \nu'$, die Werthe x_1, x_2 beide enthalten muss. Man hat also

$$\sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} |f_\nu(x)| < \sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} (g_\nu + g_{\nu+1}), \text{ wenn } x_1 \leqq x \leqq x_2;$$

und es convergirt demzufolge die Reihe

$$\sum_{\nu=\nu'+1}^{\infty} f_\nu(x)$$

und somit auch die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

unbedingt und gleichmässig für die dem Intervalle $(x_1 \ldots x_2)$ angehörigen Werthe von x. Es ist aber die Wahl der Grössen x_1, x_2 keiner andern Beschränkung unterworfen, als dass sie endliche reelle Werthe haben müssen, und die Functionen $f_\nu(x)$ sind unabhängig von denselben; die vorstehende Reihe convergirt also unbedingt für jeden Werth von x und gleichmässig in jedem Intervall

$$x_1 \leqq x \leqq x_2,$$

dessen Grenzen endliche Werthe haben. Es gilt also das Theorem:

C. »Jede Function $f(x)$ von der angegebenen Beschaffenheit lässt sich auf mannigfaltige Weise darstellen in der Form einer unendlichen Reihe, deren Glieder ganze rationale Functionen von x sind; diese Reihe convergirt unbedingt für jeden endlichen Werth von x, und gleichmässig in jedem Intervalle $(x_1 \ldots x_2)$, dessen Grenzen endliche Grössen sind.«

In Betreff des Satzes (B.) ist zu bemerken, dass man zur Begründung desselben nur anzunehmen braucht, es sei $\psi(x)$ eine transcendente ganze Function, welche für reelle Werthe von x die im Vorstehenden angegebenen Eigenschaften besitzt, nicht aber, dass auch $F(x, k)$ eine ganze Function von x sei, was keine nothwendige Folge der ersteren Annahme ist.

Setzt man nämlich, unter a, b zwei beliebig anzunehmende reelle Grössen verstehend,

$$F_1(x, k) = \frac{1}{2k\omega}\int_a^b f(u)\,\psi\left(\frac{u-x}{k}\right) du,$$

so hat man für reelle Werthe von x

$$F(x, k) = F_1(x, k) + \frac{1}{2\omega}\int_{\frac{x-a}{k}}^{+\infty} f(x - ku)\,\psi(u)\,du + \frac{1}{2\omega}\int_{\frac{b-x}{a}}^{+\infty} f(x + ku)\,\psi(u)\,du,$$

und kann also, wenn a, b, x_1, x_2 der Bedingung

$$a < x_1 < x_2 < b$$

gemäss angenommen worden, und eine beliebig kleine positive Grösse g_1 gegeben ist, den Werth von k so fixiren, dass für jeden dem Intervalle $(x_1 \ldots x_2)$ angehörigen Werth von x der absolute Betrag der Differenz $f(x) - F_1(x, k)$ kleiner als g_1 ist. Dies vorausgesetzt, kann man ferner, da $F_1(x, k)$ unbedingt eine (transcendente) ganze Function von x ist, nach Annahme irgend einer zweiten positiven Grösse g_2, eine ganze rationale Function $G(x)$ so bestimmen, dass in dem Intervall $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$

$$|\,G(x) - F_1(x, k)\,| < g_2,$$

also

$$|f(x) - G(x)\,| < g_1 + g_2$$

ist; was den Satz (B.) giebt.

Dieser Beweis des in Rede stehenden Satzes ist, wie ich glaube, vollkommen streng und reicht aus, wenn nur gezeigt werden soll, dass ganze rationale Functionen $G(x)$, welche sich einer gegebenen Function $f(x)$ in allen Punkten eines beliebig angenommenen Intervalls $(x_1 \ldots x_2)$ so genau anschliessen, wie man will, existiren und auch wirklich bestimmt werden können. Dagegen leidet die im Vorstehenden angegebene Bildungsweise solcher Functionen an einem wesentlichen Mangel. Setzt man

$$F_1(x, k) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (k)_\nu x^\nu,$$

wo $(k)_\nu$ eine Function von k ist, für die sich der Ausdruck

$$(k)_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu!\,\omega k^\nu} \int_{\frac{a}{k}}^{\frac{b}{k}} f(ku) \frac{d^\nu \psi(u)}{du^\nu} \cdot du$$

ergiebt, und

$$G^{(n)}(x, k) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (k)_\nu x^\nu;$$

so existiren zwar, wenn irgend eine positive Grösse δ gegeben ist, Werthe von k und n, für welche in dem Intervall $(x_1 \leqq x \leqq x_2)$

$$|f(x) - G^{(n)}(x, k)| < \delta$$

ist; es wird aber, wenn δ unendlich klein wird, k ebenfalls unendlich klein, und es tritt der Übelstand ein, dass aus dem vorstehenden Ausdruck von $(k)_\nu$ nicht zu ersehen ist, ob derselbe, wenn k unendlich klein wird, einer endlichen Grenze sich nähere oder doch wenigstens endlich bleibe, was unbedingt erforderlich ist, wenn auf die in Rede stehende Weise für einen beliebig kleinen Werth δ ein brauchbarer Annäherungsausdruck der Function $f(x)$ sich soll herstellen lassen

Wie dem angeführten Übelstande abzuhelfen ist, werde ich in einer folgenden Mittheilung zeigen.