О ФУНКЦІЯХЪ,

НАИМЕНѢЕ УКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТЪ НУЛЯ

ВЪ ДАННОМЪ ПРОМЕЖУТКѢ.

СТУДЕНТА С.-ПЕТЕРБУРГСКАГО УНИВЕРСИТЕТА

ВЛАДИМІРА МАРКОВА.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.
1892.

По опредѣленію Физико-Математическаго Факультета Императорскаго С.-Петербургскаго Университета печатать разрѣшается. 25 октября 1891 г.

Деканъ *А. Совѣтовъ*.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Настоящее сочиненіе, которому дано для краткости нѣсколько неопредѣленное заглавіе, состоитъ изъ трехъ главъ.

Первая глава посвящена вопросу о розысканіи между цѣлыми функціями степени не выше $n^{\underline{\text{ой}}}$, гдѣ n данное цѣлое и положительное число, коэффиціенты которыхъ удовлетворяютъ данному линейному неоднородному соотношенію и которыя я называю для краткости функціями вида (1), наименѣе уклоняющихся отъ нуля въ данномъ промежуткѣ (a, b). Вопросъ этотъ представляетъ обобщеніе перваго изъ вопросовъ, рѣшенныхъ П. Л. Чебышевымъ въ мемуарѣ „Sur les questions des minima" *). Общій пріемъ для рѣшенія подобныхъ вопросовъ указанъ П. Л. Чебышевымъ въ томъ же мемуарѣ **). Основаніемъ для этого пріема служитъ теорема, которая, если ограничиваться нашимъ вопросомъ, отличается отъ леммы § 2 настоящаго сочиненія только формулировкой.

Въ § 1 я устанавливаю термины и обозначенія.

Въ § 2 доказываю вышеупомянутую лемму.

Въ § 3 даю теорему, содержащую условія, необходимыя и достаточныя для того, чтобы функція вида (1) была наименѣе уклоняющеюся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціей этого вида. Условія эти представляются въ формѣ, довольно удобной для приложеній, какъ это видно изъ дальнѣйшаго.

*) §§ 20—23.
**) §§ 5—12.

Въ § 5 даю одну теорему, относящуюся къ тому случаю, когда существуетъ болѣе одной наименѣе уклоняющейся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціи вида (1).

Обѣ эти теоремы и ихъ слѣдствія, изложенныя въ §§ 4, 7—9, легко можно распространить и на тотъ случай, когда ищутся наименѣе уклоняющіяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціи вида

$$X(x)\,h(x) + \chi(x),$$

гдѣ $h(x)$ функція вида (1), а $X(x)$ и $\chi(x)$ данныя функціи отъ x, непрерывныя въ промежуткѣ (a, b) и притомъ первая изъ этихъ функцій не обращается въ нуль въ промежуткѣ (a, b). Къ числу простѣйшихъ вопросовъ послѣдняго рода относятся: первые два вопроса, рѣшенные Золотаревымъ въ мемуарѣ „Приложеніе эллиптическихъ функцій къ вопросамъ о функціяхъ наименѣе и наиболѣе отклоняющихся отъ нуля“, и второй вопросъ, рѣшенный П. Л. Чебышевымъ въ мемуарѣ „Sur les questions des minima“ *) и обобщенный А. А. Марковымъ въ мемуарѣ „Опредѣленіе нѣкоторой функціи по условію наименѣе отклоняться отъ нуля“.

Въ § 6 я разсматриваю случай $n = 2$, для котораго даю полное рѣшеніе поставленнаго вопроса и результаты представляю въ простой геометрической формѣ. Кромѣ того, въ этомъ же § я привожу два примѣра для случаевъ $n = 3$ и $n = 4$, въ которыхъ искомыя функціи имѣютъ иной характеръ, чѣмъ тѣ, которыя встрѣчаются далѣе.

Первая глава оканчивается замѣчаніемъ, что при разсмотрѣніи нашего вопроса въ общемъ видѣ можно ограничиться предположеніемъ $a = -1$, $b = 1$.

Въ главѣ второй я занимаюсь тѣмъ частнымъ случаемъ предыдущаго вопроса, когда условіе, опредѣляющее функціи вида (1), состоитъ въ томъ, что производная даннаго порядка k отъ любой изъ нихъ при $x = z$, гдѣ z данное число, имѣетъ данное значеніе, причемъ предполагаю $a = -1$, $b = 1$. За исключеніемъ случаевъ 1) $n=2$, $k=1$, $z=0$ и 2) $k = 0$, $z^2 \leq 1$, этотъ вопросъ имѣетъ только одно рѣшеніе и функціи, рѣшающія его при различныхъ значеніяхъ z, только численными множителями отличаются отъ функцій, получающихся при рѣшеніи вышеупомянутыхъ вопросовъ Золотарева и перваго вопроса, разбираемаго А. А. Марковымъ въ мемуарѣ „Объ одномъ вопросѣ Д. И. Менделѣева“, вопроса, который представляетъ обращеніе частнаго случая нашего (при $k = 1$). Особенное затрудненіе для дальнѣйшихъ изслѣдованій представляетъ функція, удовлетворяющая дифференціальному уравненію, обозначенному въ настоящемъ сочиненіи нумеромъ (83), и выраженная Золотаревымъ чрезъ эллиптическія функціи. При изслѣдованіи этой функціи я пользуюсь не уравненіемъ (83), а системой уравненій (84).

*) §§ 29—38.

При разсмотрѣніи основнаго вопроса второй главы, я касаюсь имѣющаго съ нимъ связь вопроса о распредѣленіи корней нѣкоторыхъ уравненій.

Въ §§ 17 и 23 даю двѣ теоремы, составляющія дополненіе къ извѣстной теоремѣ Чебышева, но существенно отличающіяся отъ нея тѣмъ, что ихъ нельзя распространять подобно этой теоремѣ на всякіе промежутки.

Вторая глава оканчивается составленіемъ искомыхъ функцій для случаевъ $k = n - 1$ и $k = n - 2$, причемъ для $n = 3$, а также для $n=4$ и $k=3$ всѣ выкладки проведены до конца.

Глава третья посвящена обращенію вопроса первой главы и теоремъ §§ 17 и 23 и, главнымъ образомъ, вопросу, представляющему обобщеніе второго вопроса, рѣшеннаго А. А. Марковымъ въ мемуарѣ „Объ одномъ вопросѣ Д. И. Менделѣева“, о розысканіи высшаго предѣла уклоненія отъ нуля въ данномъ промежуткѣ производной даннаго порядка k отъ цѣлой функціи степени не выше $n^{\text{ой}}$, если уклоненіе послѣдней отъ нуля въ томъ же промежуткѣ не превосходитъ даннаго положительнаго числа. Теорема § 34 даетъ весьма простой отвѣтъ на этотъ вопросъ. Въ прибавленіи я привожу доказательства послѣдней теоремы для нѣкоторыхъ частныхъ случаевъ, которыя я имѣлъ ранѣе общаго доказательства. Въ томъ же § 34 я доказываю мимоходомъ слѣдующую весьма простую и, если я не ошибаюсь, новую теорему алгебры.

Теорема. Если корни двухъ цѣлыхъ функцій $G(x)$ и $H(x)$ вещественные и перемежающіеся, то и корни ихъ производныхъ одного и того же, но какого угодно порядка k также перемежаются между собою.

Въ текстѣ эта теорема доказана для того случая, когда степени обѣихъ функцій одинаковы, но совершенно также она доказывается и для того случая, когда эти степени разнятся на единицу. Ее можно распространить и на тотъ случай, когда функціи $G(x)$ и $H(x)$ имѣютъ равные корни *).

§ 35 дополняетъ изслѣдованія главы второй.

---

*) Корень функціи $G(x)$ кратности l долженъ быть корнемъ функціи $H(x)$ кратности $l-1$, l или $l+1$.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ОПЕЧАТКИ.

Стр.	Строка.	Напечатано.	Должно быть.
2	2	функціи вида (1) $\Psi(x)$	какой угодно функціи $\Psi(x)$ (непрерывной въ промежуткѣ (a, b))
48	7	$\mid z \mid > \cos\frac{\pi}{n}$	$\mid z \mid \geq \cos\frac{\pi}{n}$.

ГЛАВА I.

§ 1. Здѣсь мы будемъ заниматься функціями отъ одной перемѣнной x вида

$$p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n \qquad (1),$$

гдѣ n данное цѣлое и положительное число, а

$$p_0, p_1, \ldots, p_n$$

вещественные параметры, удовлетворяющіе уравненію

$$\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_n p_n = \alpha \qquad (2),$$

гдѣ

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha$$

данныя вещественныя числа, между которыми α и, по крайней мѣрѣ, одно изъ остальныхъ чиселъ не равны нулю.

Эти функціи мы будемъ называть функціями вида (1).

Линейную функцію

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n$$

отъ коэффиціентовъ какой угодно цѣлой функціи отъ x

$$\Phi(x) = P_0 x^n + P_1 x^{n-1} + \ldots + P_n$$

степени не выше $n^{\text{ой}}$ будемъ обозначать чрезъ

$$\omega(\Phi).$$

Наибольшую величину, которую получаетъ численное значеніе функціи вида (1) $\Psi(x)$, когда x измѣняется въ нѣкоторомъ промежуткѣ *) (a, b) отъ a до $b > a$, будемъ называть уклоненіемъ $\Psi(x)$ отъ нуля въ промежуткѣ (a, b).

Тѣ изъ функцій вида (1), которымъ соотвѣтствуетъ наименьшая величина уклоненія отъ нуля въ промежуткѣ (a, b), будемъ называть наименѣе уклоняющимися отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціями вида (1) **).

§ 2. **Лемма.** Пусть

$$y = f(x)$$

нѣкоторая функція вида (1), L ея уклоненіе отъ нуля въ промежуткѣ (a, b), а

$$x_1, x_2, \ldots, x_p \tag{3}$$

всѣ различные корни уравненія

$$L^2 - y^2 = 0,$$

заключающіеся въ промежуткѣ (a, b).

Если y наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1), то не существуетъ цѣлой функціи отъ x степени не выше $n^{\text{ой}}$ $g(x)$ такой, что

$$\omega(g) = 0$$

и всѣ произведенія

$$g(x_1)\, f(x_1),\; g(x_2)\, f(x_2), \ldots, g(x_p)\, f(x_p)$$

отрицательны.

Обратно, если такой функціи $g(x)$ не существуетъ, то y наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1).

Доказательство. Если функція $g(x)$ существуетъ, то уклоненіе отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціи

$$y_1 = y + \rho\, g(x),$$

*) Всѣ промежутки, о которыхъ будемъ говорить, будемъ предполагать включающими предѣлы.

**) Существованіе, по крайней мѣрѣ, одной такой функціи очевидно.

которая принадлежитъ къ функціямъ вида (1), при достаточно маломъ положительномъ значеніи числа ρ менѣе L.

Дѣйствительно, разсмотримъ разность

$$L^2 - y_1^2 = L^2 - y^2 - 2\rho\, y g(x) - \rho^2 g^2(x).$$

Такъ какъ

$$f(x_l)\, g(x_l) < 0, \quad l = 1, 2, \ldots, p,$$

то можно найти столь малое положительное число δ, что ни въ одномъ изъ промежутковъ

$$(x_1 - \delta,\, x_1 + \delta),\ (x_2 - \delta,\, x_2 + \delta), \ldots, (x_p - \delta,\, x_p + \delta) \tag{4}$$

не будетъ корней уравненія

$$y g(x) = 0.$$

Обозначимъ чрезъ M, μ, N и ν такія положительныя числа, что

$$\left.\begin{aligned} g^2(x) &< M, \\ -2yg(x) &> \mu \end{aligned}\right\}\ \text{внутри промежутковъ (4),}$$

$$\left.\begin{aligned} |2yg(x)| + g^2(x) &< N, \\ L^2 - y^2 &> \nu \end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&\text{внутри промежутка } (a, b),\\ &\text{но внѣ промежутковъ (4) *),}\end{aligned}$$

и подчинимъ ρ условію быть менѣе каждаго изъ чиселъ $1, \frac{\mu}{M}, \frac{\nu}{N}$.

Тогда внутри промежутка (a, b), но внѣ промежутковъ (4)

$$L^2 - y_1^2 > \nu - \frac{\nu}{N} N = 0,$$

а внутри промежутковъ (4)

$$L^2 - y_1^2 > \rho\left(\mu - \frac{\mu}{M} M\right) = 0,$$

*) Численное значеніе какого угодно числа r мы обозначаемъ чрезъ $|r|$.

и, слѣдовательно, уклоненіе y_1 отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) менѣе L.

Если же функція $g(x)$ не существуетъ, то разность между какою угодно функціей вида (1) и y, по крайней мѣрѣ, для одного изъ чиселъ (3) не противнаго знака съ y, и, слѣдовательно, уклоненіе какой угодно функціи вида (1) отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) не менѣе L.

§ 3. Теорема 1. Пусть

$$y = f(x)$$

нѣкоторая функція вида (1), не равная $\frac{\alpha}{\alpha_n}$, L ея уклоненіе отъ нуля въ промежуткѣ (a, b), а

$$x_1, x_2, \ldots, x_p$$

всѣ различные корни уравненія

$$L^2 - y^2 = 0 \qquad (5),$$

заключающіеся въ промежуткѣ (a, b) и расположенные въ возрастающемъ порядкѣ.

Пусть притомъ

$$F(x) = \prod_{l=1}^{l=p} (x - x_l) = \sum_{i=0}^{i=p} Q_i x^{p-i} \qquad (6)$$

и

$$F_l(x) = \frac{F(x)}{x - x_l}, \quad l = 1, 2, \ldots, p \qquad (7).$$

Если y наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1), то въ ряду

$$\omega(F_1)(-1)^1 f(x_1), \ \omega(F_2)(-1)^2 f(x_2), \ldots, \omega(F_p)(-1)^p f(x_p) \qquad (8)$$

нѣтъ чиселъ противныхъ знаковъ, а при

$$p < n + 1,$$

кромѣ того,

$$\omega(F\psi) = 0 \qquad (9),$$

какова бы ни была цѣлая функція $\psi(x)$ степени не выше $n - p^{\text{ой}}$.

Обратно, если въ ряду (8) нѣтъ чиселъ противныхъ знаковъ, а при $p < n + 1$, кромѣ того, имѣетъ мѣсто уравненіе (9) для произвольной цѣлой функціи $\psi(x)$ степени не выше $n - p^{\text{ой}}$, то y наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1).

Доказательство. Прежде всего замѣтимъ, что

$$p \leqq n + 1,$$

такъ какъ y не можетъ быть постоянной и каждый корень уравненія (5), заключающійся въ промежуткѣ (a, b) и отличный отъ a и b, долженъ быть четной кратности.

Далѣе, какова бы ни была цѣлая функція $g(x)$ степени не выше $n^{\text{ой}}$, по формулѣ Лагранжа имѣемъ

$$g(x) = AF(x)\ R(x) + \sum_{l=1}^{l=p} \frac{g(x_l)}{F'(x_l)} F_l(x) \qquad (10),$$

гдѣ A постоянное число, а $R(x)$ цѣлая функція степени не выше $n - p^{\text{ой}}$, если $p < n + 1$, въ случаѣ же, когда $p = n + 1$,

$$R(x) = 0.$$

Изъ (10) выводимъ

$$\omega(g) = A\omega(FR) + \sum_{l=1}^{l=p} \frac{g(x_l)}{F'(x_l)} \omega(F_l) \qquad (11).$$

Если при $p < n + 1$ уравненіе (9) не имѣетъ мѣста для произвольной цѣлой функціи $\psi(x)$ степени не выше $n - p^{\text{ой}}$, то можно подобрать функцію $R(x)$ такъ, чтобы было

$$\omega(FR) \gtrless 0,$$

а затѣмъ, полагая

$$g(x_l) = -f(x_l), \quad l = 1, 2, \ldots, p,$$

распорядиться числомъ A такъ, чтобы было

$$\omega(g) = 0,$$

и, слѣдовательно, по леммѣ § 2 y не можетъ быть наименѣе уклоняющеюся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціей вида (1).

Итакъ, если y наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1) и $p < n+1$, то уравненіе (9) имѣетъ мѣсто для произвольной цѣлой функціи $\psi(x)$ степени не выше $n-p^{\text{ой}}$.

А потому, если y наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1), то формула (11) приведется къ

$$\omega(g) = \sum_{l=1}^{l=p} \frac{g(x_l)}{F'(x_l)}\, \omega(F_l) \qquad (12).$$

Принимая же во вниманіе равенство

$$F'(x_l) = (-1)^{p-l} \prod_{m=1}^{m=l-1} (x_l - x_m) \prod_{m=l+1}^{m=p} (x_m - x_l),$$

заключаемъ, что если въ ряду (8) есть числа противныхъ знаковъ, то уравненію

$$\omega(g) = 0 \qquad (13)$$

можно удовлетворить одновременно съ неравенствами

$$g(x_1)\, f(x_1) < 0,\ g(x_2)\, f(x_2) < 0, \ldots,\ g(x_p)\, f(x_p) < 0 \qquad (14),$$

и, слѣдовательно, по леммѣ § 2 y не можетъ быть наименѣе уклоняющеюся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціей вида (1).

Если же въ ряду (8) нѣтъ чиселъ противныхъ знаковъ, а при $p < n+1$, кромѣ того, имѣетъ мѣсто уравненіе (9) для произвольной цѣлой функціи $\psi(x)$ степени не выше $n-p^{\text{ой}}$, то уравненію (13) нельзя удовлетворить одновременно съ неравенствами (14), и, слѣдовательно, по леммѣ § 2 y наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1).

§ 4. Полагая въ уравненіи (9) послѣдовательно

$$\psi(x) = x^{n-p},\ \psi(x) = x^{n-p-1}, \ldots,\ \psi(x) = 1,$$

получаемъ вмѣсто уравненія (9) уравненія

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 \quad Q_0 + \alpha_1 \qquad Q_1 + \ldots + \alpha_p \quad Q_p = 0,\\
&\alpha_1 \quad Q_0 + \alpha_2 \qquad Q_1 + \ldots + \alpha_{p+1} Q_p = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\alpha_{n-p} Q_0 + \alpha_{n-p+1} Q_1 + \ldots + \alpha_n \quad Q_p = 0,
\end{aligned}$$

ему равносильныя.

Замѣтимъ, что если y наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1), то, какъ это видно изъ формулы (12), $\omega(\Phi)$ можно представить въ формѣ

$$\omega(\Phi) = \sum_{l=1}^{l=p} C_l\, \Phi(x_l),$$

причемъ числа $C_1, C_2, \ldots, C_p$ не зависятъ отъ $\Phi(x)$ и въ ряду

$$C_1\, f(x_1),\ C_2\, f(x_2), \ldots,\ C_p\, f(x_p)$$

нѣтъ чиселъ противныхъ знаковъ.

Отсюда слѣдуетъ, что, если

$$\omega(\Phi) \text{ не} = \alpha_n\, \Phi(z),$$

гдѣ z нѣкоторое число, заключающееся въ промежуткѣ (a, b), то численное значеніе каждой наименѣе уклоняющейся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціи вида (1) достигаетъ своей наибольшей величины въ промежуткѣ (a, b) не менѣе двухъ разъ.

Если же

$$\omega(\Phi) = \alpha_n\, \Phi(z)$$

и z заключается въ промежуткѣ (a, b), то очевидно, что каждая функція вида (1), уклоненіе которой отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) равно $\left|\frac{\alpha}{\alpha_n}\right|$, и только такая будетъ наименѣе уклоняющеюся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціею вида (1).

Въ этомъ случаѣ, очевидно, α_n не равно нулю.

§ 5. Теорема 2. **Если существуетъ болѣе одной наименѣе уклоняющейся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціи вида (1), то между наименѣе уклоняющимися отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціями вида (1) найдется такая, численное значеніе которой въ промежуткѣ (a, b) достигаетъ своей наибольшей величины не болѣе чѣмъ для μ значеній x, гдѣ**

$$\mu = \frac{n+2}{2} \text{ при } n \text{ четномъ}$$

$$\mu = \frac{n+1}{2} \text{ при } n \text{ нечетномъ;}$$

и если число этихъ значеній x равно μ, то при n четномъ между ними заключаются оба числа a и b, а при n нечетномъ по крайней мѣрѣ одно изъ этихъ чиселъ.

Доказательство. Пусть y одна изъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функцій вида (1), L ея уклоненіе отъ нуля въ промежуткѣ (a, b), а

$$x_1, x_2, \ldots, x_p \tag{15}$$

всѣ различные корни уравненія

$$L^2 - y^2 = 0,$$

заключающіеся въ промежуткѣ (a, b). Пусть η другая наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1).

Обозначимъ разность

$$\eta - y$$

чрезъ $v(x)$. Тогда изъ чиселъ (15) уравненію

$$v(x) = 0 \tag{16}$$

могутъ удовлетворять не болѣе μ чиселъ, и если ровно μ чиселъ изъ чиселъ (15) удовлетворяютъ уравненію (16), то между этими μ числами при n четномъ находятся оба числа a и b, а при n нечетномъ, по крайней мѣрѣ, одно изъ этихъ чиселъ.

Дѣйствительно, каждое изъ чиселъ (15), отличное отъ a и b и удовлетворяющее уравненію (16), должно быть корнемъ четной кратности этого уравненія.

Такъ какъ

$$\omega(v) = \omega(\eta) - \omega(y) = 0,$$

то функція

$$w(x) = y + \rho\, v(x)$$

будетъ функціей вида (1), каково бы ни было число ρ.

А если

$$0 < \rho < 1,$$

то для всякаго значенія x, не удовлетворяющаго уравненію (16), имѣетъ мѣсто, по крайней мѣрѣ, одно изъ неравенствъ

$$w^2(x) < y^2 \quad \text{или} \quad w^2(x) < \eta^2.$$

Поэтому численное значеніе $w(x)$ для всѣхъ значеній x, заключающихся въ промежуткѣ (a, b) и не удовлетворяющихъ уравненію (16), менѣе L, а для значеній x удовлетворяющихъ уравненію (16),

$$w(x) = y = \eta;$$

и такъ какъ между этими послѣдними значеніями x находятся не болѣе μ чиселъ (15), то численное значеніе $w(x)$ въ промежуткѣ (a, b) достигаетъ своей наибольшей величины L не болѣе чѣмъ для μ значеній x.

Притомъ, если численное значеніе $w(x)$ достигаетъ L ровно для μ значеній x въ промежуткѣ (a, b), то между этими μ значеніями x находятся оба числа a и b при n четномъ и, по крайней мѣрѣ, одно изъ этихъ чиселъ при n нечетномъ.

§ 6. Остановимся на случаѣ $n = 2$. Пусть

$$y = f(x)$$

какая нибудь наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1), а L ея уклоненіе отъ нуля въ томъ же промежуткѣ.

По замѣченному въ § 4 уравненіе

$$L^2 - y^2 = 0 \tag{17}$$

можетъ имѣть въ промежуткѣ (a, b) ровно одинъ корень x_1 лишь въ томъ случаѣ, когда

$$\omega(\Phi) = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = \alpha_2 (P_0 x_1^2 + P_1 x_1 + P_2),$$

т. е. лишь въ томъ случаѣ, когда

$$\alpha_2 \gtrless 0 \tag{18},$$

$$\alpha_1^2 - \alpha_0 \alpha_2 = 0 \tag{19},$$

$$a \leqq \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = x_1 \leqq b \tag{20}.$$

Условіе (20), принимая во вниманіе (19), можно замѣнить такимъ

$$(\alpha_1 - \alpha_2 a)(\alpha_1 - \alpha_2 b) = \alpha_1^2 - \alpha_0 \alpha_2 + \alpha_2 \omega\big((x-a)(x-b)\big) =$$
$$= \alpha_2 \omega\big((x-a)(x-b)\big) \leqq 0 \tag{21}.$$

Если же (18), (19) и (21) имѣютъ мѣсто, то всякая функція вида (1), уклоненіе которой отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) равно $\left|\frac{\alpha}{\alpha_2}\right|$, и только такая будетъ наименѣе уклоняющеюся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціей вида (1).

Всѣ же такія и только такія функціи заключаются, если x_1 не равно ни a ни b, въ формѣ

$$h_1(x) = \frac{\alpha}{\alpha_2}\left\{1 - \rho\,\alpha_2^2 (x - x_1)^2\right\} = \frac{\alpha}{\alpha_2}\left\{1 - \rho(\alpha_2 x - \alpha_1)^2\right\} \tag{22},$$

причемъ не отрицательное число ρ удовлетворяетъ обоимъ неравенствамъ

$$\rho \leqq \frac{2}{(\alpha_2 a - \alpha_1)^2}, \quad \rho \leqq \frac{2}{(\alpha_2 b - \alpha_1)^2} \tag{23}.$$

(Если въ (22) ρ отрицательное или не удовлетворяетъ какому либо изъ неравенствъ (23), то, навѣрно, имѣетъ мѣсто, по крайней мѣрѣ, одно изъ неравенствъ

$$\left|h_1(a)\right| > \left|\frac{\alpha}{\alpha_2}\right| \text{ или } \left|h_1(b)\right| > \left|\frac{\alpha}{\alpha_2}\right|\Big).$$

А если x_1 равно a или b, то всѣ наименѣе уклоняющіяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціи вида (1) и только такія заключаются въ формѣ

$$h_2(x) = \frac{\alpha}{\alpha_2}\left\{1 - \rho\,(x - x_1)(x - \theta)\right\},$$

причемъ θ произвольное число, не удовлетворяющее неравенствамъ

$$a < \theta < b,$$

а число ρ не противнаго знака со знакомъ функціи

$$(x - x_1)(x - \theta)$$

въ промежуткѣ (a, b) и удовлетворяетъ неравенству

$$|\rho| \leqq \frac{2}{\left|\left(\frac{\theta + x_1}{2} - x_1\right)\left(\frac{\theta + x_1}{2} - \theta\right)\right|} = \frac{8}{(\theta - x_1)^2},$$

если число $\frac{\theta + x_1}{2}$ заключается въ промежуткѣ (a, b), а въ противномъ случаѣ неравенству

$$|\rho| \leqq \frac{2}{|(c - x_1)(c - \theta)|} = \frac{2}{(b - a)\,|c - \theta|},$$

гдѣ c то изъ чиселъ a и b, которое не равно x_1.

Исключимъ разсмотрѣнный сейчасъ случай.

Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ уравненіе (17) имѣетъ въ промежуткѣ (a, b), по крайней мѣрѣ, два различныхъ корня (между которыми содержится, по крайней мѣрѣ, одно изъ чиселъ a и b).

А потому изъ теоремъ $1^{\underline{ой}}$ и $2^{\underline{ой}}$ слѣдуетъ, что болѣе одной наименѣе уклоняющейся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціи вида (1) не можетъ получиться, если равенство

$$\omega\left((x-a)(x-b)\right) = \alpha_0 - \alpha_1(a+b) + \alpha_2 ab = 0 \qquad (24)$$

не имѣетъ мѣста.

Предположимъ, что это равенство имѣетъ мѣсто.

Если уравненіе (17) имѣетъ въ промежуткѣ (a, b) ровно два различныхъ корня $x_1 = a$ и x_2, то соотвѣтствующая y функція (6) будетъ

$$F(x) = (x-a)(x-x_2),$$

и для опредѣленія x_2 по теоремѣ $1^{\underline{ой}}$ имѣемъ уравненіе

$$\omega(F) = \alpha_0 - \alpha_1(a+x_2) + \alpha_2 a x_2 = 0.$$

Вычитая изъ этого уравненія равенство (24), получаемъ

$$(\alpha_2 a - \alpha_1)(x_2 - b) = 0.$$

Если

$$\alpha_2 a - \alpha_1 = 0 \qquad (25),$$

то мы имѣемъ случай, разсмотрѣнный выше, такъ какъ изъ (24) и (25) слѣдуетъ, что

$$\alpha_1 a - \alpha_0 = 0.$$

Во всѣхъ остальныхъ случаяхъ

$$x_2 = b.$$

Точно также, предполагая, что уравненіе (17) имѣетъ въ промежуткѣ (a, b) ровно два различныхъ корня x_1 и $x_2 = b$, найдемъ, что

$$x_1 = a.$$

Итакъ, если уравненіе (19) имѣетъ въ промежуткѣ (a, b) ровно два различныхъ корня, то соотвѣтствующія y функціи (6) и (7) будутъ

$$F(x) = (x-a)(x-b),$$

$$F_1(x) = x - b,$$

$$F_2(x) = x - a,$$

и

$$\omega(F_1)\,\omega(F_2) = (\alpha_1 - \alpha_2 b)(\alpha_1 - \alpha_2 a) =$$
$$= \alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2 + \alpha_2\,\omega\left((x-a)(x-b)\right) = \alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2.$$

Предположимъ, что

$$\alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2 < 0.$$

Въ такомъ случаѣ, если уравненіе (17) имѣетъ въ промежуткѣ (a, b) ровно два различныхъ корня, то по теоремѣ $1^{\underline{ой}}$ должно быть

$$f(a) = f(b),$$

и, слѣдовательно, y должна имѣть форму

$$f(a)\{1 + \rho(x-a)(x-b)\} \qquad (26),$$

причемъ число ρ должно удовлетворять неравенствамъ

$$0 < \rho < \frac{8}{(b-a)^2},$$

такъ какъ иначе было бы

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \geqq \left|f(a)\right|.$$

Подставляя въ уравненіе

$$\omega(y) = \alpha$$

вмѣсто y выраженіе (26) и принимая во вниманіе (24), получаемъ

$$\alpha_2 f(a) = \alpha,$$

откуда находимъ

$$f(a) = \pm L = \frac{\alpha}{\alpha_2},$$

и, слѣдовательно,

$$y = \frac{\alpha}{\alpha_2}\{1 + \rho\,(x-a)\,(x-b)\} = h_3(x) \qquad (27),$$

причемъ число ρ удовлетворяетъ вышеупомянутымъ неравенствамъ.

Найденныя такимъ образомъ функціи будутъ дѣйствительно наименѣе уклоняющимися отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціями вида (1), какъ это видно изъ теоремы 1ой.

Мы получимъ еще двѣ наименѣе уклоняющіяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціи вида (1), давая въ (27) числу ρ значенія 0 и $\frac{8}{(b-a)^2}$; только уравненіе (17) для этихъ функцій y имѣетъ болѣе двухъ различныхъ корней въ промежуткѣ (a, b).

Такъ какъ эти двѣ послѣднія функціи y единственныя, которыя могутъ соотвѣтствовать предположенію, что уравненіе (17) имѣетъ въ промежуткѣ (a, b) болѣе двухъ различныхъ корней, то мы получили такимъ образомъ всѣ функціи y.

Переходимъ къ случаю, когда

$$\alpha_1^2 - \alpha_0\,\alpha_2 > 0.$$

Въ этомъ случаѣ, если уравненіе (17) имѣетъ въ промежуткѣ (a, b) ровно два различныхъ корня, то по теоремѣ 1ой должно быть

$$f(a) = -f(b),$$

и, слѣдовательно, y должна имѣть форму

$$f(a)\left\{\frac{2x-a-b}{a-b} + \rho\,(x-a)\,(x-b)\right\},$$

причемъ число ρ должно удовлетворять неравенству

$$|\rho| \leqq \frac{2}{(b-a)^2},$$

такъ какъ иначе производная y' имѣла бы въ промежуткѣ (a, b) корень, отличный отъ a и b.

Изъ уравненія

$$\omega(y) = \alpha$$

находимъ

$$f(a) = \pm L = \frac{\alpha\,(a-b)}{2\alpha_1 - \alpha_2\,(a+b)},$$

и, слѣдовательно,

$$y = \frac{\alpha\,(a-b)}{2\alpha_1 - \alpha_2\,(a+b)}\left\{\frac{2x-a-b}{a-b} + \rho\,(x-a)\,(x-b)\right\} \qquad (28),$$

причемъ число ρ удовлетворяетъ вышеупомянутому неравенству.

Найденныя такимъ образомъ функціи будутъ дѣйствительно наименѣе уклоняющимися отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціями вида (1), какъ это видно изъ теоремы 1ой.

Другихъ же функцій y быть не можетъ.

Дѣйствительно, разность $g(x)$ между какою угодно изъ функцій y и какою нибудь изъ функцій (28) обращается въ нуль, по крайней мѣрѣ, для одного изъ чиселъ a и b; а такъ какъ $g(x)$, кромѣ того, удовлетворяетъ условію

$$\omega(g) = 0,$$

то, принимая во вниманіе (24), найдемъ, что $g(x)$ дѣлится на

$$(x-a)\,(x-b),$$

и, слѣдовательно, каждая функція y содержится между функціями (28).

Между прочимъ функціи (28) и только эти будутъ наименѣе уклоняющимися отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціями вида (1), если

$$\omega(\Phi) = \Phi'\left(\frac{a+b}{2}\right) = P_0\,(a+b) + P_1.$$

Въ этомъ случаѣ

$$L = \frac{b-a}{2}\,|\alpha|.$$

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что, если

$$\alpha_1^2 - \alpha_0\,\alpha_2 = 0,$$

то мы имѣемъ разсмотрѣнный выше случай.

Исключимъ теперь и только что разсмотрѣнный случай, въ которомъ равенство (24) имѣетъ мѣсто.

Во всѣхъ остающихся случаяхъ существуетъ только одна функція y.

Если уравненіе (17) имѣетъ въ промежуткѣ $(a,\ b)$ ровно два различныхъ корня $x_1 = a$ и x_2, то соотвѣтствующая y функція (6) будетъ

$$F(x) = (x - a)\,(x - x_2),$$

и для опредѣленія x_2 по теоремѣ 1ой имѣемъ уравненіе

$$\omega(F) = \alpha_0 - \alpha_1 (a + x_2) + \alpha_2 a x_2 = 0.$$

Отсюда находимъ

$$x_2 = \frac{\alpha_0 - \alpha_1 a}{\alpha_1 - \alpha_2 a}.$$

Такъ какъ равенство (24) не имѣетъ мѣста, то найденное такимъ образомъ число x_2 не равно b и, слѣдовательно, должно быть двукратнымъ корнемъ уравненія (17).

Замѣчая, что

$$f(x_2) = -f(a),$$

такъ какъ иначе производная y' имѣла бы корень между a и x_2, получаемъ

$$y = f(x_2)\left\{1 - 2\frac{(x-x_2)^2}{(a-x_2)^2}\right\} = f(x_2)\left\{1 - 2\frac{[\alpha_0 - \alpha_1 (a+x) + \alpha_2 a x]^2}{(\alpha_0 - 2\alpha_1 a + \alpha_2 a^2)^2}\right\}.$$

Изъ уравненія

$$\omega(y) = \alpha$$

находимъ

$$f(x_2) = \pm L = \frac{\alpha}{\alpha_2 - 2\,\frac{\alpha_0(\alpha_1 - \alpha_2 a)^2 - 2\alpha_1(\alpha_1 - \alpha_2 a)(\alpha_0 - \alpha_1 a) + \alpha_2(\alpha_0 - \alpha_1 a)^2}{(\alpha_0 - 2\alpha_1 a + \alpha_2 a^2)^2}} =$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha_2 + \frac{2(\alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2)}{\alpha_0 - 2\alpha_1 a + \alpha_2 a^2}},$$

и, слѣдовательно,

$$y = \frac{\alpha}{\alpha_2 + \frac{2(\alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2)}{\alpha_0 - 2\alpha_1 a + \alpha_2 a^2}}\left\{1 - 2\frac{[\alpha_0 - \alpha_1(a+x) + \alpha_2 a x]^2}{(\alpha_0 - 2\alpha_1 a + \alpha_2 a^2)^2}\right\} = f_1(x) \qquad (29).$$

Равенство (29) имѣетъ мѣсто тогда и только *) тогда, когда вопервыхъ

$$\frac{a+b}{2} \leqq \frac{\alpha_0 - \alpha_1 a}{\alpha_1 - \alpha_2 a} = x_2 < b,$$

т. е.

$$\omega\big((x-a)(x-b)\big)\ \omega\left((x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right) \leqq 0 \qquad (30),$$

такъ какъ при

$$a < x_2 < \frac{a+b}{2}$$

было бы

$$|f(b)| > |f(a)|,$$

и вовторыхъ

$$\omega(x-a)\,\omega(x-b) = (\alpha_1 - \alpha_2 a)\left(\alpha_1 - \alpha_2\frac{\alpha_0 - \alpha_1 a}{\alpha_1 - \alpha_2 a}\right) = \alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2 > 0 \qquad (31).$$

Если бы вмѣсто (31) было

$$\alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2 = 0 \qquad (32),$$

то мы имѣли бы первый изъ разсмотрѣнныхъ выше случаевъ.

Дѣйствительно, изъ (30) и (32) слѣдуетъ вопервыхъ, что $\alpha_2 \gtrless 0$, такъ какъ иначе было бы $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$, и вовторыхъ, что число $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, равное a или $\frac{\alpha_0 - \alpha_1 a}{\alpha_1 - \alpha_2 a}$, заключается въ промежуткѣ $(a,\ b)$.

Точно также найдемъ, что

$$y = \frac{\alpha}{\alpha_2 + \frac{2(\alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2)}{\alpha_0 - 2\alpha_1 b + \alpha_2 b^2}}\left\{1 - \frac{2[\alpha_0 - \alpha_1(b+x) + \alpha_2 b x]^2}{(\alpha_0 - 2\alpha_1 b + \alpha_2 b^2)^2}\right\} = f_2(x),$$

$$L = \left|\frac{\alpha}{\alpha_2 + \frac{2(\alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2)}{\alpha_0 - 2\alpha_1 b + \alpha_2 b^2}}\right|,$$

тогда и только тогда, когда имѣютъ мѣсто неравенства

$$\omega\big((x-a)(x-b)\big)\ \omega\left(\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\right) \leqq 0,$$

$$\alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2 > 0.$$

*) Надо помнить, что мы исключаемъ случаи, разсмотрѣнные выше.

Предположимъ теперь, что уравненіе (17) имѣетъ въ промежуткѣ (a, b) ровно три различныхъ корня, тогда, очевидно,

$$y = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left\{1 - 2\,\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}\right\} = f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left\{1 - 2\,\frac{(2x-a-b)^2}{(b-a)^2}\right\}.$$

Изъ уравненія

$$\omega(y) = \alpha$$

находимъ

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \pm L = \frac{-\alpha\,(b-a)^2}{8\alpha_0 - 8\alpha_1(a+b) + \alpha_2(a^2+6ab+b^2)},$$

и, слѣдовательно,

$$y = \frac{\alpha\,\{2\,(2x-a-b)^2 - (b-a)^2\}}{8\alpha_0 - 8\alpha_1(a+b) + \alpha_2(a^2+6ab+b^2)} = f_3(x) \qquad (33).$$

Здѣсь соотвѣтствующія y функціи (6) и (7) будутъ

$$F(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b),$$

$$F_1(x) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b),$$

$$F_2(x) = (x-a)(x-b),$$

$$F_3(x) = (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right).$$

Слѣдовательно, равенство (33) имѣетъ мѣсто тогда и только тогда, когда въ ряду

$$\omega\left(\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\right),\ \ \omega\left((x-a)(x-b)\right),\ \ \omega\left((x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right)$$

нѣтъ чиселъ противныхъ знаковъ.

Предположимъ наконецъ, что уравненіе (17) имѣетъ въ промежуткѣ (a, b) болѣе трехъ различныхъ корней, тогда, очевидно,

$$y = \pm L = \frac{\alpha}{\alpha_2} = f_4(x) \qquad (34),$$

$$\alpha_2 \gtrless 0 \qquad (35).$$

Этотъ случай имѣетъ мѣсто тогда и только тогда, когда всякая цѣлая функція отъ x степени не выше второй

$$g(x) = q_0 x^2 + q_1 x + q_2,$$

для которой

$$\omega(g) = \alpha_0 q_0 + \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 = 0 \qquad (36),$$

мѣняетъ знакъ въ промежуткѣ (a, b), т. е. имѣетъ въ промежуткѣ (a, b), по крайней мѣрѣ, одинъ простой корень, отличный отъ a и b.

Дѣйствительно, если существуетъ цѣлая функція отъ x степени не выше второй $g(x)$, удовлетворяющая условію (36) и не мѣняющая знака въ промежуткѣ (a, b), то можно подобрать число ρ такъ, что уклоненіе функціи вида (1)

$$\frac{\alpha}{\alpha_2} + \rho g(x)$$

отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) будетъ не болѣе $\left|\frac{\alpha}{\alpha_2}\right|$.

Если же всякая цѣлая функція отъ x степени не выше второй $g(x)$, удовлетворяющая условію (36), мѣняетъ знакъ въ промежуткѣ (a, b), то и разность между какою угодно функціей вида (1) и $\frac{\alpha}{\alpha_2}$ также мѣняетъ знакъ въ промежуткѣ (a, b).

Но при

$$\alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2 \geqq 0$$

можно подобрать коэффиціенты q_0 и q_1 цѣлой функціи $g(x)$ второй степени, удовлетворяющей условію (36), такъ, что будетъ

$$q_1^2 - 4q_0 q_2 = q_1^2 + 4q_0\,\frac{\alpha_0 q_0 + \alpha_1 q_1}{\alpha_2} = \frac{\alpha_2 q_1^2 + 4\alpha_1 q_0 q_1 + 4\alpha_0 q_0^2}{\alpha_2} \leqq 0,$$

и, слѣдовательно, корни функціи $g(x)$ будутъ мнимые или равные.

Поэтому въ разсматриваемомъ случаѣ должно быть

$$\alpha_1^2 - \alpha_0\alpha_2 < 0 \qquad (37).$$

Далѣе корень уравненія

$$\alpha_1 - \alpha_2 x = 0$$

долженъ быть болѣе a и менѣе b, т. е. должно быть

$$(\alpha_1-\alpha_2 a)(\alpha_1-\alpha_2 b)=\alpha_1^2-\alpha_0\alpha_2+\alpha_2\,\omega\big((x-a)(x-b)\big)<0 \quad (38),$$

такъ какъ иначе функція

$$\alpha_1-\alpha_2 x$$

(отъ которой всякая функція первой степени, удовлетворяющая условію (36), отличается только постояннымъ множителемъ) не мѣняла бы знака въ промежуткѣ $(a,\ b)$.

Пусть

$$g(x)=g_0(x-\beta_1)(x-\beta_2)$$

какая нибудь цѣлая функція второй степени, удовлетворяющая условію (36), для которой число β_1 удовлетворяетъ одному изъ неравенствъ

$$\beta_1\leqq a \quad \text{или} \quad \beta_1\geqq b \qquad (39),$$

тогда должно быть

$$a<\beta_2=\frac{\alpha_0-\alpha_1\beta_1}{\alpha_1-\alpha_2\beta_1}<b \qquad (40).$$

На основаніи неравенства (37) производная

$$\frac{d\beta_2}{d\beta_1}=\frac{\alpha_0\alpha_2-\alpha_1^2}{(\alpha_1-\alpha_2\beta_1)^2}>0$$

для всякаго конечнаго значенія β_1, а потому, при возрастаніи β_1 отъ b до $+\infty$, β_2 возрастаетъ

$$\text{отъ}\ \frac{\alpha_0-\alpha_1 b}{\alpha_1-\alpha_2 b}\ \text{до}\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

а при возрастаніи β_1 отъ $-\infty$ до a, β_2 возрастаетъ

$$\text{отъ}\ \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\ \text{до}\ \frac{\alpha_0-\alpha_1 a}{\alpha_1-\alpha_2 a}.$$

Слѣдовательно, неравенства (40) будутъ имѣть мѣсто при всякомъ β_1, удовлетворяющемъ одному изъ неравенствъ (39), въ томъ и только въ томъ случаѣ, когда

$$\left.\begin{aligned}\frac{\alpha_0-\alpha_1 b}{\alpha_1-\alpha_2 b}-a&=\frac{\alpha_2\,\omega\big((x-a)(x-b)\big)}{\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2 b)}>0,\\ \frac{\alpha_0-\alpha_1 a}{\alpha_1-\alpha_2 a}-b&=\frac{\alpha_2\,\omega\big((x-a)(x-b)\big)}{\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2 a)}<0\end{aligned}\right\} \qquad (41).$$

Но изъ (38) слѣдуетъ, что

$$\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2 b)<0,\quad \alpha_2(\alpha_1-\alpha_2 a)>0,$$

такъ какъ числа

$$\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2 b)\ \text{и}\ \alpha_2(\alpha_1-\alpha_2 a)$$

противныхъ знаковъ и разность

$$\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2 b)-\alpha_2(\alpha_1-\alpha_2 a)=-\alpha_2^2(b-a)<0.$$

Поэтому неравенства (41) приведутся къ такому

$$\alpha_2\,\omega\big((x-a)(x-b)\big)<0 \qquad (42).$$

Замѣтимъ, что неравенства (35) и (38) будутъ слѣдствіями неравенствъ (37) и (42).

Всѣ эти разсужденія показываютъ, что равенство (34) имѣетъ мѣсто тогда и только тогда, когда имѣютъ мѣсто неравенства (37) и (42).

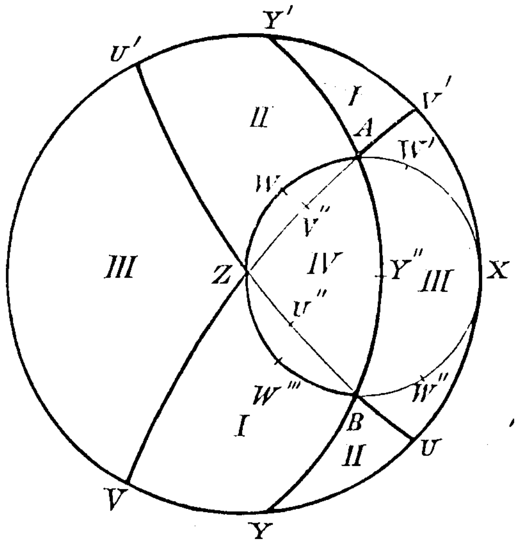
Предположимъ, что

$$a=-1,\ b=1,$$

тогда

$$\omega\left(\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\right)=\alpha_0-\alpha_1,\ \ \omega\big((x-a)(x-b)\big)=\alpha_0-\alpha_2,$$
$$\omega\left((x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right)=\alpha_0+\alpha_1.$$

Возьмемъ какую нибудь прямоугольную систему координатныхъ осей OX, OY, OZ и изъ начала координатъ, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ единицѣ, опишемъ надъ плоскостью XY (т. е. со стороны положительной полуоси OZ отъ нея) полусферу $ZXUYVU'Y'V'$.



Пусть эта полусфера пересѣкается положительной полуосью OZ въ точкѣ Z, положительной полуосью OX въ точкѣ X и положительной полуосью OY въ точкѣ Y.

Пусть далѣе плоскости, уравненія которыхъ

$$Z=0,\quad X-Y=0,\quad X-Z=0,\quad X+Y=0,$$

и конусъ, уравненіе котораго

$$Y^2-XZ=0,$$

пересѣкаютъ нашу полусферу соотвѣтственно по линіямъ

$$XUYVU'Y'V',\quad UBU''ZU',\quad YBY''AY',\quad VZV''AV'\ \text{и}$$
$$ZWAW'XW''BW'''.$$

Пусть наконецъ прямая, соединяющая начало координатъ съ точкой, координаты которой

$$X=\alpha_0,\quad Y=\alpha_1,\quad Z=\alpha_2,$$

пересѣкаетъ ту же полусферу въ точкѣ M.

Полученные нами въ этомъ § результаты при $a=-1$, $b=1$ можно представить въ слѣдующемъ видѣ.

Функціи y заключаются въ формѣ $h_1(x)$, если точка M падаетъ на линію $AWZW'''B$, но не въ точку A или B.

Функціи y заключаются въ формѣ $h_2(x)$, если точка M падаетъ въ одну изъ точекъ A или B.

Функціи y заключаются въ формѣ $h_3(x)$, если точка M падаетъ на линію $BY''A$, но не въ точку A или B.

Функціи y заключаются въ формѣ $h_4(x)$, если точка M падаетъ на линію YB и AY', но не въ точку A или B *).

Если же ни одинъ изъ этихъ случаевъ не имѣетъ мѣста, y равна

$$f_1(x),\quad f_2(x),\quad f_3(x)\ \text{или}\ f_4(x),$$

смотря по тому, падаетъ-ли точка M на площадь

I$^{\text{ую}}$, II$^{\text{ую}}$, III$^{\text{ю}}$ или IV$^{\text{ую}}$,

причемъ границами площадей служатъ только линіи, обозначенныя на чертежѣ толстыми чертами.

Къ случаю $a=-1$, $b=1$, какъ увидимъ далѣе, можно привести случай какихъ угодно a и b.

Дадимъ еще примѣры для случаевъ $n=3$ и $n=4$.

Приэтомъ, какъ и для случая $n=2$, будемъ обозначать чрезъ

$$y=f(x)$$

любую наименѣе уклоняющуюся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функцію вида (1), а чрезъ L ея уклоненіе отъ нуля въ томъ же промежуткѣ.

Примѣръ 1.

$$n=3,\quad \omega(\Phi)=P_0+P_1+P_2,\quad \alpha=-2,\quad a=-\frac{1}{4},\quad b=\frac{5}{4}.$$

Такъ какъ здѣсь

$$\alpha_3=0,$$

*) Чрезъ $h_4(x)$ мы обозначаемъ выраженіе (28).

то по § 4 уравненіе

$$L^2 - y^2 = 0$$

должно имѣть въ промежуткѣ (a, b), по крайней мѣрѣ, два различныхъ корня.

Предположимъ, что оно имѣетъ ихъ ровно два x_1 и $x_2 > x_1$, тогда соотвѣтствующая y функція (6) будетъ

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 + Q_1 x + Q_2$$

и числа

$$Q_1 \text{ и } Q_2$$

должны по § 4 удовлетворять уравненіямъ

$$1 + Q_1 + Q_2 = 0,$$

$$1 + Q_1 = 0.$$

Изъ этихъ уравненій находимъ

$$Q_1 = -1; \quad Q_2 = 0,$$

и, слѣдовательно,

$$F(x) = x^2 - x,$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

Такъ какъ оба найденныя такимъ образомъ числа x_1 и x_2 отличны отъ a и b, то по теоремѣ 2-ой не можетъ получиться болѣе одной функціи y.

Далѣе очевидно, что если наше предположеніе справедливо, то, обозначая чрезъ p'_0 коэффиціентъ при x^3 въ функціи y, мы должны имѣть

$$y' = 3p'_0\, F(x) = 3p'_0\,(x^2 - x),$$

и, слѣдовательно,

$$y = p'_0 \int_0^x (3x^2 - 3x)\, dx + f(0) = p'_0\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2\right) + f(0).$$

Кромѣ того, должно быть

$$f(0) = -f(1) = -p'_0\left(1 - \frac{3}{2}\right) - f(0) = \frac{1}{2}p'_0 - f(0),$$

такъ какъ y' не можетъ обращаться въ нуль между 0 и 1.

Изъ послѣдняго уравненія и уравненія

$$\omega(y) = p'_0\left(1 - \frac{3}{2}\right) = \alpha = -2$$

находимъ

$$p'_0 = 4, \quad f(0) = L = 1.$$

Слѣдовательно, если наше предположеніе имѣетъ мѣсто, то

$$y = 4x^3 - 6x^2 + 1.$$

Такъ какъ

$$(4x^3 - 6x^2 + 1)_{x=-\frac{1}{4}} = \frac{9}{16} < 1,$$

$$\left|(4x^3 - 6x^2 + 1)_{x=\frac{5}{4}}\right| = \frac{9}{16} < 1,$$

то уклоненіе функціи

$$4x^3 - 6x^2 + 1$$

отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) дѣйствительно равно 1 и численное значеніе ея достигаетъ 1 ровно для двухъ значеній x

$$x = 0 \text{ и } x = 1$$

въ этомъ промежуткѣ.

А такъ какъ, кромѣ того, оба числа ряда (8), соотвѣтствующаго функціи

$$4x^3 - 6x^2 + 1,$$

равны -1, то эта функція дѣйствительно наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1).

Примѣръ 2.

$$n = 4,\ \omega(\Phi) = 2P_1 + 2P_3 + P_4,\ \alpha = -6,\ a = -1,\ b = \tfrac{3}{2}.$$

Изъ § 4 слѣдуетъ, что и въ этомъ случаѣ уравненіе

$$L^2 - y^2 = 0 \tag{43}$$

должно имѣть въ промежуткѣ (a, b), по крайней мѣрѣ, два различныхъ корня.

Предположимъ, что оно имѣетъ ихъ ровно два x_1 и $x_2 > x_1$, тогда соотвѣтствующая y функція (6) будетъ

$$F(x) = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 + Q_1 x + Q_2$$

и числа

$$Q_1 \text{ и } Q_2$$

должны удовлетворять уравненіямъ

$$2Q_1 = 0,$$

$$2 + 2Q_2 = 0,$$

$$2Q_1 + Q_2 = 0.$$

Такъ какъ эти уравненія несовмѣстны, то сдѣланное нами предположеніе невозможно.

Предположимъ, что уравненіе (43) имѣетъ въ промежуткѣ (a, b) ровно три различныхъ корня $x_1 = -1$, $x_2 > x_1$ и $x_3 > x_2$, тогда соотвѣтствующая y функція (6) будетъ

$$F(x) = (x+1)(x - x_2)(x - x_3)$$

и числа

$$x_2 \text{ и } x_3$$

должны по § 4 удовлетворять уравненіямъ

$$2(1 - x_2 - x_3) + 2x_2 x_3 = 0,$$

$$2 + 2(x_2 x_3 - x_2 - x_3) + x_2 x_3 = 0.$$

Изъ этихъ уравненій находимъ

$$x_2 + x_3 = 1,\ x_2 x_3 = 0,$$

и, слѣдовательно,

$$x_2 = 0,\ \ x_3 = 1.$$

Такъ какъ оба найденныя такимъ образомъ числа x_2 и x_3 отличны отъ b, то по теоремѣ $2^{\text{ой}}$ не можетъ получиться болѣе одной функціи y.

Далѣе, если наше предположеніе справедливо, то соотвѣтствующія y функціи (7) будутъ

$$F_1(x) = x(x-1) = x^2 - x,\ \ F_2(x) = (x+1)(x-1) = x^2 - 1,$$

$$F_3(x) = (x+1)\,x = x^2 + x,$$

и, слѣдовательно, рядъ (8), соотвѣтствующій функціи y, будетъ

$$2f(-1),\quad -f(0),\quad -2f(1).$$

Отсюда на основаніи теоремы $1^{\text{ой}}$ заключаемъ, что если наше предположеніе справедливо, то

$$f(-1) = -f(0) = -f(1),$$

и, слѣдовательно, y должна имѣть форму

$$y = f(0) + \rho x^2 (x-1)^2,$$

гдѣ ρ нѣкоторое постоянное число.

Изъ уравненій

$$f(-1) = f(0) + 4\rho = -f(0),$$

$$\omega(y) = f(0) - 4\rho = \alpha = -6$$

находимъ

$$\rho = 1,\ \ f(0) = -L = -2.$$

Слѣдовательно, если наше предположеніе имѣетъ мѣсто, то

$$y = -2 + x^2(x-1)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2.$$

Такъ какъ

$$\left|\left\{-2 + x^2(x-1)^2\right\}_{x=\frac{1}{2}}\right| = 2 - \frac{1}{16} < 2,$$

$$\left|\left\{-2 + x^2(x-1)^2\right\}_{x=\frac{3}{2}}\right| = 2 - \frac{9}{16} < 2$$

и производная функціи

$$-2 + x^2(x-1)^2$$

обращается въ нуль только для

$$x = 0,\quad x = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad x = 1,$$

то уклоненіе этой функціи отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) дѣйствительно равно 2 и численное значеніе ея достигаетъ 2 ровно для трехъ значеній x

$$x = -1,\quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = 1$$

въ этомъ промежуткѣ.

А такъ какъ, кромѣ того, всѣ числа ряда (8), соотвѣтствующаго функціи

$$-2 + x^2(x-1)^2,$$

одного знака, то эта функція дѣйствительно наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1).

Приведемъ еще значенія L въ слѣдующихъ двухъ примѣрахъ.

Примѣръ 3.

$$n = 3,\quad \omega(\Phi) = P_1.$$

Отвѣтъ. Если $\dfrac{|a+b|}{b-a} \geqq \dfrac{1}{3}$, то $L = \dfrac{(b-a)^3}{48}\left|\dfrac{\alpha}{(a+b)}\right|$.

Если $\dfrac{|a+b|}{b-a} \leqq \dfrac{1}{9}$, то $L = \dfrac{(b-a)^2 - 9(a+b)^2}{8}$.

Если $-\dfrac{1}{3} \leqq \dfrac{a+b}{b-a} \leqq -\dfrac{1}{9}$, то $L = \dfrac{9b^2}{16}\left|\alpha\right|$.

Если $\dfrac{1}{9} \leqq \dfrac{a+b}{b-a} \leqq \dfrac{1}{3}$, то $L = \dfrac{9a^2}{16}\left|\alpha\right|$.

Примѣръ 4.

$$n = 3,\quad \omega(\Phi) = P_2.$$

Отвѣтъ.

Если $\dfrac{|a+b|}{b-a} \geqq \dfrac{\sqrt{7}+2}{6}$ или $\dfrac{|a+b|}{b-a} \leqq \dfrac{\sqrt{7}-2}{6}$, то $L = \dfrac{(b-a)^3}{6}\left|\dfrac{\alpha}{4(a+b)^2-(b-a)^2}\right|$.

Если $\dfrac{2\sqrt{7}-1}{9} \leqq \dfrac{|a+b|}{b-a} \leqq \dfrac{2\sqrt{7}+1}{9}$, то $L = \dfrac{ab\{(b-a)^2 - 9(a+b)^2\}}{8}\left|\dfrac{\alpha}{(a+b)^3}\right|$.

Если $-\dfrac{\sqrt{7}+2}{6} \leqq \dfrac{a+b}{b-a} \leqq -\dfrac{2\sqrt{7}+1}{9}$, то $L = \dfrac{9b}{7\sqrt{7}-10}\left|\alpha\right|$.

Если $-\dfrac{2\sqrt{7}-1}{9} \leqq \dfrac{a+b}{b-a} \leqq -\dfrac{\sqrt{7}-2}{6}$, то $L = \dfrac{-9a}{7\sqrt{7}+10}\left|\alpha\right|$.

Если $\dfrac{\sqrt{7}-2}{6} \leqq \dfrac{a+b}{b-a} \leqq \dfrac{2\sqrt{7}-1}{9}$, то $L = \dfrac{9b}{7\sqrt{7}+10}\left|\alpha\right|$.

Если $\dfrac{2\sqrt{7}+1}{9} \leqq \dfrac{a+b}{b-a} \leqq \dfrac{\sqrt{7}+2}{6}$, то $L = \dfrac{-9a}{7\sqrt{7}-10}\left|\alpha\right|$ *).

§ 7. Возвратимся къ случаю, когда n какое угодно цѣлое и положительное число, причемъ сохранимъ всѣ обозначенія § 3.

Если

$$\omega(\Phi) = \Phi^{(k)}(z) = \left(\frac{d^k \Phi(x)}{dx^k}\right)_{x=z},$$

гдѣ k цѣлое и положительное число $< n$, а z нѣкоторое данное число, то уравненіе (9) будетъ

$$\frac{d^k F(z)\,\psi(z)}{dz^k} = 0 \qquad (44).$$

Развертывая здѣсь $k^{\text{ую}}$ производную отъ произведенія двухъ функцій по формулѣ Лейбница, получаемъ

$$F^{(k)}(z)\,\psi(z) + \frac{k}{1}F^{(k-1)}(z)\,\psi'(z) + \ldots + F(z)\,\psi^{(k)}(z) = 0 \qquad (45).$$

---

*) Замѣтимъ, что, пользуясь § 12, эти результаты легко вывести изъ результатовъ §§ 29 и 30.

Такъ какъ числа

$$\psi(z),\ \psi'(z), \ldots, \psi^{(n-p)}(z)$$

совершенно произвольны, то уравненіе (45) требуетъ, чтобы при

$$k \leqq n - p$$

было

$$F^{(k)}(z) = F^{(k-1)}(z) = \ldots = F(z) = 0,$$

а при

$$k > n - p$$

было

$$F^{(k)}(z) = F^{(k-1)}(z) = \ldots = F^{(k-n+p)}(z) = 0.$$

Замѣтимъ, что если

$$p < n,\ k > n - p,$$

то въ ряду

$$k,\ k-1, \ldots, k-n+p$$

находятся, по крайней мѣрѣ, два положительныхъ числа, не превосходящихъ p.

Слѣдовательно, если бы при $p < n$ уравненіе (44) имѣло мѣсто, какова бы ни была цѣлая функція $\psi(x)$ степени не выше $n-p^{\text{ой}}$, то, или степень функціи $F(x)$ была бы ниже $p-1^{\text{ой}}$, или уравненіе

$$F(x) = 0$$

имѣло бы мнимые или равные корни.

Поэтому, если

$$\omega(\Phi) = \Phi^{(k)}(z), \quad 0 < k < n,$$

то численное значеніе каждой наименѣе уклоняющейся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціи вида (1) должно достигать своей наибольшей величины въ промежуткѣ (a, b), по крайней мѣрѣ, для n значеній x въ этомъ промежуткѣ.

§ 8. Если

$$\omega(\Phi) = \Phi^n(z) = n!\,P_0\,{}^*),\ p < n+1,$$

то уравненіе (9) при

$$\psi(x) = x^{n-p}$$

приведется къ

$$\frac{d^n F(z)\, z^{n-p}}{dz^n} = n! = 0,$$

что невозможно.

Поэтому, если

$$\omega(\Phi) = \Phi^{(n)}(z),$$

то численное значеніе каждой наименѣе уклоняющейся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціи вида (1) достигаетъ своей наибольшей величины въ промежуткѣ (a, b), по крайней мѣрѣ, для $n+1$ значеній x въ этомъ промежуткѣ.

Тоже можно сказать и о случаѣ, когда

$$\omega(\Phi) = \Phi(z),$$

гдѣ z нѣкоторое данное число, не заключающееся въ промежуткѣ (a, b). (О случаѣ, когда

$$\omega(\Phi) = \Phi(z)$$

и z содержится въ промежуткѣ (a, b), было уже говорено въ § 4).

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ уравненіе (9) будетъ

$$F(z)\,\psi(z) = 0$$

и по произвольности $\psi(z)$ требуетъ, чтобы

$$F(z) = 0.$$

А это невозможно, такъ какъ всѣ корни уравненія

$$F(x) = 0$$

заключаются въ промежуткѣ (a, b).

*) Чрезъ $n!$ мы обозначаемъ произведеніе $1.2\ldots n$.

Изъ теоремы 2ой слѣдуетъ, что въ обоихъ случаяхъ, о которыхъ говорилось въ этомъ §, существуетъ только одна наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1).

§ 9. Изъ того, что сказано въ §§ 7 и 8, и теоремы 2ой слѣдуетъ, что если

$$\omega(\Phi) = \Phi^{(k)}(z), \qquad 0 < k \leqq n,$$

то болѣе одной наименѣе уклоняющейся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціи вида (1) не можетъ получиться при $n \geqq 3$.

Если $n = 1$, то $k = 1 = n$ и изъ § 8 слѣдуетъ, что въ этомъ случаѣ не можетъ получиться болѣе одной наименѣе уклоняющейся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціи вида (1).

Тоже можно сказать и о случаѣ, когда $n = k = 2$.

Далѣе изъ теоремы 2ой слѣдуетъ, что при $n = 2$, $k = 1$ болѣе одной наименѣе уклоняющейся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціи вида (1) не можетъ получиться, если равенство

$$\omega\big((x-a)\,(x-b)\big) = 2z - a - b = 0$$

не имѣетъ мѣста, т. е. если

$$z \text{ не} = \frac{a+b}{2}.$$

Если же $n = 2$, $k = 1$ и $z = \frac{a+b}{2}$, то, какъ мы видѣли въ § 6, дѣйствительно получается безчисленное множество наименѣе уклоняющихся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функцій вида (1).

§ 10. Прежде чѣмъ идти далѣе, докажемъ двѣ слѣдующія весьма простыя леммы алгебры.

Лемма 1. Если уравненіе

$$G(x) = x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_{s-1} x + A_s = 0 \qquad (46),$$

гдѣ s нѣкоторое цѣлое и положительное число, не имѣетъ мнимыхъ корней, то при всякомъ цѣломъ и положительномъ значеніи $k \leqq s$ имѣетъ мѣсто неравенство

$$\left[G^{(k)}(x)\right]^2 - G^{(k-1)}(x)\, G^{(k+1)}(x) > 0$$

для всѣхъ вещественныхъ значеній x, исключая корни уравненія (46) кратности выше k, для которыхъ это неравенство обращается въ равенство.

Доказательство. Лемма очевидна при $k = s$.

Предположимъ, что $k < s$, и обозначимъ чрезъ

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{s-k+1}$$

корни уравненія

$$G^{(k-1)}(x) = 0 \qquad (47),$$

изъ которыхъ ни одинъ не можетъ быть мнимымъ, но между которыми могутъ находиться и равныя числа.

Мы имѣемъ

$$\left[G^{(k)}(x)\right]^2 - G^{(k-1)}(x)\; G^{(k+1)}(x) = -\left[G^{(k-1)}(x)\right]^2 \frac{d\,\dfrac{G^{(k)}(x)}{G^{(k-1)}(x)}}{dx} =$$

$$= -\left[G^{(k-1)}(x)\right]^2 \frac{d^2 \log G^{(k-1)}(x)}{dx^2} =$$

$$= -\left[G^{(k-1)}(x)\right]^2 \sum_{l=1}^{l=s-k+1} \frac{d^2 \log (x-x_l)}{dx^2} = \sum_{l=1}^{l=s-k+1} \left(\frac{G^{(k-1)}(x)}{x-x_l}\right)^2,$$

откуда и слѣдуетъ наша лемма, такъ какъ ни одинъ изъ коэффиціентовъ функціи $G(x)$ не можетъ быть мнимымъ и функціи

$$\frac{G^{(k-1)}(x)}{x-x_1},\ \frac{G^{(k-1)}(x)}{x-x_2}, \ldots,\ \frac{G^{(k-1)}(x)}{x-x_{s-k+1}},$$

число которыхъ не менѣе двухъ, имѣютъ общимъ дѣлителемъ $x - x_l$ только въ томъ случаѣ, когда x_l корень уравненія (47) кратности не ниже двухъ или, что то же, когда x_l корень уравненія (46) кратности выше k.

§ 11. Лемма 2. Пусть всѣ корни уравненія

$$G(x) = x^s + A_1 x^{s-1} + \ldots + A_s = 0 \qquad (48),$$

которые мы обозначимъ чрезъ

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_s$$

вещественные, z корень уравненія

$$G^{(k)}(x) = 0,$$

гдѣ k нѣкоторое цѣлое не отрицательное число $\leqq s$ и

$$G_l(x) = \frac{G(x)}{x - x_l}, \quad l = 1, 2, \ldots, s,$$

тогда въ ряду

$$G_1^{(k)}(z), \ G_2^{(k)}(z), \ldots, \ G_s^{(k)}(z), \ G^{(k+1)}(z) \qquad (49)$$

нѣтъ чиселъ противныхъ знаковъ.

Нули находятся въ этомъ ряду только тогда, когда z корень уравненія (48) кратности выше k. (Если z корень уравненія (48) кратности выше $k+1$, то всѣ числа ряда (49), очевидно, равны нулю).

Доказательство. Лемма очевидна при $k = 0$ и $k = s$.

Предположимъ, что

$$0 < k < s.$$

Если

$$G_l^{(k)}(z) \gtrless 0,$$

то, исключая

$$z - x_l$$

изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} G^{(k)}(z) &= G_l^{(k)}(z)\,(z - x_l) + k\, G_l^{(k-1)}(z) = 0, \\ G^{(k+1)}(z) &= G_l^{(k+1)}(z)\,(z - x_l) + (k+1)\, G_l^{(k)}(z) \end{aligned}\right\} \qquad (50),$$

находимъ

$$G^{(k+1)}(z) = \frac{(k+1)\,[G_l^{(k)}(z)]^2 - k\, G_l^{(k-1)}(z)\, G_l^{(k+1)}(z)}{G_l^{(k)}(z)}.$$

Отсюда, принимая во вниманіе предыдущую лемму, заключаемъ, что если $G_l^{(k)}(z)$ не равно нулю, то это число одного знака съ $G^{(k+1)}(z)$.

Предположимъ, что

$$G_l^{(k)}(z) = 0 \qquad (51),$$

тогда первое изъ уравненій (50) показываетъ, что

$$G_l^{(k-1)}(z) = 0 \qquad (52).$$

А равенства (51) и (52) могутъ имѣть мѣсто заразъ лишь тогда, когда z корень уравненія (48) кратности выше k.

§ 12. Всегда можно предположить, что

$$a = -1, \ b = 1,$$

такъ какъ въ противномъ случаѣ подстановкою

$$x = \frac{b-a}{2}\, t + \frac{a+b}{2} \qquad (53)$$

мы преобразовали бы функціи отъ x вида (1) въ функціи отъ перемѣнной t вида

$$p_0'\, t^n + p_1'\, t^{n-1} + \ldots + p_n',$$

для которыхъ

$$\alpha_0'\, p_0' + \alpha_1'\, p_1' + \ldots + \alpha_n'\, p_n' = \alpha,$$

причемъ числа

$$\alpha_0', \alpha_1', \ldots, \alpha_n'$$

нѣкоторыя линейныя функціи отъ чиселъ

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n.$$

Между прочимъ замѣтимъ, что если функція $\Phi(x)$ подстановкою (53) преобразуется въ функцію $\Psi(t)$, то

$$\Phi^{(k)}(z) = \frac{2^k}{(b-a)^k}\, \Psi^{(k)}(u),$$

гдѣ

$$u = \frac{2z - a - b}{b - a},$$

а

$$P_{n-k} = \frac{\Phi^{(k)}(0)}{k!} = \frac{2^k}{(b-a)^k}\, \frac{\Psi^{(k)}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)}{k!}.$$

Чтобы отъ перемѣнной t перейти обратно къ перемѣнной x, стоитъ только употребить подстановку

$$t = \frac{2x-a-b}{b-a}.$$

Замѣтимъ еще, что при $n=2$

$$\alpha_0' = \frac{4\alpha_0}{(b-a)^2} - \frac{4(a+b)\alpha_1}{(b-a)^2} + \left(\frac{a+b}{b-a}\right)^2 \alpha_2, \quad \alpha_1' = \frac{2\alpha_1}{b-a} - \frac{a+b}{b-a}\alpha_2, \; \alpha_2' = \alpha_2.$$

Основываясь на этомъ §, результаты, полученные нами въ случаѣ $n=2$, при какихъ угодно a и b можно представить въ той же формѣ, какъ и при $a=-1$, $b=1$, только вмѣсто точки, координаты которой равны α_0, α_1 и α_2, слѣдуетъ взять точку, координаты которой равны α'_0, α'_1 и α'_2.

ГЛАВА II.

§ 13. Основываясь на предыдущемъ §, положимъ

$$a=-1, \quad b=1$$

и остановимся на случаѣ, когда

$$\omega(\Phi) = \Phi^{(k)}(z),$$

гдѣ k нѣкоторое цѣлое не отрицательное число $\leq n$.

При этомъ исключимъ уже разсмотрѣнные выше случаи:

1) когда $k=0$ и z содержится въ промежуткѣ (a, b);

2) когда $n=2$, $k=1$, $z=\frac{a+b}{2}=0$.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ существуетъ только одна наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1).

Эту функцію обозначимъ чрезъ

$$y=f(x),$$

ея уклоненіе отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) чрезъ L, а корни уравненія

$$L^2 - y^2 = 0 \tag{54},$$

заключающіеся въ промежуткѣ (a, b) и расположенные въ возрастающемъ порядкѣ, чрезъ

$$x_1, x_2, \ldots, x_p.$$

Такъ какъ при $k > 0$ ни одна изъ функцій вида (1) не можетъ быть постоянной, то изъ предыдущаго слѣдуетъ, что при $k>0$, относительно числа p, можно сдѣлать только два слѣдующія предположенія

$$p = n + 1 \text{ или } p = n.$$

Что же касается случая, когда $k = 0$, то въ этомъ случаѣ, какъ увидимъ,

$$p = n + 1.$$

Если $p = n + 1$, то y должна удовлетворять дифференціальному уравненію

$$L^2 - y^2 = \frac{1-x^2}{n^2} y'^2 \qquad (55),$$

такъ какъ каждый корень уравненія (54), заключающійся въ промежуткѣ (a, b) и отличный отъ a и b, долженъ быть четной кратности.

Изъ уравненія (55) находимъ

$$y = \pm L S_n(x) \qquad (56),$$

гдѣ

$$S_n(x) = \cos n \arccos x.$$

Функція (56) дѣйствительно цѣлая и численное значеніе ея въ промежуткѣ (a, b) достигаетъ своей наибольшей величины L ровно для $n+1$ слѣдующихъ значеній x

$$\theta_1 = -1 = \cos\frac{n}{n}\pi,\ \theta_2 = \cos\frac{n-1}{n}\pi, \ldots, \theta_l = \cos\frac{n-l+1}{n}\pi, \ldots$$

$$\ldots, \theta_n = \cos\frac{1}{n}\pi,\ \theta_{n+1} = 1 = \cos\frac{0}{n}\pi.$$

Такъ какъ y должна быть функціей вида (1), то должно быть

$$\pm L = \frac{\alpha}{S_n^{(k)}(z)}.$$

Итакъ, если $p = n + 1$, то

$$y = \frac{\alpha}{S_n^{(k)}(z)} S_n(x) \qquad (57),$$

$$L = \left|\frac{\alpha}{S_n^{(k)}(z)}\right|.$$

§ 14. Если $k = n$, то изъ предыдущаго слѣдуетъ, что $p = n + 1$, и потому при $k = n$

$$y = \frac{\alpha}{2^{n-1} n!} S_n(x) \qquad (58),$$

$$L = \frac{|\alpha|}{2^{n-1} n!}.$$

Не трудно повѣрить, что въ этомъ случаѣ всѣ члены ряда (8), соотвѣтствующаго функціи (58), одного знака.

Дѣйствительно, этотъ рядъ будетъ

$$n!(-1)^1 \frac{\alpha}{2^{n-1} n!} S_n(\theta_1),\ n!(-1)^2 \frac{\alpha}{2^{n-1} n!} S_n(\theta_2), \ldots$$

$$\ldots, n!(-1)^{n+1} \frac{\alpha}{2^{n-1} n!} S_n(\theta_{n+1}),$$

и такъ какъ

$$S_n(\theta_l) = \cos(n - l + 1)\pi = (-1)^{n-l+1},$$

то всѣ члены его равны

$$(-1)^{n+1} \frac{\alpha}{2^{n-1}}.$$

Отсюда получаемъ слѣдующую теорему Чебышева.

Теорема. Функція

$$\frac{\rho}{2^{n-1}} \cos n \arccos x$$

уклоняется отъ нуля въ промежуткѣ $(-1, 1)$ менѣе чѣмъ всякая другая цѣлая функція отъ x $n^{\text{ой}}$ степени, у которой коэффиціентъ при x^n равенъ ρ.

§ 15. Функціи (6) и (7), соотвѣтствующія функціи (57), будутъ

$$F(x) = \frac{(x^2-1)\, S'_n(x)}{2^{n-1} n},$$

$$F_l(x) = \frac{(x^2-1)\, S'_n(x)}{2^{n-1} n\,(x-\theta_l)},$$

и, слѣдовательно, рядъ (8), соотвѣтствующій функціи (57), по раздѣленіи всѣхъ его членовъ на

$$\frac{(-1)^{n+1} \alpha}{2^{n-1} n\, S_n^{(k)}(z)},$$

будетъ

$$\frac{d^k \dfrac{(z^2-1)\, S'_n(z)}{z-\theta_1}}{dz^k}, \quad \frac{d^k \dfrac{(z^2-1)\, S'_n(z)}{z-\theta_2}}{dz^k}, \ldots, \quad \frac{d^k \dfrac{(z^2-1)\, S'_n(z)}{z-\theta_{n+1}}}{dz^k} \qquad (59).$$

По теоремѣ $1^{\text{ой}}$ равенство (57) имѣетъ мѣсто тогда и только тогда, когда въ ряду (59) нѣтъ чиселъ противныхъ знаковъ.

При $k=0$ рядъ (59) будетъ

$$\frac{(z^2-1)\, S'_n(z)}{z-\theta_1}, \quad \frac{(z^2-1)\, S'_n(z)}{z-\theta_2}, \ldots, \frac{(z^2-1)\, S'_n(z)}{z-\theta_{n+1}} \qquad (60),$$

и такъ какъ при $k=0$, по предположенію, z не содержится въ промежуткѣ (a, b), то всѣ члены ряда (60) одного знака.

Слѣдовательно, если

$$\omega(\Phi) = \Phi(z)$$

и z не содержится въ промежуткѣ (a, b), то

$$y = \frac{\alpha}{S_n(z)} S_n(x),$$

$$L = \left| \frac{\alpha}{S_n(z)} \right|.$$

§ 16. Исключимъ только что разсмотрѣнные случаи $k=0$ и $k=n$, т. е. предположимъ въ дальнѣйшемъ

$$0 < k < n.$$

Обозначимъ чрезъ

$$\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-k-1}$$

корни уравненія

$$S_n^{(k+1)}(x) = 0 \qquad (61),$$

расположенные въ возрастающемъ порядкѣ, а чрезъ $\Phi_n(x)$ функцію

$$\frac{(x^2-1)\, S'_n(x)}{x-\theta_{n+1}} = (x+1)\, S'_n(x).$$

Не трудно убѣдиться, что при $k < n-1$ корни уравненія

$$\Phi_n^{(k)}(x) = (x+1)\, S_n^{(k+1)}(x) + k S_n^{(k)}(x) = 0 \qquad (62)$$

перемежаются съ корнями уравненія (61).

Дѣйствительно, знакъ $\Phi_n^{(k)}(x)$ для достаточно большихъ (численно) отрицательныхъ значеній x одинаковъ со знакомъ

$$(-1)^{n-k},$$

а для $x = \zeta_l$ со знакомъ

$$(-1)^{n-k-l},$$

такъ какъ

$$\Phi_n^{(k)}(\zeta_l) = k S_n^{(k)}(\zeta_l),$$

знакъ $S_n^{(k)}(x)$ для достаточно большихъ (численно) отрицательныхъ значеній x одинаковъ со знакомъ

$$(-1)^{n-k}$$

и уравненіе

$$S_n^{(k)}(x) = 0$$

имѣетъ ровно l корней, меньшихъ ζ_l.

Точно также, обозначая чрезъ $\Psi_n(x)$ функцію

$$\frac{(x^2-1)\,S'_n(x)}{x-\theta_1} = (x-1)\,S'_n(x),$$

найдемъ, что при $k < n-1$ и корни уравненія

$$\Psi_n^{(k)}(x) = (x-1)\,S_n^{(k+1)}(x) + kS_n^{(k)}(x) = 0 \qquad (63)$$

перемежаются съ корнями уравненія (61).

Обозначимъ чрезъ

$$\xi_1,\ \xi_2, \ldots,\ \xi_{n-k} \qquad (64)$$

корни уравненія (62), расположенные въ возрастающемъ порядкѣ, а чрезъ

$$\eta_1,\ \eta_2, \ldots,\ \eta_{n-k} \qquad (65)$$

корни уравненія (63), также расположенные въ возрастающемъ порядкѣ.

По доказанному при $k < n-1$

$$\xi_1 < \zeta_1 < \xi_2 < \zeta_2 < \ldots < \xi_{n-k-1} < \zeta_{n-k-1} < \xi_{n-k},$$

$$\eta_1 < \zeta_1 < \eta_2 < \zeta_2 < \ldots < \eta_{n-k-1} < \zeta_{n-k-1} < \eta_{n-k}.$$

Далѣе замѣтимъ, что

$$\xi_1 < \eta_1,$$

такъ какъ

$$\Phi_n^{(k)}(\eta_1) = 2S_n^{(k+1)}(\eta_1)$$

имѣетъ знакъ, одинаковый со знакомъ

$$(-1)^{n-k-1}.$$

Точно также

$$\eta_{n-k} > \xi_{n-k}.$$

Наконецъ не трудно убѣдиться, что при $k < n-1$ числа (64) и (65) перемежаются между собою.

Дѣйствительно, предполагая, что между двумя послѣдовательными числами (65)

$$\eta_l \text{ и } \eta_{l+1}$$

заключаются два числа (64)

$$\xi_j \text{ и } \xi_{j+1},$$

мы нашли бы, что равенства

$$\Psi_n^{(k)}(\xi_j) = -2S_n^{(k+1)}(\xi_j),$$

$$\Psi_n^{(k)}(\xi_{j+1}) = -2S_n^{(k+1)}(\xi_{j+1}),$$

которыя въ дѣйствительности имѣютъ мѣсто, несовмѣстны, такъ какъ числа

$$S_n^{(k+1)}(\xi_j) \text{ и } S_n^{(k+1)}(\xi_{j+1})$$

противныхъ знаковъ, а числа

$$\Psi_n^{(k)}(\xi_j) \text{ и } \Psi_n^{(k)}(\xi_{j+1}),$$

при нашемъ предположеніи, были бы одного знака.

Поэтому въ каждомъ изъ промежутковъ

$$(\eta_1,\ \eta_2),\ (\eta_2,\ \eta_3), \ldots, (\eta_{n-k-1},\ \eta_{n-k}) \qquad (66)$$

содержится не болѣе одного изъ чиселъ

$$\xi_2,\ \xi_3, \ldots,\ \xi_{n-k},$$

и какъ всѣ эти числа содержатся въ промежуткѣ $(\eta_1,\ \eta_{n-k})$, то въ каждомъ изъ промежутковъ (66) содержится по одному изъ нихъ.

Итакъ

$$\xi_1<\eta_1<\zeta_1<\xi_2<\eta_2<\zeta_2<\ldots<\xi_{n-k-1}<\eta_{n-k-1}<\zeta_{n-k-1}<\xi_{n-k}<\eta_{n-k}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что два крайніе члена ряда (59) не противныхъ знаковъ тогда и только тогда, когда z содержится въ одномъ изъ промежутковъ

$$(-\infty, \xi_1),\ (\eta_1, \xi_2),\ (\eta_2, \xi_3), \ldots, (\eta_{n-k-1}, \xi_{n-k}), (\eta_{n-k}, \infty) \qquad (67).$$

Докажемъ, что если z содержится въ одномъ изъ промежутковъ (67), то въ ряду (59) нѣтъ чиселъ противныхъ знаковъ.

Для этого опредѣлимъ знакъ функціи

$$\frac{d^k (x-1)\,\varphi_l(x)}{dx^k} \qquad (68),$$

гдѣ для краткости положено

$$\frac{(x+1)\,S'_n(x)}{x-\theta_l} = \varphi_l(x), \quad l=2,\ 3,\ldots,n,$$

при $x=\xi_i$.

Мы имѣемъ

$$\left[\frac{d^k (x-1)\,\varphi_l(x)}{dx^k}\right]_{x=\xi_i} = (\xi_i-1)\,\varphi_l^{(k)}(\xi_i)+k\varphi_l^{(k-1)}(\xi_i) = (\theta_l-1)\,\varphi_l^{(k)}(\xi_i),$$

такъ какъ

$$\Phi_n^{(k)}(\xi_i) = \left[\frac{d^k (x-\theta_l)\,\varphi_l(x)}{dx^k}\right]_{x=\xi_i} = (\xi_i-\theta_l)\,\varphi_l^{(k)}(\xi_i)+k\varphi_l^{(k-1)}(\xi_i)=0.$$

Но по леммѣ 2ой

$$\varphi_l^{(k)}(\xi_i)$$

одного знака съ

$$\Phi_n^{(k+1)}(\xi_i),$$

т. е. одного знака съ

$$(-1)^{n-k-i}.$$

Слѣдовательно, знакъ функціи (68) при $x=\xi_i$ одинаковъ со знакомъ

$$(-1)^{n-k-i+1}.$$

Точно также найдемъ, что при $x=\eta_i$ знакъ функціи (68) одинаковъ со знакомъ

$$(-1)^{n-k-i}.$$

А потому уравненіе

$$\frac{d^k (x-1)\,\varphi_l(x)}{dx^k} = 0$$

должно имѣть по одному корню въ каждомъ изъ промежутковъ

$$(\xi_1,\ \eta_1),\ (\xi_2,\ \eta_2),\ldots,\ (\xi_{n-k},\ \eta_{n-k}),$$

внѣ же этихъ промежутковъ функція (68) не обращается въ нуль.

Отсюда слѣдуетъ, что во всемъ промежуткѣ $(\eta_i,\ \xi_{i+1})$ функція (68) имѣетъ знакъ, одинаковый со знакомъ

$$(-1)^{n-k-i},$$

т. е. одинаковый со знакомъ

$$\Phi_n^{(k)}(\eta_i).$$

Также и въ промежуткахъ $(-\infty,\ \xi_1)$ и $(\eta_{n-k},\ \infty)$ знаки функцій $\Phi_n^{(k)}(x)$ и (68) не противные.

Поэтому, если z заключается въ одномъ изъ промежутковъ (67), то въ ряду (59) нѣтъ чиселъ противныхъ знаковъ.

Итакъ равенство (57) имѣетъ мѣсто тогда и только тогда, когда z содержится въ одномъ изъ промежутковъ (67) или, что то же, тогда и только тогда, когда

$$\Phi_n^{(k)}(z)\ \Psi_n^{(k)}(z) \geqq 0.$$

§ 17. Между прочимъ равенство (57) имѣетъ мѣсто, если

$$S_n^{(k+1)}(z)=0.$$

Отсюда, замѣчая, что при

$$k \equiv n \quad (\mathrm{mod.}\ 2)$$

имѣетъ мѣсто равенство

$$S_n^{(k+1)}(0)=0,$$

выводимъ слѣдующую теорему, которая представляетъ, въ нѣкоторомъ смыслѣ, обобщеніе теоремы Чебышева, приведенной въ § 14.

Теорема. Функція

$$\frac{(-1)^{\frac{n-k}{2}}\ \frac{n-k}{2}!\ \rho}{2^{k-1}\,n\left(\frac{n+k}{2}-1\right)\left(\frac{n+k}{2}-2\right)\ldots(k+1)}\cos n \arccos x$$

при всякомъ цѣломъ и положительномъ значеніи $k \leq n$, удовлетворяющемъ сравненію

$$k \equiv n \pmod{2},$$

уклоняется отъ нуля въ промежуткѣ $(-1, 1)$ менѣе чѣмъ всякая другая функція отъ x степени не выше n^{0}, у которой коэффиціентъ при x^k равенъ ρ.

Множитель

$$\frac{(-1)^{\frac{n-k}{2}} \frac{n-k}{2}!}{2^{k-1} n \left(\frac{n+k}{2}-1\right)\left(\frac{n+k}{2}-2\right)\ldots(k+1)}$$

при $k = n - 2$ слѣдуетъ замѣнить на

$$-\frac{1}{2^{n-3} n},$$

а при $k = n$ на

$$\frac{1}{2^{n-1}}.$$

§ 18. Замѣтимъ, что корни уравненія

$$S_n^{(k-1)}(x) = 0 \tag{69}$$

также заключаются въ промежуткахъ (67).

Дѣйствительно, изъ уравненія

$$1 - S_n^2(x) = \frac{(1-x^2) S_n'^2(x)}{n^2}$$

посредствомъ дифференцированія выводимъ уравненіе

$$(x^2-1) S_n''(x) + xS'_n(x) = n^2 S_n(x),$$

а дифференцируя это послѣднее уравненіе $k-1$ разъ, получаемъ уравненіе

$$(x^2-1)S_n^{(k+1)}(x) + (2k-1)\, xS_n^{(k)}(x) = \{n^2-(k-1)^2\}\, S_n^{(k-1)}(x) \tag{70}$$

Изъ уравненія (70) для значеній x, удовлетворяющихъ уравненію (69), находимъ

$$S_n^{(k)}(x) = -\frac{(x^2-1) S_n^{(k+1)}(x)}{(2k-1)x}.$$

Слѣдовательно, для этихъ значеній x

$$\varPhi_n^{(k)}(x) = (x+1)\, S_n^{(k+1)}(x) + kS_n^{(k)}(x) = \frac{S_n^{(k+1)}(x)}{(2k-1)x}(x+1)\{(k-1)x+k\},$$

$$\varPsi_n^{(k)}(x) = (x-1)\, S_n^{(k+1)}(x) + kS_n^{(k)}(x) = \frac{S_n^{(k+1)}(x)}{(2k-1)x}(x-1)\{(k-1)x-k\}.$$

Эти формулы показываютъ, что для значеній x, удовлетворяющихъ уравненію (69)

$$\varPhi_n^{(k)}(x) \text{ и } \varPsi_n^{(k)}(x)$$

одного знака съ

$$\frac{S_n^{(k+1)}(x)}{(2k-1)x},$$

и, слѣдовательно, всѣ корни уравненія (69) заключаются въ промежуткахъ (67).

Такъ какъ наибольшій корень уравненія (69) болѣе ζ_{n-k}, то

$$\frac{S_n^{(k+1)}(x)}{(2k-1)x},$$

а, слѣдовательно, и

$$\varPhi_n^{(k)}(x) \text{ и } \varPsi_n^{(k)}(x)$$

положительны для этого корня, т. е. этотъ корень болѣе η_{n-k}.

Точно также найдемъ, что наименьшій корень уравненія (69) менѣе ξ_1.

Слѣдовательно, всѣ числа (64) и (65) заключаются между наименьшимъ и наибольшимъ корнями уравненія (69).

Между прочимъ при $k = 1$ всѣ числа (64) и (65) заключаются между

$$-\cos\frac{\pi}{2n} \text{ и } \cos\frac{\pi}{2n},$$

а при $k = 2$ всѣ числа (64) и (65) заключаются между

$$-\cos\frac{\pi}{n} \text{ и } \cos\frac{\pi}{n}.$$

Очевидно, что и при $k > 2$ всѣ числа (64) и (65) заключаются между $-\cos\frac{\pi}{n}$ и $\cos\frac{\pi}{n}$.

Слѣдовательно, равенство (57) навѣрно имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, когда

$$\left|z\right| \geqq \cos\frac{\pi}{2n},$$

а также и въ томъ случаѣ, когда

$$k > 1, \left|z\right| > \cos\frac{\pi}{n}.$$

§ 19. Перейдемъ къ разсмотрѣнію предположенія

$$p = n.$$

При этомъ предположеніи функція

$$F(x) = \prod_{l=1}^{l=n} (x - x_l)$$

удовлетворяетъ условію

$$F^{(k)}(z) = 0 \qquad (71)$$

и въ ряду

$$F_1^{(k)}(z)(-1)^1 f(x_1),\ F_2^{(k)}(z)(-1)^2 f(x_2), \ldots, F_n^{(k)}(z)(-1)^n f(x_n) \qquad (72),$$

гдѣ

$$F_l(x) = \frac{F(x)}{x - x_l}$$

нѣтъ чиселъ противныхъ знаковъ.

Основываясь на леммѣ $2^{ой}$, рядъ (72) можно замѣнить рядомъ

$$(-1)^1 f(x_1),\ (-1)^2 f(x_2), \ldots, (-1)^n f(x_n) \qquad (73).$$

Обратно, если численное значеніе нѣкоторой функціи вида (1) $h(x)$ достигаетъ своей наибольшей величины въ промежуткѣ (a, b) ровно для n значеній x

$$\rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_n$$

въ этомъ промежуткѣ,

$$\frac{d^k \prod\limits_{l=1}^{l=n} (z - \rho_l)}{dz^k} = 0$$

и всѣ числа ряда

$$(-1)^1 h(\rho_1),\ (-1)^2 h(\rho_2), \ldots, (-1)^n h(\rho_n)$$

одного знака, то функція $h(x)$ наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1).

§ 20. Относительно чиселъ

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_n \qquad (74),$$

можно сдѣлать четыре различныхъ предположенія.

1) Между числами (74) заключается $a = -1$ и не заключается $b = 1$.
2) Между числами (74) заключается $b = 1$ и не заключается $a = -1$.
3) Между числами (74) заключаются оба числа $a = -1$ и $b = 1$ и степень y равна $n - 1$.
4) Между числами (74) заключаются оба числа $a = -1$ и $b = 1$ и степень y равна n.

Если первое изъ этихъ предположеній имѣетъ мѣсто, то y удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$L^2 - y^2 = \frac{(x+1)(c-x)}{n^2} y'^2 \qquad (75),$$

гдѣ c нѣкоторое постоянное число.

Изъ уравненія (75) находимъ

$$y = \pm L S_n\left(\frac{2x+1-c}{c+1}\right) \qquad (76),$$

причемъ число c должно быть опредѣлено изъ условія (71), а $\pm L$ изъ уравненія

$$\omega(y) = f^{(k)}(z) = \alpha.$$

Численное значеніе найденной такимъ образомъ функціи (76) достигаетъ своей наибольшей величины въ промежуткѣ (a, b) ровно n разъ тогда и только тогда, когда

$$c > 1,\quad \frac{c+1}{2}\cos\frac{\pi}{n} + \frac{c-1}{2} \leqq 1,$$

т. е. тогда и только тогда, когда

$$1 < c \leqq 1 + 2\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{2n}.$$

Если же число c заключается въ только что указанныхъ предѣлахъ, то на основаніи предыдущаго § равенство (76) дѣйствительно имѣетъ мѣсто.

Въ этомъ случаѣ соотвѣтствующая y функція $F(x)$ только численнымъ множителемъ отличается отъ функціи

$$\Phi_n(v) = (v+1)\, S'_n(v),$$

гдѣ

$$v = \frac{2x+1-c}{c+1}.$$

Поэтому, обозначая корни уравненія

$$F^{(k)}(x) = 0,$$

расположенные въ возрастающемъ порядкѣ, чрезъ

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-k},$$

имѣемъ

$$\varepsilon_i = \frac{c+1}{2}\,\xi_i + \frac{c-1}{2}.$$

Когда c возрастаетъ

$$\text{отъ } 1 \text{ до } 1 + 2\,\mathrm{tg}^2\frac{\pi}{2n},$$

ε_i возрастаетъ

$$\text{отъ } \xi_i \text{ до } \lambda_i = \left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{\pi}{2n}\right)\xi_i + \mathrm{tg}^2\frac{\pi}{2n}.$$

Замѣтимъ еще, что при $z = \xi_i$ функція (76) равна функціи (57).

Слѣдовательно, равенство (76) имѣетъ мѣсто тогда и только тогда, когда z заключается въ одномъ изъ промежутковъ

$$(\xi_1, \lambda_1),\ (\xi_2, \lambda_2), \ldots, (\xi_{n-k}, \lambda_{n-k}),$$

или, что то же, тогда и только тогда, когда

$$\Phi_n^{(k)}(z)\ \Phi_n^{(k)}\left(z\cos^2\frac{\pi}{2n} - \sin^2\frac{\pi}{2n}\right) \leqq 0,$$

только при $z = \xi_i$

$$p = n+1,$$

а при $z = \lambda_i$ имѣетъ мѣсто не первое, а четвертое предположеніе этого §.

Если z заключается въ промежуткѣ (ξ_i, λ_i), то условіе (71) даетъ для опредѣленія c уравненіе

$$z = \varepsilon_i = \frac{c+1}{2}\,\xi_i + \frac{c-1}{2},$$

откуда находимъ

$$c = \frac{2z-\xi_i+1}{\xi_i+1}.$$

Слѣдовательно, если z заключается въ промежуткѣ (ξ_i, λ_i), то

$$y = \frac{(1+z)^k\,\alpha}{(1+\xi_i)^k\, S_n^{(k)}(\xi_i)}\, S_n\left(\frac{(1+\xi_i)(x-z)}{1+z} + \xi_i\right),$$

$$L = \frac{(1+z)^k}{(1+\xi_i)^k}\left|\frac{\alpha}{S_n^{(k)}(\xi_i)}\right|.$$

Замѣтимъ, что

$$\lambda_i < \eta_i,$$

такъ какъ иначе при $z = \eta_i$ существовали бы двѣ различныя наименѣе уклоняющіяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціи вида (1), между которыми находилась бы функція, численное значеніе которой достигаетъ своей наибольшей величины въ промежуткѣ (a, b) $n+1$ разъ, а это невозможно.

§ 21. Точно также найдемъ, что второму предположенію соотвѣтствуетъ функція

$$y = \pm LS_n\left(\frac{2x-1-d}{1-d}\right) \qquad (77),$$

причемъ число d должно быть опредѣлено изъ условія (71), а $\pm L$ изъ уравненія

$$\omega(y) = f^{(k)}(z) = \alpha.$$

Равенство (77) имѣетъ мѣсто тогда и только тогда, когда z заключается въ одномъ изъ промежутковъ

$$(\mu_1, \eta_1), \ (\mu_2, \eta_2), \ldots, (\mu_{n-k}, \eta_{n-k}),$$

гдѣ

$$\mu_i = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}\right)\eta_i - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n},$$

или, что то же, тогда и только тогда, когда

$$\Psi_n^{(k)}(z)\,\Psi_n^{(k)}\left(z\cos^2\frac{\pi}{2n} + \sin^2\frac{\pi}{2n}\right) \leqq 0,$$

только при $z = \eta_i$ функція (77), равна функціи (57) и

$$p = n + 1,$$

а при $z = \mu_i$ имѣетъ мѣсто не второе, а четвертое предположеніе этого §.

Притомъ, если z заключается въ промежуткѣ (μ_i, η_i), то

$$y = \frac{(1-z)^k \alpha}{(1-\eta_i)^k S_n^{(k)}(\eta_i)}\, S_n\left(\frac{(1-\eta_i)(x-z)}{1-z} + \eta_i\right),$$

$$L = \frac{(1-z)^k}{(1-\eta_i)^k}\left|\frac{\alpha}{S_n^{(k)}(\eta_i)}\right|.$$

Замѣтимъ, что за исключеніемъ случая, когда

$$n = 2, \ k = 1, \ \lambda_1 = \mu_1 = 0,$$

имѣетъ мѣсто неравенство

$$\lambda_i < \mu_i,$$

такъ какъ иначе значенію $z = \lambda_i$ соотвѣтствовали бы двѣ различныя наименѣе уклоняющіяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціи вида (1), а это невозможно, за исключеніемъ вышеупомянутаго случая.

§ 22. Третье предположеніе даетъ

$$y = \frac{\alpha}{S^{(k)}_{n-1}(z)}\, S_{n-1}(x) \qquad (78),$$

$$L = \left|\frac{\alpha}{S^{(k)}_{n-1}(z)}\right|.$$

Равенство (78), очевидно, имѣетъ мѣсто только при

$$z = \nu_1, \ z = \nu_2, \ldots, z = \nu_{n-k},$$

гдѣ

$$\nu_1, \ \nu_2, \ldots, \nu_{n-k} \qquad (79)$$

корни уравненія

$$\frac{d^k (x^2-1) S'_{n-1}(x)}{dx^k} = 0,$$

расположенные въ возрастающемъ порядкѣ.

§ 23. Замѣчая, что при

$$k \text{ не} \equiv n \pmod{2}$$

одно изъ чиселъ (79) равно нулю, получаемъ слѣдующую теорему.

Теорема. Функція

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1-k}{2}} \frac{n-1-k}{2}!\,\rho}{2^{k-1}(n-1)\left(\frac{n-1+k}{2}-1\right)\left(\frac{n-1+k}{2}-2\right)\ldots(k+1)} \cos(n-1)\arccos x$$

при всякомъ цѣломъ и положительномъ значеніи $k < n$, не удовлетворяющемъ сравненію

$$k \equiv n \pmod{2},$$

уклоняется отъ нуля въ промежуткѣ $(-1, 1)$ менѣе чѣмъ всякая другая цѣлая функція отъ x степени не выше $n^{\text{ой}}$, у которой коэффиціентъ при x^k равенъ ρ.

Множитель

$$\frac{(-1)^{\frac{n-1-k}{2}}\,\frac{n-1-k}{2}!}{2^{k-1}(n-1)\left(\frac{n-1+k}{2}-1\right)\left(\frac{n-1+k}{2}-2\right)\ldots(k+1)}$$

при $k = n - 3$ слѣдуетъ замѣнить на

$$-\frac{1}{2^{n-4}(n-1)},$$

а при $k = n - 1$ на

$$\frac{1}{2^{n-2}}.$$

§ 24. Переходимъ къ разсмотрѣнію четвертаго предположенія.

При этомъ предположеніи уравненіе

$$y' = 0$$

имѣетъ кромѣ

$$x_2,\ x_3, \ldots,\ x_{n-1}$$

еще одинъ корень β.

Этотъ корень долженъ удовлетворять одному изъ неравенствъ

$$\beta \leqq a = -1, \quad \beta \geqq b = 1,$$

такъ какъ иначе въ ряду (73) были бы числа противныхъ знаковъ.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что случай

$$\beta = a = -1$$

имѣетъ мѣсто только при

$$z = \mu_1,\ z = \mu_2, \ldots,\ z = \mu_{n-k},$$

а случай

$$\beta = b = 1$$

только при

$$z = \lambda_1,\ z = \lambda_2, \ldots,\ z = \lambda_{n-k}.$$

Въ обоихъ только что упомянутыхъ случаяхъ наименѣе уклоняющимися отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціями вида (1) будутъ функціи, уже разсмотрѣнныя выше.

Предположимъ, что

$$\beta > b = 1.$$

Въ такомъ случаѣ численное значеніе y, при возрастаніи x отъ $b = 1$ до β, возрастаетъ, а при дальнѣйшемъ возрастаніи x, сначала убываетъ до нуля, а затѣмъ возрастаетъ безпредѣльно.

Вмѣстѣ съ тѣмъ уравненіе

$$L^2 - y^2 = 0 \tag{80}$$

кромѣ $n - 2$ двукратныхъ корней

$$x_2,\ x_3, \ldots,\ x_{n-1} \tag{81}$$

и двухъ простыхъ

$$a = -1, \quad b = 1 \tag{82}$$

имѣетъ еще два корня

$$\gamma > \beta \text{ и } \delta > \gamma.$$

Точно также при

$$\beta < a = -1$$

уравненіе (80) имѣетъ кромѣ чиселъ (81) и (82) еще два корня

$$\gamma < \beta \text{ и } \delta < \gamma.$$

Въ томъ и другомъ случаѣ функція y удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$L^2 - y^2 = \frac{(1-x^2)(x-\gamma)(x-\delta)}{n^2(x-\beta)^2}\,y'^2 \tag{83}.$$

Замѣтимъ, что Золотаревъ въ своей статьѣ „Приложеніе эллиптическихъ функцій къ вопросамъ о функціяхъ наименѣе и наиболѣе отклоняющихся отъ нуля“ выразилъ рѣшеніе уравненія (83) чрезъ эллиптическія функціи, но на этомъ не остановимся.

§ 25. Положимъ

$$\frac{f(x)}{f(-1)} = W(x) = \sum_{l=0}^{l=n} q_l x^{n-l}.$$

Тогда, предполагая, что

$$\beta > 1,$$

для опредѣленія коэффиціентовъ

$$q_0, \ q_1, \ldots, q_n$$

функціи $W(x)$ и чиселъ

$$x_2, \ x_3, \ldots, x_{n-1}, \ \beta, \ \gamma \text{ и } \delta$$

имѣемъ уравненія

$$\left.\begin{array}{ll}
W(-1)=1, & \\
W(\ x_2\ )=(-1)^1, & W'(\ x_2\ )=0, \\
W(\ x_3\ )=(-1)^2, & W'(\ x_3\ )=0; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
W(x_{n-1})=(-1)^{n-2}, & W'(x_{n-1})=0, \\
W(\ 1\ )=(-1)^{n-1}, & W'(\ \beta\ )=0, \\
W(\ \gamma\ )=(-1)^{n-1}, & \\
W(\ \delta\ )=(-1)^n, & F^{(k)}(z)=\left[\dfrac{d^k (x^2-1) \prod\limits_{l=2}^{l=n-1} (x-x_l)}{dx^k}\right]_{x=z}=0
\end{array}\right\} (84).$$

Для того, чтобы четвертое предположеніе имѣло мѣсто и притомъ было

$$\beta > 1,$$

необходимо и достаточно, чтобы уравненія (84) допускали такое рѣшеніе, въ которомъ числа

$$x_2, \ x_3, \ldots, x_{n-1}, \ \beta \qquad (85)$$

вещественныя, конечныя и удовлетворяютъ неравенствамъ

$$-1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < 1 < \beta \qquad (86).$$

Болѣе одного такого рѣшенія уравненія (84) допускать не могутъ, такъ какъ иначе существовало бы болѣе одной наименѣе уклоняющейся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціи вида (1).

Докажемъ, что за исключеніемъ случая, когда

$$n=2, \ k=1, \ \lambda_1 = \nu_1 = \mu_1,$$

имѣютъ мѣсто неравенства

$$\lambda_i < \nu_i < \mu_i$$

и, что если

$$\lambda_i < z < \nu_i,$$

то уравненія (84) допускаютъ такое рѣшеніе, въ которомъ числа (85) вещественныя, конечныя и удовлетворяютъ неравенствамъ (86).

Для этой цѣли замѣтимъ, что при $z = \lambda_i$ уравненія (84) допускаютъ рѣшеніе, въ которомъ

$$\left.\begin{array}{r}
W(x) = (-1)^n \, S_n\left(x \cos^2 \dfrac{\pi}{2n} - \sin^2 \dfrac{\pi}{2n}\right), \\
x_2 = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{2n}\right) \cos \dfrac{n-1}{n}\pi + \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{2n}, \\
x_3 = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{2n}\right) \cos \dfrac{n-2}{n}\pi + \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{2n}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-1} = \left(1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{2n}\right) \cos \dfrac{2}{n}\pi + \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{2n}, \\
\beta = \gamma = 1, \ \delta = 1 + 2 \operatorname{tg}^2 \dfrac{\pi}{2n}
\end{array}\right\} (87),$$

и будемъ подразумѣвать подъ

$$x_2, \ x_3, \ldots, x_{n-1}, \ \beta, \ \gamma, \ \delta \text{ и } W(x) \qquad (88)$$

такія функціи отъ z (послѣдняя также и отъ x), которыя удовлетворяютъ уравненіямъ (84) и при $z = \lambda_i$ имѣютъ значенія (87).

Обозначимъ производныя опредѣленныхъ такимъ образомъ функцій (88) отъ z и $W'(x)$ по z чрезъ

$$\delta x_2, \ \delta x_3, \ldots, \delta x_{n-1}, \ \delta\beta, \ \delta\gamma, \ \delta\delta, \ \delta W(x), \ \delta W'(x).$$

Дифференцируя уравненія (84) по z, получаемъ уравненія

$$\left.\begin{array}{ll}
\delta W(-1)=0, & \\
\delta W(x_2)+W'(x_3)\,\delta x_3=0, & \delta W'(x_2)+W''(x_2)\,\delta x_2=0, \\
\delta W(x_3)+W'(x_3)\,\delta x_3=0, & \delta W'(x_3)+W''(x_3)\,\delta x_3=0, \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
\delta W(x_{n-1})+W'(x_{n-1})\delta x_{n-1}=0, & \delta W'(x_{n-1})+W''(x_{n-1})\delta x_{n-1}=0, \\
\delta W(1)=0, & \\
\delta W(\gamma)+W'(\gamma)\delta\gamma, & \\
 & \delta W'(\beta)+W''(\beta)\,\delta\beta=0, \\
\delta W(\delta)+W'(\delta)\delta\delta, & \\
\multicolumn{2}{l}{F^{(k+1)}(z)-F_2^{(k)}(z)\,\delta x_2-F_3^{(k)}(z)\,\delta x_3-\dots-F_{n-1}^{(k)}(z)\,\delta x_{n-1}=0}
\end{array}\right\}(89).$$

Здѣсь мы полагаемъ,

$$F(x)=(x^2-1)\prod_{l=2}^{l=n-1}(x-x_l),$$

$$F_l(x)=\frac{F(x)}{x-x_l}.$$

Изъ уравненій (89), принимая во вниманіе уравненія (84), находимъ

$$\delta W(-1)=\delta W(x_2)=\delta W(x_3)=\dots=\delta W(x_{n-1})=\delta W(1)=0.$$

Отсюда заключаемъ, что

$$\delta W(x)=AF(x) \qquad (90),$$

гдѣ A число независящее отъ x, и, слѣдовательно,

$$\delta W'(x)=AF'(x) \qquad (91).$$

Подставляя въ уравненія (89) вмѣсто

$$\delta W(\gamma),\ \delta W(\delta),\ \delta W'(x_2),\ \delta W'(x_3),\dots,\ \delta W'(x_{n-1}),\ \delta W'(\beta)$$

ихъ величины, выведенныя изъ уравненій (90) и (91), и опредѣляя изъ полученныхъ такимъ образомъ уравненій

$$\delta x_2,\ \delta x_3,\dots,\ \delta x_{n-1},\ \delta\beta,\ \delta\gamma,\ \delta\delta,$$

находимъ

$$\left.\begin{array}{l}
\delta x_j=-\dfrac{A(x_j^2-1)}{nq_0(x_j-\beta)}, \\
\delta\beta=-\dfrac{AF'(\beta)}{W''(\beta)}, \\
\delta\gamma=-\dfrac{A(\gamma^2-1)}{nq_0(\gamma-\beta)}, \\
\delta\delta=-\dfrac{A(\delta^2-1)}{nq_0(\delta-\beta)}
\end{array}\right\} \qquad (92).$$

А подставляя въ послѣднее изъ уравненій (89) вмѣсто

$$\delta x_2,\ \delta x_3,\dots,\ \delta x_{n-1}$$

ихъ величины (92) и опредѣляя изъ полученнаго такимъ образомъ уравненія A, находимъ

$$A=-\frac{nq_0\,F^{(k+1)}(z)}{\sum\limits_{l=2}^{l=n-1}\dfrac{x_l^2-1}{x_l-\beta}F_l^{(k)}(z)}$$

и затѣмъ

$$\left.\begin{array}{l}
\delta x_j=\dfrac{\dfrac{x_j^2-1}{x_j-\beta}F^{(k+1)}(z)}{\sum\limits_{l=2}^{l=n-1}\dfrac{x_l^2-1}{x_l-\beta}F_l^{(k)}(z)}, \\[2ex]
\delta\beta=\dfrac{nq_0\,F^{(k+1)}(z)\,F'(\beta)}{\sum\limits_{l=2}^{l=n-1}\dfrac{x_l^2-1}{x_l-\beta}F_l^{(k)}(z)\,W''(\beta)}, \\[2ex]
\delta\gamma=\dfrac{\dfrac{\gamma^2-1}{\gamma-\beta}F^{(k+1)}(z)}{\sum\limits_{l=2}^{l=n-1}\dfrac{x_l^2-1}{x_l-\beta}F_l^{(k)}(z)}, \\[2ex]
\delta\delta=\dfrac{\dfrac{\delta^2-1}{\delta-\beta}F^{(k+1)}(z)}{\sum\limits_{l=2}^{l=n-1}\dfrac{x_l^2-1}{x_l-\beta}F_l^{(k)}(z)}
\end{array}\right\} \qquad (93).$$

Замѣтимъ, что для всякаго значенія z, при которомъ значенія функцій

$$x_2, \; x_3, \ldots, x_{n-1}, \; \beta \qquad (94)$$

вещественныя, конечныя и удовлетворяютъ неравенствамъ

$$-1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < 1 \leqq \beta \qquad (95),$$

имѣетъ мѣсто неравенство

$$\frac{q_0 F'(\beta)}{W''(\beta)} = \frac{F'(\beta)}{\frac{W''(\beta)}{q_0}} > 0,$$

такъ какъ коэффиціенты при наивысшихъ степеняхъ x въ функціяхъ

$$F'(x) \text{ и } \frac{W''(x)}{q_0}$$

положительные и уравненія

$$F'(x) = 0 \text{ и } W''(x) = 0$$

при такомъ значеніи z не имѣютъ корней, большихъ или равныхъ β.

Изъ формулъ (93) на основаніи только что сдѣланнаго замѣчанія и леммы 2ой заключаемъ, что

$$x_2, \; x_3, \ldots, x_{n-1}, \; \beta, \; \gamma \text{ и } \delta \qquad (96)$$

будутъ непрерывными и возрастающими функціями отъ z для всякаго значенія z, при которомъ значенія функцій (94) вещественныя, конечныя и удовлетворяютъ неравенствамъ (95).

Такъ какъ равенства

$$x_j = x_{j+1}, \; x_{n-1} = 1$$

не могутъ имѣть мѣста, какъ это видно изъ уравненій (84), то, при непрерывномъ возрастаніи функцій (94), неравенства (95) не могутъ быть нарушены, если они имѣли мѣсто, при началѣ этого возрастанія.

Слѣдовательно, если каждому значенію z, заключающемуся въ промежуткѣ (λ_i, ρ), гдѣ ρ нѣкоторое число, большее λ_i, соотвѣтствуетъ конечное значеніе функціи β, то для $z = \rho$ функціи (96) будутъ вещественными, непрерывными и возрастающими функціями отъ z; кромѣ того, будутъ имѣть мѣсто неравенства (95) и

$$\beta > 1.$$

Предполагая, что каждому значенію z, заключающемуся въ промежуткѣ (λ_i, μ_i), соотвѣтствуетъ конечное значеніе β, мы пришли бы на основаніи только что сказаннаго къ заключенію, что при $z = \mu_i$ наименѣе уклоняющеюся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціей вида (1) будетъ функція, отличная отъ функціи (77), а это невозможно.

Поэтому въ промежуткѣ (λ_i, μ_i) должно заключаться такое, отличное отъ λ_i и μ_i, число ρ_i, что каждому значенію z, заключающемуся въ промежуткѣ (λ_i, ρ_i) и отличному отъ ρ_i, соотвѣтствуетъ конечное значеніе β, а когда z, возрастая, приближается къ предѣлу ρ_i, то β возрастаетъ безпредѣльно.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что, когда z, возрастая, приближается къ предѣлу ρ_i,

$$x_2, \; x_3, \ldots, x_{n-1}$$

приближаются, возрастая, къ нѣкоторымъ конечнымъ предѣламъ.

Слѣдовательно, и коэффиціенты функціи

$$h(x) = \frac{W'(x)}{nq_0(x-\beta)} = \prod_{l=2}^{l=n-1} (x - x_l)$$

приближаются къ конечнымъ предѣламъ, когда z, возрастая, приближается къ предѣлу ρ_i.

Мы имѣемъ далѣе

$$W(x) = nq_0 \int_{-1}^{x} (x - \beta)\, h(x)\, dx + 1 =$$

$$= nq_0 \int_{-1}^{x} x h(x)\, dx - nq_0 \beta \int_{-1}^{x} h(x)\, dx + 1 \qquad (97).$$

Изъ уравненія

$$W(x_2) = nq_0 \int_{-1}^{x_2} xh(x)\,dx - nq_0\beta \int_{-1}^{x_2} h(x)\,dx + 1 = -1$$

находимъ

$$q_0 = \frac{2}{n\beta \int_{-1}^{x_2} h(x)\,dx - n \int_{-1}^{x_2} xh(x)\,dx} \tag{98}$$

и затѣмъ

$$q_0\beta = \frac{2}{n \int_{-1}^{x_2} h(x)\,dx - \frac{n}{\beta} \int_{-1}^{x_2} xh(x)\,dx} \tag{99}.$$

Такъ какъ при

$$\lambda_i < z < \rho_i$$

уравненіе

$$h(x) = 0$$

не имѣетъ корней между -1 и x_2, то изъ формулъ (98) и (99) заключаемъ, что, когда z, возрастая, приближается къ предѣлу ρ_i, то q_0 приближается къ предѣлу, равному нулю, а $q_0\beta$ къ нѣкоторому конечному предѣлу.

Поэтому изъ формулы (97) слѣдуетъ, что $W(x)$ въ то же время приближается, какъ къ предѣлу, къ нѣкоторой цѣлой функціи отъ x $n-1$ой степени равномѣрно для всѣхъ значеній x въ промежуткѣ $(-1,\ 1)$.

А такъ какъ при всякомъ z, удовлетворяющемъ неравенствамъ

$$\lambda_i < z < \rho_i,$$

численное значеніе $W(x)$ достигаетъ своей наибольшей величины, равной 1, въ промежуткѣ $(-1,\ 1)$ ровно n разъ и

$$W(-1) = 1,$$

то

$$\text{пред.}_{z=\rho_i} W(x) = (-1)^{n-1} S_{n-1}(x).$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ, конечно,

$$\text{пред.}_{z=\rho_i}\, x_j = \cos\frac{n-j}{n-1}\pi,$$

$$\text{пред.}_{z=\rho_i} F(x) = (x^2-1)\, S'_{n-1}(x),$$

и, слѣдовательно, ρ_i должно равняться одному изъ чиселъ (79), а какъ число чиселъ (79) равно числу промежутковъ

$$(\lambda_1,\ \mu_1),\ (\lambda_2,\ \mu_2), \ldots, (\lambda_{n-k},\ \mu_{n-k}),$$

то

$$\rho_i = \nu_i.$$

Итакъ дѣйствительно

$$\lambda_i < \nu_i < \mu_i$$

и при

$$\lambda_i < z < \nu_i$$

уравненія (84) допускаютъ такое рѣшеніе, въ которомъ числа (85) вещественныя, конечныя и удовлетворяютъ неравенствамъ (86).

§ 26. Разсужденія предыдущаго § показываютъ, что если

$$\lambda_i < z < \nu_i$$

или, что то же, если

$$\Phi_n^{(k)}\left(z\cos^2\frac{\pi}{2n} - \sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\frac{d^k (z^2-1)\, S'_{n-1}(z)}{dz^k} < 0,$$

то имѣетъ мѣсто четвертое предположеніе § 20 и

$$\beta > 1.$$

Кромѣ того, когда z возрастаетъ отъ λ_i до ν_i, x_j возрастаетъ

$$\text{отъ } \left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n}\right)\cos\frac{n-j+1}{n}\pi + \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n} \text{ до } \cos\frac{n-j}{n-1}\pi,$$

β и γ возрастаютъ

$$\text{отъ } 1 \text{ до } \infty,$$

а δ возрастаетъ

$$\text{отъ } 1 + 2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n} \text{ до } \infty.$$

Здѣсь, какъ и прежде, чрезъ

$$x_1,\ x_2, \ldots, x_n$$

обозначены всѣ корни уравненія (54), заключающіеся въ промежуткѣ (a, b) и расположенные въ возрастающемъ порядкѣ.

Точно также, обозначая чрезъ

$$r_1, \; r_2, \ldots, r_n$$

корни уравненія

$$y = 0,$$

расположенные въ возрастающемъ порядкѣ, найдемъ, что, когда z возрастаетъ отъ λ_i до ν_i, то r_j при $j < n$ возрастаетъ

$$\text{отъ } \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}\right) \cos \frac{2n-2j+1}{2n}\, \pi + \operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{2n} \text{ до } \cos \frac{2n-2j-1}{2(n-1)}\, \pi,$$

а r_n возрастаетъ

$$\text{отъ } \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}\right) \cos \frac{1}{2n}\, \pi + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n} \text{ до } \infty.$$

§ 27. Посредствомъ разсужденій, совершенно подобныхъ приведеннымъ въ § 25, убѣдимся, что если

$$\nu_i < z < \mu_i$$

или, что то же, если

$$\frac{d^k (z^2-1) S'_{n-1}(z)}{dz^k}\, \Psi_n^{(k)}\left(z \cos^2 \frac{\pi}{2n} + \sin^2 \frac{\pi}{2n}\right) < 0,$$

то имѣетъ мѣсто четвертое предположеніе § 20 и

$$\beta < -1.$$

Кромѣ того, когда z возрастаетъ отъ ν_i до μ_i, x_j возрастаетъ

$$\text{отъ } \cos \frac{n-j}{n-1}\, \pi \text{ до } \left(1 + \operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{2n}\right) \cos \frac{n-j}{n}\, \pi - \operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{2n},$$

β и γ возрастаютъ

$$\text{отъ } -\infty \text{ до } -1,$$

δ возрастаетъ

$$\text{отъ } -\infty \text{ до } -1 - 2 \operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{2n},$$

r_1 возрастаетъ

$$\text{отъ } -\infty \text{ до } \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}\right) \cos \frac{2n-1}{2n}\, \pi - \operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{2n}$$

и r_j при $j > 1$ возрастаетъ

$$\text{отъ } \cos \frac{2n-2j+1}{2(n-1)}\, \pi \text{ до } \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}\right) \cos \frac{2n-2j+1}{2n}\, \pi - \operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{2n}.$$

§ 28. Замѣтимъ еще, что для опредѣленія коэффиціентовъ функціи y въ томъ случаѣ, когда имѣетъ мѣсто четвертое предположеніе § 20, можно пользоваться пріемами, указанными А. А. Марковымъ на стр. 15—17 мемуара „Объ одномъ вопросѣ Д. И. Менделѣева“. Только уравненіе, обозначенное въ этомъ мемуарѣ нумеромъ (8), слѣдуетъ замѣнить на уравненіе, обозначенное у насъ нумеромъ (71), которое приведется къ

$$\left[\frac{d^k \dfrac{(x^2-1)\, y'}{x-\beta}}{dx^k}\right]_{x=z} = 0,$$

а коэффиціентъ при x^n въ y и L опредѣлить изъ уравненій

$$\omega(y) = f^{(k)}(z) = \alpha,$$

$$L = |f(1)|.$$

§ 29. Положимъ

$$n > 1, \quad k = n - 1,$$

тогда

$$\Phi_n^{(k)}(x) = 2^{n-1}\, n!\, (nx + 1),$$

$$\Psi_n^{(k)}(x) = 2^{n-1}\, n!\, (nx - 1),$$

$$\frac{d^k (x^2-1) S'_{n-1}(x)}{dx^k} = 2^{n-2}\, n!\, (n-1)\, x,$$

и, слѣдовательно,

$$\xi_1 = -\frac{1}{n}, \quad \eta_1 = \frac{1}{n},$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}, \quad \mu_1 = \frac{1}{n} - \frac{n-1}{n} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n},$$

$$\nu_1 = 0.$$

Здѣсь

$$S_n^{(k)}(z) = 2^{n-1}\, n!\, z,$$

$$S_n^{(k)}(\xi_1) = -2^{n-1}(n-1)!,\quad S_n^{(k)}(\eta_1) = 2^{n-1}(n-1)!,$$

$$S_{n-1}^{(k)}(z) = 2^{n-2}(n-1)!.$$

А потому, если

$$|z| \geqq \frac{1}{n},$$

то

$$y = \frac{\alpha}{2^{n-1}\, n!\, z} S_n(x),$$

$$L = \frac{1}{2^{n-1}\, n!}\left|\frac{\alpha}{z}\right|;$$

если

$$-\frac{1}{n} \leqq z \leqq -\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n},$$

то

$$y = -\left\{\frac{n(1+z)}{n-1}\right\}^{n-1}\frac{\alpha}{2^{n-1}(n-1)!} S_n\left\{\frac{(n-1)(x-z)}{n(1+z)} - \frac{1}{n}\right\},$$

$$L = \left\{\frac{n(1+z)}{n-1}\right\}^{n-1}\frac{|\alpha|}{2^{n-1}(n-1)!};$$

если

$$\frac{1}{n} - \frac{n-1}{n}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n} \leqq z \leqq \frac{1}{n},$$

то

$$y = \left\{\frac{n(1-z)}{n-1}\right\}^{n-1}\frac{\alpha}{2^{n-1}(n-1)!} S_n\left\{\frac{(n-1)(x-z)}{n(1-z)} + \frac{1}{n}\right\},$$

$$L = \left\{\frac{n(1-z)}{n-1}\right\}^{n-1}\frac{|\alpha|}{2^{n-1}(n-1)!};$$

если

$$z = 0 \text{ и } n > 2,$$

то

$$y = \frac{\alpha}{2^{n-2}(n-1)!} S_{n-1}(x),$$

$$L = \frac{|\alpha|}{2^{n-2}(n-1)!};$$

а если

$$z = 0,\quad n = 2$$

то, какъ мы видѣли выше, кромѣ указанной сейчасъ функціи

$$y = \frac{\alpha}{2^{n-2}(n-1)!} S_{n-1}(x) = \alpha x$$

существуетъ еще безчисленное множество другихъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функцій вида (1).

При $n = 2$ кромѣ указанныхъ случаевъ никакихъ другихъ представиться не можетъ.

Составимъ для

$$n = 3 \text{ и } n = 4$$

функцію y и въ томъ случаѣ, когда имѣетъ мѣсто четвертое предположеніе § 20.

Положимъ

$$n = 3,$$

и, слѣдовательно,

$$k = 2.$$

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что въ этомъ случаѣ четвертое предположеніе § 20 имѣетъ мѣсто только тогда, когда

$$0 < |z| \leqq \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6} = \frac{1}{9}.$$

Обозначая чрезъ p_0' коэффиціентъ при x^3 въ искомой функціи, для опредѣленія чиселъ

$$x_2,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \text{ и } p_0'$$

имѣемъ вопервыхъ уравненія

$$y - f(-1) = p_0'(x^2 - 1)(x - \gamma),$$

$$y + f(-1) = p_0'(x - x_2)^2(x - \delta),$$

$$y' = 3p_0'(x - x_2)(x - \beta),$$

изъ которыхъ находимъ

$$\gamma = 2x_2 + \delta,\ \ -1 = x_2^2 + 2x_2\delta,\ \ -2f(-1) = p_0'(x_2^2\delta + \gamma),\ \ -1 = 3x_2\beta$$

и затѣмъ

$$\delta = -\frac{1 + x_2^2}{2x_2}, \quad \gamma = \frac{3x_2^2 - 1}{2x_2}, \quad \beta = -\frac{1}{3x_2}, \quad p_0' = \frac{4x_2 f(-1)}{(1 - x_2^2)^2};$$

вовторыхъ уравненія

$$\left[\frac{d^2 (x^2 - 1)(x - x_2)}{dx^2}\right]_{x=z} = 6z - 2x_2 = 0,$$

$$\omega(y) = f''(z) = \alpha \qquad (100).$$

Слѣдовательно,

$$x_2 = 3z,\ \ \beta = -\frac{1}{9z},\ \ \gamma = \frac{27z^2 - 1}{6z},\ \ \delta = -\frac{1 + 9z^2}{6z},\ \ p_0' = \frac{12zf(-1)}{(1 - 9z^2)^2}$$

и

$$y = f(-1)\left\{\frac{12z}{(1 - 9z^2)^2}(x^2 - 1)\left(x - \frac{27z^2 - 1}{6z}\right) + 1\right\}.$$

А такъ какъ по уравненію (100)

$$f''(z) = f(-1)\,\frac{12z}{(1 - 9z^2)^2}\left(6z - \frac{27z^2 - 1}{3z}\right) = \frac{4f(-1)}{1 - 9z^2} = \alpha,$$

то

$$f(-1) = \pm L = \frac{1 - 9z^2}{4}\alpha,$$

$$y = \frac{\alpha}{2(1 - 9z^2)}(x^2 - 1)(6zx - 27z^2 + 1) + \frac{1 - 9z^2}{4}\alpha.$$

Положимъ теперь

$$n = 4,$$

и, слѣдовательно,

$$k = 3.$$

Въ этомъ случаѣ четвертое предположеніе § 20 имѣетъ мѣсто только тогда, когда

$$0 < |z| \leq \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\,\frac{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2}\sqrt{2} - 2.$$

Для того, чтобы не разсматривать отдѣльно случаевъ

$$\beta > 1 \text{ и } \beta < -1,$$

будемъ предполагать, что

$$\delta > \gamma \text{ и при } \beta < -1,$$

т. е. при $\beta < -1$ будемъ обозначать чрезъ δ то число, которое прежде обозначали чрезъ γ и наоборотъ.

Обозначая чрезъ p_0' коэффиціентъ при x^4 въ искомой функціи, для опредѣленія чиселъ

$$x_2,\ x_3,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \text{ и } p_0'$$

имѣемъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} y - f(-1) &= p_0'(x + 1)(x - x_3)^2(x - \delta),\\ y + f(-1) &= p_0'(x - 1)(x - x_2)^2(x - \gamma),\\ y' &= 4p_0'(x - x_2)(x - x_3)(x - \beta),\\ \left[\frac{d^3 (x^2 - 1)(x - x_2)(x - x_3)}{dx^3}\right]_{x=z} &= 24z - 6(x_2 + x_3) = 0,\\ \omega(y) = f'''(z) &= \alpha \end{aligned}\right\}(101).$$

Первыя три изъ уравненій (101) даютъ

$$y' = p_0'\{2(x + 1)(x - \delta)(x - x_3) + (2x + 1 - \delta)(x - x_3)^2\} =$$

$$= p_0'\{2(x - 1)(x - \gamma)(x - x_2) + (2x - 1 - \gamma)(x - x_2)^2\} =$$

$$= 4p_0'(x - x_2)(x - x_3)(x - \beta),$$

и, слѣдовательно,

$$\left.\begin{aligned} 2(x+1)(x-\delta) + (2x+1-\delta)(x-x_3) &= 4(x-x_2)(x-\beta),\\ 2(x-1)(x-\gamma) + (2x-1-\gamma)(x-x_2) &= 4(x-x_3)(x-\beta) \end{aligned}\right\}(102).$$

Приравнивая коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ x въ обѣихъ частяхъ каждаго изъ уравненій (102), получаемъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} 3(\delta-1)+2x_3 &= 4\beta+4x_2, \\ 3(\gamma+1)+2x_2 &= 4\beta+4x_3, \\ -2\delta+(\delta-1)x_3 &= 4\beta x_2, \\ 2\gamma+(\gamma+1)x_2 &= 4\beta x_3 \end{aligned}\right\} \qquad (103).$$

Изъ первыхъ двухъ уравненій (103) и четвертаго уравненія (101) находимъ

$$x_2 = 2z + \frac{\delta-\gamma-2}{4}, \qquad x_3 = 2z - \frac{\delta-\gamma-2}{4}, \qquad \beta = \frac{3(\delta+\gamma)}{8} - z,$$

а полагая

$$\frac{\delta+\gamma}{4} = u, \qquad \frac{\delta-\gamma-2}{4} = v,$$

имѣемъ

$$\delta=2(u+v)+1,\ \gamma=2(u-v)-1,\ x_2=2z+v,\ x_3=2z-v,\ \beta=\frac{3u}{2}-z \quad (104).$$

Взявъ сумму и разность двухъ послѣднихъ уравненій (103) и подставляя въ полученныя такимъ образомъ уравненія вмѣсто

$$x_2,\ x_3,\ \beta,\ \gamma \text{ и } \delta$$

ихъ величины (104), послѣ нѣкоторыхъ простыхъ преобразованій получаемъ уравненія

$$\left.\begin{aligned} (v+1)^2-4z(z-u) &= 0, \\ (2v+1)u-2zv &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (105).$$

Второе изъ этихъ уравненій даетъ

$$u = \frac{2zv}{2v+1}.$$

Внося эту величину u въ первое изъ уравненій (105), получаемъ уравненіе

$$2(v+1)^3-(v+1)^2 = 4z^2.$$

А полагая

$$\frac{2z}{v+1} = s,$$

найдемъ, что s удовлетворяетъ уравненію

$$s^3+s = 4z \qquad (106).$$

Уравненіе (106) имѣетъ только одинъ вещественный корень

$$\sqrt[3]{2z+\sqrt{4z^2+\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{2z-\sqrt{4z^2+\frac{1}{27}}},$$

каково бы ни было вещественное число z.

Обозначая этотъ корень чрезъ t, имѣемъ

$$v = \frac{2z}{t}-1 = \frac{t^2-1}{2},$$

такъ какъ на основаніи уравненія (106), которому t удовлетворяетъ

$$\frac{2z}{t} = \frac{1+t^2}{2};$$

а

$$u = \frac{2zv}{2v+1} = z-\frac{z}{t^2} = z-\frac{1+4zt+t^2}{16z} = \frac{16z^2-1-4zt-t^2}{16z},$$

такъ какъ

$$16z^3-t^3(1+4zt+t^3) = (4z+t)(4z-t-t^3) = 0.$$

Подставляя эти величины u и v въ формулы (104), получаемъ

$$\left.\begin{aligned} x_2 = 2z-\frac{1-t^2}{2},\ \ x_3 = 2z+\frac{1-t^2}{2},\ \ \beta = \frac{16z^2-3-12zt-3t^2}{32z}, \\ \gamma = \frac{16z^2-1-4zt-(8z+1)t^2}{8z},\ \delta = \frac{16z^2-1-4zt+(8z-1)t^2}{8z} \end{aligned}\right\} (107).$$

А подставляя въ послѣднее изъ уравненій (101) вмѣсто

$$x_2,\ x_3,\ \beta$$

ихъ величины (104), получаемъ уравненіе

$$f'''(z) = 4p_0' \{6z - 2(x_2 + x_3 + \beta)\} = -12p_0'u = \alpha.$$

Отсюда находимъ

$$p_0' = -\frac{\alpha}{12u} = -\frac{t^2\alpha}{12z(t^2-1)} = -\frac{(8z^2+2zt+t^2)\alpha}{24z(4z^2-1)},$$

такъ какъ

$$2(4z^2-1)-(t^2-1)(2+2zt+t^2) = (2z+t)(4z-t-t^3) = 0,$$

и, слѣдовательно,

$$\frac{t^2}{t^2-1} = 1 + \frac{1}{t^2-1} = 1 + \frac{2+2zt+t^2}{2(4z^2-1)} = \frac{8z^2+2zt+t^2}{2(4z^2-1)}.$$

А изъ первыхъ двухъ уравненій (101) выводимъ

$$f(-1) = \pm L = \frac{p_0'(x_2{}^2\gamma + x_3{}^2\delta)}{2} = -\frac{\{(2z+v)^2(2u-2v-1)+(2z-v)^2(2u+2v+1)\}\alpha}{24u} =$$

$$= -\frac{\{4(4z^2+v^2)u - 8zv(2v+1)\}}{24u} = -\frac{\{16z^2+4v^2-4\frac{2zv}{u}(2v+1)\}\alpha}{24} =$$

$$= -\frac{\{16z^2+4v^2-4(2v+1)^2\}\alpha}{24} = -\frac{(16z^2+t^4-2t^2+1-4t^4)\alpha}{24} =$$

$$= -\frac{(16z^2+1-12zt+t^2)\alpha}{24}.$$

Мы имѣемъ далѣе

$$y' = 4p_0'(x-x_2)(x-x_3)(x-\beta) = 4p_0'\{(x-2z)^2-v^2\}\left(x+z-\frac{3u}{2}\right) =$$

$$= 4p_0'\{(x-2z)^2-v^2\}\left\{(x-2z)+3z-\frac{3u}{2}\right\} = 4p_0'(x-2z)^3 +$$

$$+ 4p_0'\left(3z-\frac{3u}{2}\right)(x-2z)^2 - 4p_0'v^2(x-2z) - 4p_0'v^2\left(3z-\frac{3u}{2}\right).$$

Но

$$4\frac{p'}{-\alpha} = \frac{8z^2+2zt+t^2}{6z(4z^2-1)},$$

$$4\frac{p_0'}{-\alpha}\left(3z-\frac{3u}{2}\right) = \frac{z}{u} - \frac{1}{2} = \frac{8z^2+2zt+t^2}{2(4z^2-1)} - \frac{1}{2} = \frac{4z^2+1+2zt+t^2}{2(4z^2-1)},$$

$$4\frac{p_0'}{-\alpha}v^2 = \frac{v^2}{3u} = \frac{2zv}{u}\cdot\frac{v}{6z} = \frac{(2v+1)v}{6z} = \frac{t^2(t^2-1)}{12z} = \frac{t^4-t^2}{12z} = \frac{2zt-t^2}{6z},$$

$$4\frac{p_0'}{-\alpha}v^2\left(3z-\frac{3u}{2}\right) = \frac{zv}{u}v - \frac{v^2}{2} = \frac{(2v+1)v}{2} - \frac{v^2}{2} = \frac{t^4-t^2}{4} - \frac{t^4-2t^2+1}{8} = \frac{4zt-t^2-1}{8},$$

а потому

$$y' = -\alpha\left\{\frac{8z^2+2zt+t^2}{6z(4z^2-1)}(x-2z)^3 + \frac{4z^2+1+2zt+t^2}{2(4z^2-1)}(x-2z)^2 -\right.$$

$$\left. - \frac{2zt-t^2}{6z}(x-2z) + \frac{1-4zt+t^2}{8}\right\},$$

и, слѣдовательно,

$$y = \int_{-1}^{x} y'dx + f(-1) = -\alpha\left\{\frac{8z^2+2zt+t^2}{24z(4z^2-1)}(x-2z)^4 + \frac{4z^2+1+2zt+t^2}{6(4z^2-1)}(x-2z)^3 -\right.$$

$$- \frac{2zt-t^2}{12z}(x-2z)^2 + \frac{1-4zt+t^2}{8}(x-2z) - \frac{8z^2+2zt+t^2}{24z(4z^2-1)}(2z+1)^4 +$$

$$+ \frac{4z^2+1+2zt+t^2}{6(4z^2-1)}(2z+1)^3 + \frac{2zt-t^2}{12z}(2z+1)^2 + \frac{1-4zt+t^2}{8}(2z+1) +$$

$$\left. + \frac{16z^2+1-12zt+t^2}{24}\right\}.$$

§ 30. Положимъ

$$n > 2, \quad k = n-2,$$

тогда

$$\Phi_n^{(k)}(x) = \frac{2^{n-3}n!}{n-1}\{2n(n-1)x^2 + 4(n-1)x - (n-2)\},$$

$$\Psi_n^{(k)}(x) = \frac{2^{n-3}n!}{n-1}\{2n(n-1)x^2 - 4(n-1)x - (n-2)\},$$

$$\frac{d^k(x^2-1)S'_{n-1}(x)}{dx^k} = 2^{n-4}(n-1)!\{2n(n-1)x^2 - (n+1)\}.$$

Слѣдовательно, полагая

$$\sqrt{4(n-1)^2+2n(n-1)(n-2)}=R,$$

имѣемъ

$$\xi_1=-\frac{1}{n}-\frac{R}{2n(n-1)},\quad \xi_2=-\frac{1}{n}+\frac{R}{2n(n-1)},$$

$$\eta_1=\frac{1}{n}-\frac{R}{2n(n-1)},\quad \eta_2=\frac{1}{n}+\frac{R}{2n(n-1)},$$

$$\lambda_1=-\frac{1}{n}-\frac{R}{2n(n-1)}+\left\{\frac{n-1}{n}-\frac{R}{2n(n-1)}\right\}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n},$$

$$\lambda_2=-\frac{1}{n}+\frac{R}{2n(n-1)}+\left\{\frac{n-1}{n}+\frac{R}{2n(n-1)}\right\}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n},$$

$$\mu_1=\frac{1}{n}-\frac{R}{2n(n-1)}-\left\{\frac{n-1}{n}+\frac{R}{2n(n-1)}\right\}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n},$$

$$\mu_2=\frac{1}{n}+\frac{R}{2n(n-1)}-\left\{\frac{n-1}{n}-\frac{R}{2n(n-1)}\right\}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n},$$

$$\nu_1=-\sqrt{\frac{n+1}{2n(n-1)}},\quad \nu_2=\sqrt{\frac{n+1}{2n(n-1)}}.$$

Здѣсь

$$S_n^{(k)}(z)=\frac{2^{n-3}n!}{n-1}\{2(n-1)z^2-1\},$$

$$S_n^{(k)}(\xi_i)=\frac{2^{n-3}n!}{n-1}\{2(n-1)\xi_i^2-1\}=$$

$$=-2^{n-2}(n-2)!\{2(n-1)\xi_i+1\}=\frac{2^{n-2}(n-2)!\{n-2+(-1)^{i+1}R\}}{n},$$

$$S_n^{(k)}(\eta_i)=\frac{2^{n-3}n!}{n-1}\{2(n-1)\eta_i^2-1\}=$$

$$=2^{n-2}(n-2)!\{2(n-1)\eta_i-1\}=\frac{2^{n-2}(n-2)!\{n-2+(-1)^{i}R\}}{n},$$

$$S_{n-1}(\nu_i)=(-1)^i\,2^{n-2}(n-1)!\sqrt{\frac{n+1}{2n(n-1)}}.$$

А потому, если z заключается въ одномъ изъ промежутковъ

$$(-\infty,\ \xi_1),\ (\eta_1,\ \xi_2),\ (\eta_2,\ \infty),$$

то

$$y=\frac{(n-1)\alpha}{2^{n-3}n!\{2(n-1)z^2-1\}}S_n(x),$$

$$L=\frac{n-1}{2^{n-3}n!}\left|\frac{\alpha}{2(n-1)z^2-1}\right|;$$

если z заключается въ промежуткѣ $(\xi_i,\ \lambda_i)$, то

$$y=\left\{\frac{2n(n-1)(1+z)}{2(n-1)^2+(-1)^iR}\right\}^{n-2}\frac{n\alpha}{2^{n-2}(n-2)!\{n-2+(-1)^{i+1}R\}}S_n\left\{\frac{2(n-1)^2+(-1)^iR}{2n(n-1)(1+z)}(x-z)-\frac{1}{n}+\frac{(-1)^iR}{2n(n-1)}\right\},$$

$$L=\left\{\frac{2n(n-1)(1+z)}{2(n-1)^2+(-1)^iR}\right\}^{n-2}\frac{n}{2^{n-2}(n-2)!}\left|\frac{\alpha}{n-2+(-1)^{i+1}R}\right|;$$

если z заключается въ промежуткѣ $(\mu_i,\ \eta_i)$, то

$$y=\left\{\frac{2n(n-1)(1-z)}{2(n-1)^2+(-1)^{i+1}R}\right\}^{n-2}\frac{n\alpha}{2^{n-2}(n-2)!\{n-2+(-1)^{i}R\}}S_n\left\{\frac{2(n-1)^2+(-1)^{i+1}R}{2n(n-1)(1-z)}(x-z)+\frac{1}{n}+\frac{(-1)^iR}{2n(n-1)}\right\},$$

$$L=\left\{\frac{2n(n-1)(1-z)}{2(n-1)^2+(-1)^{i+1}R}\right\}^{n-2}\frac{n}{2^{n-2}(n-2)!}\left|\frac{\alpha}{n-2+(-1)^{i}R}\right|;$$

если

$$z=(-1)^i\sqrt{\frac{n+1}{2n(n-1)}},$$

то

$$y=\frac{(-1)^i\sqrt{\frac{2n(n-1)}{n+1}}\,\alpha}{2^{n-2}(n-1)!}S_{n-1}(x),$$

$$L=\frac{\sqrt{\frac{2n(n-1)}{n+1}}}{2^{n-2}(n-1)!}\,|\alpha|.$$

Составимъ при

$$n=3$$

функцію y и для того случая, когда имѣетъ мѣсто четвертое предположеніе § 20.

Здѣсь

$$\xi_1 = \frac{-2-\sqrt{7}}{6},\ \xi_2 = \frac{-2+\sqrt{7}}{6},\quad \eta_1 = \frac{2-\sqrt{7}}{6},\quad \eta_2 = \frac{2+\sqrt{7}}{6},$$

$$\lambda_1 = \frac{-1-2\sqrt{7}}{9},\quad \lambda_2 = \frac{-1+2\sqrt{7}}{9},\quad \mu_1 = \frac{1-2\sqrt{7}}{9},\quad \mu_2 = \frac{1+2\sqrt{7}}{9},$$

$$\nu_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}},\quad \nu_2 = \sqrt{\frac{1}{3}},$$

а потому четвертое предположеніе § 20 имѣетъ мѣсто только тогда, когда z удовлетворяетъ одному изъ неравенствъ

$$\frac{-1+2\sqrt{7}}{9} \leqq |z| < \sqrt{\frac{1}{3}},\quad \sqrt{\frac{1}{3}} < |z| \leqq \frac{1+2\sqrt{7}}{9}.$$

Обозначая чрезъ p_0' коэффиціентъ при x^3 въ искомой функціи, для опредѣленія чиселъ

$$x_2,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\ \text{и}\ p_0'$$

имѣемъ вопервыхъ уравненія

$$y - f(-1) = p_0'(x^2-1)(x-\gamma),$$

$$y + f(-1) = p_0'(x-x_2)^3(x-\delta),$$

$$y' = 3p_0'(x-x_2)(x-\beta),$$

изъ которыхъ находимъ

$$\delta = -\frac{1+x_2^2}{2x_2},\quad \gamma = \frac{3x_2^2-1}{2x_2},\quad \beta = -\frac{1}{3x_2},\quad f(-1) = \frac{p_0'(1-x_2^2)^2}{4x_2};$$

вовторыхъ уравненія

$$\left[\frac{d\,(x^2-1)(x-x_2)}{dx}\right]_{x=z} = 3z^2 - 2x_2 z - 1 = 0,$$

$$\omega(y) = f'(z) = \alpha \qquad (108).$$

Слѣдовательно,

$$x_2 = \frac{3z^2-1}{2z},\ \beta = -\frac{2z}{3(3z^2-1)},\ \gamma = \frac{3(3z^2-1)^2-4z^2}{4z(3z^2-1)},\ \delta = -\frac{4z^2+(3z^2-1)^2}{4z(3z^2-1)},$$

$$1-x_2 = \frac{-3z^2+2z+1}{2z} = -\frac{(z-1)(3z+1)}{2z},\ 1+x_2 = \frac{3z^2+2z-1}{2z} = \frac{(z+1)(3z-1)}{2z},$$

$$f(-1) = \frac{p_0'(z^2-1)^2(9z^2-1)^2}{32z^3(3z^2-1)}.$$

А такъ какъ по уравненію (108)

$$f'(z) = 3p_0'(z-x_2)(z-\beta) =$$

$$= 3p_0'\left(z - \frac{3z^2-1}{2z}\right)\left(z + \frac{2z}{3(3z^2-1)}\right) = -\frac{p_0'(z^2-1)(9z^2-1)}{2(3z^2-1)} = \alpha,$$

то

$$p_0' = -\frac{2(3z^2-1)\alpha}{(z^2-1)(9z^2-1)},\ f(-1) = \pm L = -\frac{(z^2-1)(9z^2-1)\alpha}{16z^3},\ p_0'\gamma = \frac{\{4z^2-3(3z^2-1)^2\}\alpha}{2z(z^2-1)(9z^2-1)},$$

$$y = p_0'x^3 - p_0'\gamma x^2 - p_0'x + p_0'\gamma + f(-1) =$$

$$= \alpha\left\{-\frac{2(3z^2-1)}{(z^2-1)(9z^2-1)}x^3 - \frac{4z^2-3(3z^2-1)^2}{2z(z^2-1)(9z^2-1)}x^2 + \frac{2(3z^2-1)}{(z^2-1)(9z^2-1)}x + \frac{4z^2-3(3z^2-1)^2}{2z(z^2-1)(9z^2-1)} - \frac{(z^2-1)(9z^2-1)}{16z^3}\right\}.$$

§ 31. Замѣтимъ еще, что въ случаяхъ, когда

$$n = 4,\ k = 1$$

или

$$n = 4,\ k = 2$$

и имѣетъ мѣсто четвертое предположеніе § 20, мы получимъ выраженія чиселъ

$$x_2,\ x_3,\ \beta,\ \gamma\ \text{и}\ \delta\ {}^{*})$$

чрезъ

$$\frac{x_2+x_3}{x_2-x_3+2} = t,$$

замѣняя въ формулахъ (107) z на

$$\frac{t+t^3}{4},$$

---

*) Здѣсь мы опять предполагаемъ, что $\delta > \gamma$ и при $\beta < -1$.

а затѣмъ изъ уравненій

$$\omega(y) = \alpha,$$

$$f(-1) = \frac{p_0'(x_2^2\gamma + x_3^2\delta)}{2}$$

выразимъ чрезъ t коэффиціентъ p_0' при x^4 въ функціи y и $f(-1) = \pm L$.

Какъ при $k=1$, такъ и при $k=2$ число t удовлетворяетъ неравенствамъ

$$1-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}-1 \qquad (109).$$

При $k=1$ число t удовлетворяетъ уравненію

$$\left[\frac{d(x^2-1)(x-x_2)(x-x_3)}{dx^3}\right]_{x=z} = 4z^3 - 3z^2(t+t^3) +$$

$$+ 2z\left\{\left(\frac{t+t^3}{2}\right)^2 - \left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 - 1\right\} + t + t^3 = 0 \qquad (110),$$

а при $k=2$ уравненію

$$\left[\frac{d^2(x^2-1)(x-x_2)(x-x_3)}{dx^3}\right]_{x=z} = 12z^2 - 6z(t+t^3) +$$

$$+ 2\left\{\left(\frac{t+t^3}{2}\right)^2 - \left(\frac{t^2-1}{2}\right)^2 - 1\right\} = 0 \qquad (111).$$

Каково бы ни было значеніе z, ни уравненіе (110), ни уравненіе (111) не можетъ имѣть болѣе одного корня, удовлетворяющаго неравенствамъ (109).

ГЛАВА III.

§ 32. Зная наименѣе уклоняющуюся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функцію вида (1), мы можемъ легко рѣшить слѣдующую задачу.

Задача. **Опредѣлить наибольшую величину, которую можетъ имѣть численное значеніе линейной функціи $\omega(h)$ отъ коэффиціентовъ цѣлой функціи $h(x)$ степени не выше $n^{\text{ой}}$, если уклоненіе функціи $h(x)$ отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) не превосходитъ даннаго положительнаго числа M.**

Рѣшеніе. Пусть y наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1), а L ея уклоненіе отъ нуля въ томъ же промежуткѣ, тогда искомый maximum равенъ

$$\frac{M}{L}|\alpha|$$

и соотвѣтствуетъ функціи

$$h(x) = \frac{M}{L}y.$$

Дѣйствительно, если бы для нѣкоторой цѣлой функціи $g(x)$ степени не выше $n^{\text{ой}}$, уклоненіе N которой отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) не превосходитъ M, было

$$|\omega(g)| > \frac{M}{L}|\alpha|,$$

то уклоненіе отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціи вида (1)

$$\frac{\alpha}{\omega(g)} g(x)$$

было бы

$$\frac{|\alpha|}{|\omega(g)|} N < \frac{LN}{M} \leqq L.$$

Поэтому искомый maximum не можетъ быть болѣе чѣмъ

$$\frac{M}{L} |\alpha|,$$

а этого предѣла $|\omega(h)|$ достигаетъ для функціи

$$h(x) = \frac{M}{L} y,$$

уклоненіе которой отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) равно M.

Очевидно, что и обратно, если наибольшая величина $|\omega(h)|$ соотвѣтствуетъ функціи

$$h(x) = g(x),$$

то функція

$$\frac{\alpha}{\omega(g)} g(x)$$

наименѣе уклоняющаяся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функція вида (1).

Здѣсь, конечно, нѣтъ надобности предполагать, что

$$a = -1, \quad b = 1.$$

§ 33. Основываясь на предыдущемъ §, изъ теоремъ §§ 17 и 23 выводимъ слѣдующую.

Теорема. **Если уклоненіе цѣлой функціи**

$$h(x) = p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n$$

степени не выше $n^{\text{ой}}$ отъ нуля въ промежуткѣ $(-1, 1)$ не превосходитъ M, то

$$|p_0| \leqq 2^{n-1} M, \quad |p_1| \leqq 2^{n-2} M,$$

$$|p_2| \leqq 2^{n-3} nM, \quad |p_3| \leqq 2^{n-4} (n-1) M,$$

а при $i > 1$

$$|p_{2i}| \leqq \frac{2^{n-2i-1} n (n-i-1)(n-i-2)\ldots(n-2i+1) M}{i!},$$

$$|p_{2i+1}| \leqq \frac{2^{n-2i-2} (n-1)(n-i-2)(n-i-3)\ldots(n-2i) M}{i!},$$

и притомъ каждое изъ этихъ неравенствъ дѣйствительно можетъ обращаться въ равенство.

§ 34. Задача. **Опредѣлить наибольшую величину, которую можетъ имѣть уклоненіе отъ нуля въ нѣкоторомъ данномъ промежуткѣ (a, b) $k^{\text{ой}}$ производной $h^{(k)}(x)$ отъ цѣлой функціи $h(x)$ степени не выше $n^{\text{ой}}$, если уклоненіе функціи $h(x)$ отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) не превосходитъ даннаго положительнаго числа M*).**

Рѣшеніе. Предположимъ сначала

$$a = -1, \quad b = 1.$$

Условимся обозначать наибольшую величину, которую можетъ имѣть функція $\Phi(x)$ въ промежуткѣ (a, b) чрезъ

$$\max. \Phi(x).$$

Пусть искомый maximum соотвѣтствуетъ функціи

$$h(x) = y = f(x)$$

и пусть притомъ численное значеніе $y^{(k)}$ достигаетъ этого maximum для значенія

$$x = t,$$

заключающагося въ промежуткѣ (a, b).

Изъ того, что сказано въ § 32, слѣдуетъ, что y должна быть наименѣе уклоняющеюся отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) функціей вида (1), соотвѣтствующей случаю, когда

$$\omega(\Phi) = \Phi^{(k)}(t), \quad \alpha = f^{(k)}(t).$$

---

*) Такъ какъ число, которое мы обозначали въ главѣ II чрезъ L, непрерывная функція отъ z, и, слѣдовательно, въ промежуткѣ $(-1, 1)$ имѣетъ наименьшую величину, то на основаніи §§ 12 и 32, существованіе искомаго maximum'а очевидно. Это, впрочемъ, будетъ слѣдовать и изъ того рѣшенія, которое мы дадимъ.

Слѣдовательно, или

$$y = \pm MS_n(x) \tag{112}$$

или

$$y = \pm MS_{n-1}(x) \tag{113}$$

или

$$y = \pm MS_n\left(\frac{2x+1-c}{c+1}\right) \tag{114}$$

гдѣ c нѣкоторое вещественное число, большее 1, или

$$y = \pm MS_n\left(\frac{2x-1-d}{1-d}\right) \tag{115}$$

гдѣ d нѣкоторое вещественное число, меньшее -1, или наконецъ

$$y = Mu,$$

гдѣ

$$u = g(x)$$

цѣлая функція $n^{\underline{ой}}$ степени, численное значеніе которой достигаетъ своей наибольшей величины въ промежуткѣ (a, b), равной единицѣ, ровно для n значеній x

$$x_1 = a = -1 < x_2 < \ldots < x_n = b = 1$$

въ этомъ промежуткѣ и притомъ такая, что всѣ числа

$$(-1)^1 g(x_1),\ (-1)^2 g(x_2), \ldots, (-1)^n g(x_n)$$

одного знака.

Эта функція u удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$1 - u^2 = \frac{(1-x^2)(x-\gamma)(x-\delta)}{n^2(x-\beta)^2} u'^2 \tag{116}$$

гдѣ независящія отъ x, вещественныя, одного знака числа

$$\beta,\ \gamma \text{ и } \delta$$

удовлетворяютъ неравенствамъ

$$1 < |\beta| < |\gamma| < |\delta| .$$

Такъ какъ при

$$c > 1 \text{ и } -1 \leqq x \leqq 1$$

имѣютъ мѣсто неравенства

$$\frac{2}{c+1} < 1, \quad -1 \leqq \frac{2x+1-c}{c+1} = -1 + \frac{2(x+1)}{c+1} < 1,$$

то при

$$c > 1, \quad -1 \leqq x \leqq 1$$

будетъ

$$\left|\frac{d^k S_n\left(\frac{2x+1-c}{c+1}\right)}{dx^k}\right| = \left(\frac{2}{c+1}\right)^k \left|S_n^{(k)}\left(\frac{2x+1-c}{c+1}\right)\right| < \left|S_n^{(k)}\left(\frac{2x+1-c}{c+1}\right)\right| \leqq \max.\left|S_n^{(k)}(x)\right|,$$

а потому равенство (114) невозможно.

Точно также найдемъ, что и равенство (115) невозможно.

Далѣе не трудно убѣдиться, что, каково бы ни было цѣлое, не отрицательное число $k \leqq n$, равенство

$$|S_n^{(k)}(x)| = \max.|S_n^{(k)}(x)|$$

имѣетъ мѣсто для

$$x = -1 \text{ и } x = 1,$$

и только для этихъ значеній x, если

$$0 < k < n.$$

Дѣйствительно, мы имѣемъ

$$S_1(x) = x, \qquad S_1'(x) = 1,$$

$$S_2(x) = 2x^2 - 1, \quad S_2'(x) = 4x, \qquad S_2''(x) = 4,$$

$$S_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad S_3'(x) = 12x^2 - 3, \quad S_3''(x) = 24x, \quad S_3'''(x) = 24.$$

Слѣдовательно, наше предложеніе имѣетъ мѣсто при

$$n = 1,\ n = 2 \text{ и } n = 3.$$

А изъ равенства

$$\sin m\varphi - \sin(m-2)\varphi = 2\sin\varphi\cos(m-1)\varphi,$$

замѣчая, что

$$S'_m(x) = \frac{m \sin m \arccos x}{\sin \arccos x},$$

выводимъ уравненіе

$$\frac{S'_m(x)}{m} - \frac{S'_{m-2}(x)}{m-2} = 2S_{m-1}(x).$$

Дифференцируя это уравненіе $k-1$ разъ, получаемъ послѣ простыхъ преобразованій уравненіе

$$S_m^{(k)}(x) = \frac{m}{m-2} S_{m-2}^{(k)}(x) + 2m\, S_{m-1}^{(k-1)}(x) \qquad (117).$$

Замѣтимъ, что при

$$m > 3,\ 0 < k < m$$

выполнено, по крайней мѣрѣ, одно изъ условій

$$0 < k < m-2 \text{ или } 0 < k-1 < m-1.$$

Кромѣ того, числа

$$S_{m-2}^{(k)}(1) \text{ и } S_{m-1}^{(k-1)}(1)$$

одного знака. Также и числа

$$S_{m-2}^{(k)}(-1) \text{ и } S_{m-1}^{(k-1)}(-1)$$

одного знака.

Поэтому, предполагая, что наше предложеніе имѣетъ мѣсто для всякаго n, меньшаго m, изъ уравненія (117) заключимъ, что оно будетъ имѣть мѣсто и при $n = m$.

А такъ какъ это предложеніе имѣетъ мѣсто при $n < 4$, то оно доказано вполнѣ.

Принимая же во вниманіе уравненіе

$$(x^2-1)\, S_n^{(k+1)} + (2k-1)\, xS_n^{(k)}(x) = \{n^2-(k-1)^2\}\, S_n^{(k-1)}(x),$$

легко найдемъ, что

$$S_n^{(k)}(1) = \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(k-1)^2\}}{1.3.5\ldots(2k-1)},$$

$$S_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n-k}\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(k-1)^2\}}{1.3.5\ldots(2k-1)}.$$

Слѣдовательно,

$$\max. \mid S_n^{(k)}(x) \mid = \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(k-1)^2\}}{1.3.5\ldots(2k-1)}.$$

Выраженіе

$$\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(k-1)^2\}}{1.3.5\ldots(2k-1)}$$

съ возрастаніемъ n увеличивается.

Поэтому

$$\max. \mid S_{n-1}^{(k)}(x) \mid < \max. \mid S_n^{(k)}(x) \mid,$$

и, слѣдовательно, равенство (113) не можетъ имѣть мѣста.

Прежде чѣмъ идти далѣе, докажемъ слѣдующую лемму алгебры.

Лемма 3. **Пусть A и B положительныя числа, а**

$$a_1, a_2, \ldots, a_s, b_1, b_2, \ldots, b_s$$

вещественныя числа, удовлетворяющія неравенствамъ

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \ldots < b_s < a_s.$$

Положимъ

$$G(x) = A(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_s),$$

$$H(x) = -B(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_s).$$

Если z удовлетворяетъ уравненію

$$G^{(k)}(x) = 0,$$

то

$$\frac{H^{(k)}(z)}{G^{(k+1)}(z)} < 0.$$

Доказательство. Положимъ

$$\frac{G(x)}{x-a_l} = G_l(x).$$

По формулѣ Лагранжа имѣемъ

$$H(x) = \sum_{l=1}^{l=s} \frac{H(a_l)}{G'(a_l)} G_l(x) + CG(x),$$

гдѣ C постоянное число, и, слѣдовательно,

$$H^{(k)}(z) = \sum_{l=1}^{l=s} \frac{H(a_l)}{G'(a_l)} G_l^{(k)}(z).$$

Но знакъ $H(a_l)$ одинаковъ со знакомъ

$$(-1)^{s-l-1},$$

знакъ $G'(a_l)$ одинаковъ со знакомъ

$$(-1)^{s-l},$$

а знакъ $G_l^{(k)}(z)$ по леммѣ 2-ой одинаковъ со знакомъ

$$G^{(k+1)}(z).$$

Слѣдовательно,

$$\frac{H^{(k)}(z)}{G^{(k+1)}(z)} < 0,$$

что и требовалось доказать.

Замѣтимъ мимоходомъ, что изъ дкоазанной леммы слѣдуетъ, что корни уравненій

$$G^{(k)}(x) = 0 \text{ и } H^{(k)}(x) = 0$$

перемежаются между собою.

Возвратимся къ нашей задачѣ и допустимъ, что

$$y = Mu, \ \beta > 1.$$

Въ такомъ случаѣ по § 25 число t должно заключаться въ одномъ изъ промежутковъ

$$(\lambda_1, \nu_1), \ (\lambda_2, \nu_2), \ldots, (\lambda_{n-k}, \nu_{n-k}),$$

а одна изъ функцій

$$u \text{ или } -u$$

должна совпадать съ функціей отъ x, къ которой приводится опредѣленная въ § 25 функція

$$W(x)$$

отъ x и z при

$$z = t.$$

Обратимся поэтому къ разсмотрѣнію этой функціи $W(x)$, причемъ сохранимъ всѣ обозначенія § 25.

Кромѣ того, каковы бы ни были цѣлыя и положительныя числа l и s, производную по z отъ

$$W^{(l)}(x) = \frac{d^l W(x)}{dx^l}$$

(взятую въ предположеніи, что x не зависитъ отъ z) обозначимъ чрезъ

$$\delta W^{(l)}(x),$$

а производную порядка s по z отъ

$$W^{(l)}(z) = \left[\frac{d^l W(x)}{dx^l}\right]_{x=z}$$

(причемъ принимается во вниманіе, что коэффиціенты функціи $W(x)$ зависятъ отъ z) обозначимъ, какъ обыкновенно, чрезъ

$$\frac{d^s W^{(l)}(z)}{dz^s}.$$

Вспомнимъ, что по доказанному въ § 25

$$\text{пред.}_{z=\nu_i} W(x) = (-1)^{n-1} S_{n-1}(x),$$

и на этомъ основаніи при

$$z = \nu_i$$

положимъ

$$W(x) = (-1)^{n-1} S_{n-1}(x).$$

Такъ какъ производная

$$\frac{dW^{(k)}(z)}{dz} = \delta W^{(k)}(z) + W^{(k+1)}(z) = AF^{(k)}(z) + W^{(k+1)}(z) = W^{(k+1)}(z)$$

непрерывная функція отъ z для всякаго значенія z, заключающагося въ промежуткѣ (λ_i, ν_i), то наибольшая величина, которую получаетъ

$$|W^{(k)}(z)|,$$

когда z измѣняется въ промежуткѣ (λ_i, ν_i), соотвѣтствуетъ или значенію

$$z = \lambda_i,$$

или значенію

$$z = \nu_i,$$

или такому, отличному отъ λ_i и ν_i, значенію z, для котораго

$$W^{(k+1)}(z) = 0.$$

Мы покажемъ, что въ послѣднемъ случаѣ

$$|W^{(k)}(z)|$$

получаетъ не наибольшую, а наименьшую величину въ промежуткѣ (λ_i, ν_i).

Итакъ предположимъ, что z отлично отъ λ_i и ν_i и что

$$W^{(k+1)}(z) = 0.$$

Такъ какъ при $k = n-1$ равенство

$$W^{(k+1)}(z) = n!\, q_0 = 0$$

имѣетъ мѣсто только при $z = \nu_1 = 0$, то при нашемъ предположеніи

$$k < n-1.$$

Мы имѣемъ

$$\frac{d^2 W^{(k)}(z)}{dz^2} = \frac{d W^{(k+1)}}{dz} = \delta W^{(k+1)}(z) + W^{(k+2)}(z) = AF^{(k+1)}(z) + W^{(k+2)}(z).$$

Здѣсь

$$A = -\frac{nq_0 F^{(k+1)}(z)}{\sum\limits_{l=2}^{l=n-1} \frac{x_l^2-1}{x_l-\beta} F_l^{(k)}(z)} = -\frac{nq_0 F^{(k+1)}(z)}{\sum\limits_{l=1}^{l=n} \frac{x_l^2-1}{x_l-\beta} F_l^{(k)}(z)} = -\frac{nq_0 F^{(k+1)}(z)}{\varphi^{(k)}(z)},$$

причемъ мы полагаемъ

$$x_1 = -1, \quad x_n = 1,$$

$$F_1(x) = \frac{F(x)}{x-x_1}, \quad F_n(x) = \frac{F(x)}{x-x_n},$$

$$\varphi(x) = \sum_{l=1}^{l=n} \frac{x_l^2-1}{x_l-\beta} F_l(x) = \sum_{l=1}^{l=n} (x_l+\beta) F_l(x) + (\beta^3-1) \sum_{l=1}^{l=n} \frac{F_l(x)}{x_l-\beta} =$$

$$= -\sum_{l=1}^{l=n} (x-x_l) F_l(x) + (x+\beta) \sum_{l=1}^{l=n} F_l(x) + (\beta^2-1) \sum_{l=1}^{l=n} \frac{F_l(x)}{x_l-\beta} =$$

$$= -nF(x) + (x+\beta) F'(x) + (\beta^2-1) \sum_{l=1}^{l=n} \frac{F_l(x)}{x_l-\beta}.$$

Положимъ еще

$$\sum_{l=1}^{l=n} \frac{F_l(x)}{x_l-\beta} = \psi(x),$$

а

$$(x-\beta)\,\psi(x) = \chi(x).$$

Такъ какъ

$$\chi(x_l) = (x_l-\beta)\,\psi(x_l) = F_l(x_l) = F'(x_l),$$

$$\chi(\beta) = 0,$$

то

$$\chi(x) = (x-\beta)\,\psi(x) = F'(x) - \frac{F'(\beta)}{F(\beta)} F(x),$$

$$\chi^{(k)}(z) = (z-\beta)\,\psi^{(k)}(z) + k\psi^{(k-1)}(z) = F^{(k+1)}(z) - \frac{F'(\beta)}{F(\beta)} F^{(k)}(z) = F^{(k+1)}(z),$$

$$\psi^{(k)}(z) = \frac{F^{(k+1)}(z) - k\psi^{(k-1)}(z)}{z-\beta},$$

и, слѣдовательно,

$$\varphi^{(k)}(z) = (z+\beta)\, F^{(k+1)}(z) + (\beta^3-1)\frac{F^{(k+1)}(z) - k\psi^{(k-1)}(z)}{z-\beta} =$$

$$= \frac{z^2-1}{z-\beta} F^{(k+1)}(z) - \frac{k(\beta^2-1)}{z-\beta}\, \psi^{(k-1)}(z).$$

Мы имѣемъ далѣе

$$nq_0(x-\beta)\,F(x)=(x^2-1)\,W'(x).$$

Дифференцируя это уравненіе $k+1$ разъ, полагая въ полученномъ такимъ образомъ уравненіи

$$x=z$$

и принимая во вниманіе, что

$$F^{(k)}(z)=0,\quad W^{(k+1)}(z)=0,$$

получаемъ уравненіе

$$nq_0(z-\beta)\,F^{(k+1)}(z)=(z^2-1)\,W^{(k+2)}(z)+(k+1)\,kW^{(k)}(z),$$

изъ котораго находимъ

$$nq_0\,F^{(k+1)}(z)=\frac{z^2-1}{z-\beta}\,W^{(k+2)}(z)+\frac{(k+1)\,k}{z-\beta}\,W^{(k)}(z).$$

Слѣдовательно,

$$AF^{(k+1)}(z)=-\frac{nq_0\,F^{(k+1)}(z)}{\dfrac{\varphi^{(k)}(z)}{F^{(k+1)}(z)}}=-\frac{\dfrac{z^2-1}{z-\beta}\,W^{(k+2)}(z)+\dfrac{(k+1)\,k}{z-\beta}\,W^{(k)}(z)}{\dfrac{z^2-1}{z-\beta}-\dfrac{k(\beta^2-1)}{z-\beta}\,\dfrac{\psi^{(k-1)}(z)}{F^{(k+1)}(z)}}$$

и

$$\frac{d^2\,W^{(k)}(z)}{dz^2}=AF^{(k+1)}(z)+W^{(k+2)}(z)=$$

$$=-\frac{\dfrac{z^2-1}{z-\beta}\,W^{(k+2)}(z)+\dfrac{(k+1)\,k}{z-\beta}\,W^{(k)}(z)}{\dfrac{z^2-1}{z-\beta}-\dfrac{k(\beta^2-1)}{z-\beta}\,\dfrac{\psi^{(k-1)}(z)}{F^{(k+1)}(z)}}+W^{(k+2)}(z)=$$

$$=\frac{kW^{(k)}(z)}{\beta-z}\,\frac{k+1+(\beta^2-1)\,\dfrac{\psi^{(k-1)}(z)}{F^{(k+1)}(z)}\,\dfrac{W^{(k+2)}(z)}{W^{(k)}(z)}}{\dfrac{z^2-1}{z-\beta}-\dfrac{k(\beta^2-1)}{z-\beta}\,\dfrac{\psi^{(k-1)}(z)}{F^{(k+1)}(z)}}\qquad(118).$$

Такъ какъ

$$\beta>1,\ \ x_l^2\leqq 1,$$

то на основаніи леммы $2^{\text{ой}}$

$$\frac{z^2-1}{z-\beta}-\frac{k(\beta^2-1)}{z-\beta}\,\frac{\psi^{(k-1)}(z)}{F^{(k+1)}(z)}=\frac{\varphi^{(k)}(z)}{F^{(k+1)}(z)}=\frac{\displaystyle\sum_{l=1}^{l=n}\frac{x_l^2-1}{x_l-\beta}\,F_l^{(k)}(z)}{F^{(k+1)}(z)}>0.$$

Принимая же во вниманіе, что уравненіе

$$W'(x)=0$$

не имѣетъ ни мнимыхъ, ни равныхъ корней и что

$$W^{(k+1)}(z)=0,$$

на основаніи леммы $1^{\text{ой}}$ заключаемъ, что

$$\frac{W^{(k+2)}(z)}{W^{(k)}(z)}<0.$$

Обозначимъ чрезъ

$$a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{n-1}$$

корни уравненія

$$F'(x)=0,$$

расположенные въ возрастающемъ порядкѣ, а чрезъ

$$b_1,\ b_2,\ldots,\ b_{n-1}$$

корни уравненія

$$\psi(x)=0,$$

также расположенные въ возрастающемъ порядкѣ.

Изъ равенства

$$(x-\beta)\,\psi(x)=F'(x)-\frac{F'(\beta)}{F(\beta)}\,F(x)$$

заключаемъ, что коэффиціентъ при x^{n-1} въ функціи $\psi(x)$ отрицательный, что знакъ $\psi(x)$ при достаточно большомъ (численно) отрицательномъ значеніи x одинаковъ со знакомъ

$$(-1)^n$$

и что знакъ

$$\psi(a_l)=\frac{F'(\beta)}{F(\beta)}\,\frac{F(a_l)}{\beta-a_l}$$

одинаковъ со знакомъ

$$(-1)^{n-l}.$$

Слѣдовательно,

$$b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < \ldots < b_{n-1} < a_{n-1}$$

и, такъ какъ

$$\left[\frac{d^{k-1}F'(x)}{dx^{k-1}}\right]_{x=z} = F^{(k)}(z) = 0,$$

то на основаніи леммы $3^{\underline{\text{ьей}}}$

$$\frac{\psi^{(k-1)}(z)}{F^{(k+1)}(z)} < 0.$$

Принимая во вниманіе всѣ эти замѣчанія, изъ формулы (118) заключаемъ, что

$$\frac{d^2 W^{(k)}(z)}{dz^2}$$

одного знака съ $W^{(k)}(z)$, а потому въ разсматриваемомъ случаѣ $|W^{(k)}(z)|$ получаетъ не наибольшую, а наименьшую величину въ промежуткѣ (λ_i, ν_i).

Итакъ наибольшая величина, которую получаетъ $|W^{(k)}(z)|$, когда z измѣняется въ промежуткѣ (λ_i, ν_i), соотвѣтствуетъ одному изъ значеній

$$z = \lambda_i \text{ или } z = \nu_i.$$

Но при $z = \lambda_i$

$$|W^{(k)}(z)| = \cos^{2k}\frac{\pi}{2n}\left|S_n^{(k)}\left(\lambda_i\cos^2\frac{\pi}{2n} - \sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\right| =$$

$$= \cos^{2k}\frac{\pi}{2n}|S_n^{(k)}(\xi_i)| < \max.|S_n^{(k)}(x)|,$$

а при $z = \nu_i$

$$|W^{(k)}(z)| = |S_{n-1}^{(k)}(\nu_i)| < \max.|S_n^{(k)}(x)|.$$

Поэтому предположеніе

$$y = Mu, \ \beta > 1$$

невозможно.

Точно также найдемъ, что и предположеніе

$$y = Mu, \ \beta < -1$$

невозможно.

Итакъ, если

$$a = -1, \ b = 1, \ k \leqq n-1,$$

то искомый maximum равенъ

$$\frac{n^2(n^2-1)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(k-1)^2\}\,M}{1.3.5\ldots(2k-1)},$$

$$y = \pm MS_n(x),$$

$$t = \pm 1.$$

Что же касается до случая

$$a = -1, \ b = 1, \ k = n,$$

то изъ теоремы § 33 слѣдуетъ, что въ этомъ случаѣ искомый maximum равенъ

$$2^{n-1}n! = \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(n-1)^2\}\,M}{1.3.5\ldots(2n-1)},$$

$$y = \pm MS_n(x),$$

а t какое угодно число, заключающееся въ промежуткѣ (a, b).

Переходя, какъ показано въ § 12, отъ случая

$$a = -1, \ b = 1,$$

къ случаю какихъ угодно a и b, получаемъ слѣдующую теорему, которая и представляетъ отвѣтъ на поставленный въ этомъ § вопросъ.

Теорема. **Если уклоненіе цѣлой функціи $h(x)$ степени не выше $n^{\underline{\text{ой}}}$ отъ нуля въ промежуткѣ (a, b) не превосходитъ даннаго положительнаго числа M, то, каково бы ни было цѣлое и положительное число $k \leqq n$, уклоненіе $k^{\underline{\text{ой}}}$ ея производной $h^{(k)}(x)$ отъ нуля въ томъ же промежуткѣ не превосходитъ**

$$\frac{2^k n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(k-1)^2\}\,M}{1.3.5\ldots(2k-1)(b-a)^k},$$

а этого предѣла достигаетъ для каждой изъ функцій

$$h(x) = MS_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right) \text{ и } h(x) = -MS_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$$

и только для этихъ функцій.

Замѣтимъ, что для случая $k=1$ эта теорема доказана А. А. Марковымъ въ мемуарѣ „Объ одномъ вопросѣ Д. И. Менделѣева".

§ 35. Сохранимъ всѣ обозначенія § 25, а также и тѣ, которыя мы ввели въ концѣ предыдущаго §.

Изъ разсужденій предыдущаго § слѣдуетъ, что въ промежуткѣ (λ_i, ν_i) не можетъ заключаться болѣе одного, отличнаго отъ λ_i и ν_i, значенія z такого, что

$$W^{(k+1)}(z)=0.$$

Докажемъ, что если

$$\nu_i \geqq 0, \text{ т. е. } i \geqq \frac{n-k+1}{2},$$

то въ промежуткѣ (λ_i, ν_i) заключается одно и только одно число σ_i такое, что

$$\left[W^{(k+1)}(z)\right]_{z=\sigma_i}=0,$$

а если

$$\nu_i<0, \text{ т. е. } i<\frac{n-k+1}{2},$$

то функція отъ z

$$W^{(k+1)}(z)$$

не обращается въ нуль въ промежуткѣ (λ_i, ν_i).

Для этой цѣли замѣтимъ, что функція отъ z

$$W^{(k)}(z),$$

очевидно, не обращается въ нуль въ промежуткѣ (λ_i, ν_i).

При $z=\lambda_i$

$$W^{(k)}(z)=(-1)^n \cos^{2k}\frac{\pi}{2n} S_n{}^{(k)}(\xi_i),$$

$$W^{(k+1)}(z)=(-1)^n \cos^{2(k+1)}\frac{\pi}{2n} S_n{}^{(k+1)}(\xi_i)=$$

$$=\frac{(-1)^{n+1} k \cos^{2(k+1)}\frac{\pi}{2n}}{1+\xi_i} S_n{}^{(k)}(\xi_i)=-\frac{\cos^2\frac{\pi}{2n}}{1+\xi_i} W^{(k)}(z).$$

Слѣдовательно, при $z=\lambda_i$

$$W^{(k)}(z) \text{ и } W^{(k+1)}(z)$$

имѣютъ противные знаки.

При $z=\nu_i$

$$W^{(k)}(z)=(-1)^{n-1} S_{n-1}^{(k)}(\nu_i), \quad W^{(k+1)}(z)=(-1)^{n-1} S_{n-1}^{(k+1)}(\nu_i).$$

Изъ уравненій

$$\left[\frac{d^k (x^2-1) S'_{n-1}(x)}{dx^k}\right]_{x=\nu_i}=(\nu_i{}^2-1) S_{n-1}^{(k+1)}(\nu_i)+2k\nu_i S_{n-1}^{(k)}(\nu_i)+$$

$$+k(k-1) S_{n-1}^{(k-1)}(\nu_i)=0$$

и

$$(\nu_i{}^2-1) S_{n-1}^{(k+1)}(\nu_i)+(2k-1)\nu_i S_{n-1}^{(k)}(\nu_i)-\left\{(n-1)^2-(k-1)^2\right\} S_{n-1}^{(k-1)}(\nu_i)=0$$

легко видѣть, что числа

$$S_{n-1}^{(k)}(\nu_i) \text{ и } S_{n-1}^{(k+1)}(\nu_i),$$

а, слѣдовательно, и числа

$$\left[W^{(k)}(z)\right]_{z=\nu_i} \text{ и } \left[W^{(k+1)}(z)\right]_{z=\nu_i}$$

одного знака, если

$$\nu_i>0,$$

и противныхъ знаковъ, если

$$\nu_i<0.$$

Итакъ для случая, когда ν_i не $=0$, наше замѣчаніе доказано и притомъ σ_i отлично отъ λ_i и ν_i.

Предположимъ, что

$$\nu_i=0,$$

т. е. предположимъ, что $n-k$ число нечетное и что

$$i=\frac{n-k+1}{2}.$$

Тогда

$$\left[W^{(k+1)}(z)\right]_{z=\nu_i} = (-1)^{n-1}\, S_{n-1}^{(k+1)}(\nu_i) = 0$$

и, принимая во вниманіе вопервыхъ, что

$$\frac{d^2 W^{(k)}(z)}{dz^2} = AF^{(k+1)}(z) + W^{(k+2)}(z),$$

вовторыхъ, что

$$\text{пред.}_{z=\nu_i} A = \text{пред.}_{z=\nu_i} \frac{-nq_0 F^{(k+1)}(z)}{\sum\limits_{l=1}^{l=n} \frac{x_l^2-1}{x_l-\beta} F_l^{(k)}(z)} = \text{пред.}_{z=\nu_i} \frac{nq_0 \beta F^{(k+1)}(z)}{\sum\limits_{l=1}^{l=n} (x_l^2-1) F_l^{(k)}(z)} =$$

$$= \text{пред.}_{z=\nu_i} \frac{nq_0\beta}{z^2-1-(n-k+1)k \frac{F^{(k-1)}(z)}{F^{(k+1)}(z)}} = \text{пред.}_{z=\nu_i} \frac{-nq_0\beta}{1+(n-k+1)k\frac{F^{(k-1)}(z)}{F^{(k+1)}(z)}},$$

такъ какъ

$$\nu_i = 0$$

и

$$\sum_{l=1}^{l=n} (x_l^2-1)\, F_l(x) = (x^2-1)\, F'(x) - (nx+\rho)\, F(x),$$

гдѣ ρ нѣкоторое постоянное число, и втретьихъ, что

$$\text{пред.}_{z=\nu_i} -nq_0 \beta F(x) = \text{пред.}_{z=\nu_i} (x^2-1)\, W'(x),$$

легко найдемъ, что

$$\text{пред.}_{z=\nu_i} \frac{d^2 W^{(k)}(z)}{dz^2} = \text{пред.}_{z=\nu_i} W^{(k)}(z) \frac{(k+1)k+(n-k+1)k\frac{F^{(k-1)}(z)}{F^{(k+1)}(z)}\frac{W^{(k+2)}(z)}{W^{(k)}(z)}}{\sum\limits_{l=1}^{l=n} (1-x_l^2)\frac{F_l^{(k)}(z)}{F^{(k+1)}(z)}}$$

и, слѣдовательно, одного знака со знакомъ функціи отъ z

$$W^{(k)}(z)$$

въ промежуткѣ $(\lambda_i,\ \nu_i)$.

Поэтому, если $n-k$ число нечетное, то въ промежуткѣ $\left(\lambda_{\frac{n-k+1}{2}},\ \nu_{\frac{n-k+1}{2}}\right)$ функція отъ z

$$W^{(k+1)}(z)$$

обращается въ нуль только при $z = \nu_{\frac{n-k+1}{2}} = 0$, и, слѣдовательно, наше замѣчаніе доказано вполнѣ.

А принимая во вниманіе равенства

$$\nu_i = -\nu_{n-k+1-i},\quad \mu_i = -\lambda_{n-k+1-i},$$

легко заключимъ, что если

$$i \leqq \frac{n-k+1}{2},$$

то въ промежуткѣ $(\nu_i,\ \mu_i)$ заключается одно и только одно число σ_i такое, что

$$\left[W^{(k+1)}(z)\right]_{z=-\sigma_i} = 0,$$

если же

$$i > \frac{n-k+1}{2},$$

то функція отъ z

$$W^{(k+1)}(z)$$

не обращается въ нуль, когда $-z$ измѣняется въ промежуткѣ (ν_i, μ_i); притомъ, если $n-k$ число нечетное, то

$$\sigma_{\frac{n-k+1}{2}} = \nu_{\frac{n-k+1}{2}} = 0.$$

Пусть

$$\omega(\Phi) = \Phi^{(k)}(z).$$

Обозначимъ, какъ и прежде, уклоненіе отъ нуля въ промежуткѣ $(-1,\ 1)$ наименѣе уклоняющейся отъ нуля въ томъ же промежуткѣ функціи вида (1) чрезъ L.

Изъ всего предыдущаго не трудно вывести, что въ промежуткахъ

$$(-\infty, \sigma_1),\ (\zeta_1, \sigma_2), \ldots, (\zeta_{n-k-1}, \sigma_{n-k})$$

L возрастающая функція отъ z, а въ промежуткахъ

$$(\sigma_1, \zeta_1),\ (\sigma_2, \zeta_2), \ldots, (\sigma_{n-k}, \infty)$$

L убывающая функція отъ z.

Значеніямъ

$$z = \sigma_1,\ z = \sigma_2, \ldots, z = \sigma_{n-k}$$

соотвѣтствуютъ maximum-ы, а значеніямъ

$$z = \zeta_1,\ z = \zeta_2, \ldots, z = \zeta_{n-k-1}$$

minimum-ы функціи L.

Замѣтимъ въ заключеніе, что изъ теоремъ, доказанныхъ нами въ §§ 33 и 34, вытекаютъ различныя теоремы алгебры, аналогичныя теоремамъ, доказаннымъ П. Л. Чебышевымъ въ мемуарѣ „Sur les questions des minima", но на этомъ мы не остановимся.

Прибавленіе къ § 34.

Доказательство невозможности предположенія

$$y = Mu,$$

приведенное въ § 34, было найдено мною въ то время, когда настоящая статья печаталась.

Ранѣе же я имѣлъ для случаевъ

$$k = 1\ ^*),\ k = 2,\ k = n-2,\ k = n-1$$

слѣдующія доказательства невозможности этого предположенія.

Такъ какъ при

$$k = n - 1$$

$f^{(k)}(x)$ линейная функція отъ x, то, относительно t, при $k = n - 1$ можно сдѣлать только два слѣдующія предположенія

$$t = -1 \quad \text{или} \quad t = 1.$$

А въ такомъ случаѣ, какъ это видно изъ § 18 **), должно быть

$$y = \pm MS_n(x).$$

Итакъ, если

$$a = -1,\ b = 1,\ n > 1,\ k = n - 1,$$

то искомый maximum равенъ

$$\frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(n-2)^2\}\,M}{1.3.5\ldots(2n-3)} = 2^{n-1}n!\,M,$$

---

*) Для этого случая доказательство заимствовано изъ мемуара А. А. Маркова «Объ одномъ вопросѣ Д. И. Менделѣева».

**) Мы предполагаемъ $n > 1$.

$$y=\pm MS_n(x),$$

$$t=\pm 1.$$

Замѣчая, что при

$$-1\leqq x\leqq 1$$

имѣетъ мѣсто неравенство

$$\frac{(x-\gamma)(x-\delta)}{(x-\beta)^2}>1,$$

а при

$$-\cos\frac{\pi}{2n}<x<\cos\frac{\pi}{2n},$$

кромѣ того, имѣетъ мѣсто неравенство

$$1-x^2>\sin^2\frac{\pi}{2n}=\left\{\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2}}\right\}^2>\frac{1}{n^2},$$

изъ уравненія (116) находимъ, что при

$$-\cos\frac{\pi}{2n}<x<\cos\frac{\pi}{2n}$$

имѣетъ мѣсто неравенство

$$|u'|<n^2=\max.|S_n'(x)|.$$

А изъ § 18 слѣдуетъ, что при $k=1$ предположеніе

$$y=Mu,\quad |t|\geqq\cos\frac{\pi}{2n}$$

невозможно

Итакъ, если

$$a=-1,\ b=1,\ k=1,$$

то искомый maximum равенъ

$$n^2M,$$

$$y=\pm MS_n(x),$$

а

$$t=\pm 1,$$

если $n>1$, если же $n=1$, то t совершенно произвольное число въ промежуткѣ (a, b).

Изъ уравненія (116) посредствомъ дифференцированія выводимъ уравненіе

$$n^2(x-\beta)^2u=(x^2-1)(x-\gamma)(x-\delta)\left\{u''+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}-\frac{2}{x-\beta}\right)u'\right\}.$$

Откуда

$$u''=\frac{n^2(x-\beta)^2}{(x^2-1)(x-\gamma)(x-\delta)}u-\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{x^2-1}+\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}-\frac{2}{x-\beta}\right)u' \quad (119).$$

Предположимъ, что

$$-\cos\frac{\pi}{n}<x<\cos\frac{\pi}{n}.$$

Тогда разности

$$x-\gamma,\ x-\delta \text{ и } x-\beta$$

одного знака и, кромѣ того,

$$|x-\beta|<|x-\gamma|,\quad |x-\beta|<|x-\delta|,$$

а, слѣдовательно, знакъ

$$\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}-\frac{2}{x-\beta}$$

одинаковъ со знакомъ β.

Знакъ же

$$\frac{2x}{x^2-1}$$

противенъ знаку x.

Поэтому

$$\frac{2x}{x^2-1} \text{ и } \frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}-\frac{2}{x-\beta}$$

одного знака только тогда, когда

$$x \text{ и } \beta$$

противныхъ знаковъ.

Но тогда

$$\left|\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}-\frac{2}{x-\beta}\right|<\frac{2}{|x-\beta|}<2.$$

Слѣдовательно, если знакъ

$$\frac{2x}{x^2-1}+\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}-\frac{2}{x-\beta}$$

одинаковъ со знакомъ

$$\frac{2x}{x^2-1},$$

то

$$\left|\frac{2x}{x^2-1}+\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}-\frac{2}{x-\beta}\right|<\frac{2}{1-x^2}+2.$$

Если же

$$\frac{2x}{x^2-1}+\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}-\frac{2}{x-\beta} \quad \text{и} \quad \frac{2x}{x^2-1}$$

противныхъ знаковъ, то

$$\frac{2x}{x^2-1} \quad \text{и} \quad \frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}-\frac{2}{x-\beta}$$

также противныхъ знаковъ.

Слѣдовательно, если

$$\frac{2x}{x^2-1}+\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}-\frac{2}{x-\beta} \quad \text{и} \quad \frac{2x}{x^2-1}$$

противныхъ знаковъ, то

$$\left|\frac{2x}{x^2-1}+\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}-\frac{2}{x-\beta}\right|<\frac{2}{|x-\beta|}-\frac{2|x|}{1-x^2}.$$

А такъ какъ

$$|\beta|>1,$$

то

$$|x-\beta|>1-|x|,$$

и, слѣдовательно,

$$\left|\frac{2x}{x^2-1}+\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}-\frac{2}{x-\beta}\right|<\frac{2}{|x-\beta|}-\frac{2|x|}{1-x^2}<\frac{2}{1-|x|}-\frac{2|x|}{1-x^2}=\frac{2}{1-x^2}.$$

Наконецъ, если

$$\frac{2x}{x^2-1}=0,$$

т. е.

$$x=0,$$

то

$$\left|\frac{2x}{x^2-1}+\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}-\frac{2}{x-\beta}\right|<\frac{2}{|\beta|}<2.$$

Итакъ во всякомъ случаѣ

$$\left|\frac{2x}{x^2-1}+\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}-\frac{2}{x-\beta}\right|<\frac{2}{1-x^2}+2.$$

На основаніи только что доказаннаго неравенства и неравенствъ

$$0<\frac{(x-\beta)^2}{(x-\gamma)(x-\delta)}<1, \quad |u|\leqq 1, \quad |u'|<n^2$$

изъ уравненія (119) получаемъ неравенство

$$|u''|<\frac{2n^2}{1-x^2}+n^2<n^2\left(\frac{2}{\sin^2\frac{\pi}{n}}+1\right).$$

Но

$$\sin^2\frac{\pi}{n}>\frac{\pi^2}{n^2}\left(1-\frac{\pi^2}{6n^2}\right)^2=\frac{\pi^2}{36n^2}\left(6-\frac{\pi^2}{n^2}\right)^2,$$

и, слѣдовательно, при

$$n\geqq 5$$

мы имѣемъ

$$\frac{2}{\sin^2\frac{\pi}{n}}+1<\frac{2\cdot 36\cdot 4n^2}{121\,\pi^2}+1<\frac{4}{15}n^2+1<\frac{n^2-1}{3}.$$

При $n=4$

$$\frac{2}{\sin^2\frac{\pi}{n}}+1=4+1=5=\frac{n^2-1}{3},$$

при $n=3$

$$2=n-1,$$

а при $n=2$

$$2=n.$$

А потому для всякаго $n \geqq 2$ при

$$-\cos\frac{\pi}{n} < x < \cos\frac{\pi}{n}$$

имѣетъ мѣсто неравенство

$$|u''| < \frac{n^2(n^2-1)}{3} = \max.|S_n''(x)|.$$

Предположеніе же

$$y = Mu, \quad |t| \geqq \cos\frac{\pi}{n}$$

невозможно при $k = 2$, какъ это слѣдуетъ изъ § 18.

Итакъ, если

$$a = -1, \quad b = 1, \quad k = 2,$$

то искомый maximum равенъ

$$\frac{n^2(n^2-1)M}{3},$$

$$y = \pm MS_n(x),$$

а

$$t = \pm 1,$$

если $n > 2$, если же $n = 2$, то t совершенно произвольное число въ промежуткѣ (a, b).

Обратимся теперь къ случаю

$$k = n - 2,$$

причемъ предположимъ

$$n > 4,$$

такъ какъ въ противномъ случаѣ было бы

$$n - 2 \leqq 2.$$

Прежде всего замѣтимъ, что въ разсматриваемомъ случаѣ предположеніе

$$f^{(n-1)}(t) \gtrless 0, \quad t \text{ не} = \pm 1$$

невозможно, такъ какъ для $x = t$ численное значеніе $y^{(n-2)}$ достигаетъ своей наибольшей величины въ промежуткѣ (a, b).

Полагая

$$\prod_{l=2}^{l=n-1}(x - x_l) = x^{n-2} + q_1 x^{n-3} + q_2 x^{n-4} + \ldots + q_{n-2}$$

и обозначая чрезъ p_0' коэффиціентъ при x^n въ функціи

$$u = g(x),$$

имѣемъ

$$u' = np'_0(x-\beta)(x^{n-2} + q_1 x^{n-3} + q_2 x^{n-4} + \ldots + q_{n-2}) =$$

$$= np'_0\{x^{n-1} + (q_1-\beta)x^{n-2} + (q_2 - q_1\beta)x^{n-3} + \ldots - q_{n-2}\beta\},$$

$$u^{(n-2)} = \frac{(n-3)!\,np'_0}{2}\Big\{(n-1)(n-2)x^2 + 2(n-2)(q_1-\beta)x + 2(q_2 - q_1\beta)\Big\},$$

$$u^{(n-1)} = (n-2)!\,np'_0\{(n-1)x + q_1 - \beta\}.$$

Обозначая же чрезъ ξ корень уравненія

$$u^{(n-1)} = 0,$$

имѣемъ

$$q_1 - \beta = -(n-1)\xi,$$

$$\beta = (n-1)\xi + q_1$$

и

$$g^{(n-2)}(\xi) = \frac{(n-3)!\,np'_0}{2}\Big\{(n-1)(n-2)\xi^2 + 2(n-2)(q_1-\beta)\xi + 2(q_2 - q_1\beta)\Big\} =$$

$$= -\frac{(n-3)!\,np'_0}{2}\Big\{(n-1)(n-2)\xi^2 + 2(n-1)q_1\xi + 2q_1^2 - 2q_2\Big\} \quad (120).$$

Но, какъ это видно изъ §§ 26 и 27,

$$\left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{\pi}{2n}\right)\cos\frac{n-l+1}{n}\pi + \mathrm{tg}^2\frac{\pi}{2n} < x_l < \left(1 + \mathrm{tg}^2\frac{\pi}{2n}\right)\cos\frac{n-l}{n}\pi - \mathrm{tg}^2\frac{\pi}{2n}.$$

Слѣдовательно, и подавно

$$\theta_l = \cos\frac{n-l+1}{n}\pi < x_l < \theta_{l+1} = \cos\frac{n-l}{n}\pi.$$

Поэтому

$$-\cos\frac{\pi}{n} < q_1 = -(x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1}) < \cos\frac{\pi}{n},$$

т. е.

$$|q_1| < \cos\frac{\pi}{n} < 1 \qquad (121).$$

Далѣе замѣтимъ, что

$$q_2 = \sum_{j \gtrless i}^{i,j=2,3,\ldots,n-1} x_i\, x_j.$$

Обозначимъ чрезъ

$$\psi(z_2, z_3, \ldots, z_{l-2}, z_{l-1}, z_l, z_{l+1}, \ldots, z_{n-1})$$

функцію

$$\sum_{j \gtrless i}^{i,j=2,3,\ldots,n-1} z_i\, z_j \qquad (122)$$

отъ перемѣнныхъ

$$z_2, z_3, \ldots, z_{l-2}, z_{l-1}\, z_l, z_{l+1}, \ldots, z_{n-1} \qquad (123).$$

Если перемѣнныя (123) могутъ имѣть какія угодно значенія, удовлетворящія неравенствамъ

$$\theta_2 \leqq z_2 \leqq \theta_3 \leqq \ldots \leqq z_{l-2} \leqq \theta_{l-1} \leqq z_{l-1} \leqq \theta_l \leqq z_l \leqq \theta_{l+1} \leqq z_{l+1} \leqq \ldots$$
$$\ldots \leqq \theta_{n-1} \leqq z_{n-1} \leqq \theta_n \qquad (124)$$

и только такія значенія, то очевидно, что какъ наибольшее, такъ и наименьшее значеніе функціи (122) должно соотвѣтствовать такой системѣ значеній перемѣнныхъ (123), въ которой

$$z_l = \theta_l \text{ или } z_l = \theta_{l+1}.$$

Но [1])

$$\psi(z_2, z_3, \ldots, z_{l-2}, \theta_l, \theta_l, z_{l+1}, \ldots, z_{n-1})$$

1) При этомъ мы, конечно, предполагаемъ $l > 2$.

заключается между

$$\psi(z_2, z_3, \ldots, z_{l-2}, \theta_{l-1}, \theta_l, z_{l+1}, \ldots, z_{n-1})$$

и

$$\psi(z_2, z_3, \ldots, z_{l-2}, \theta_{l+1}, \theta_l, z_{l+1}, \ldots, z_{n-1}).$$

А по симметричности функціи (122) относительно перемѣнныхъ (123) имѣемъ

$$\psi(z_2, z_3, \ldots, z_{l-2}, \theta_{l+1}, \theta_l, z_{l+1}, \ldots, z_{n-1}) =$$
$$= \psi(z_2, z_3, \ldots, z_{l-2}, \theta_l, \theta_{l+1}, z_{l+1}, \ldots, z_{n-1}).$$

Слѣдовательно,

$$\psi(z_2, z_3, \ldots, z_{l-2}, \theta_l, \theta_l, z_{l+1}, \ldots, z_{n-1})$$

заключается между

$$\psi(z_2, z_3, \ldots, z_{l-2}, \theta_{l-1}, \theta_l, z_{l+1}, \ldots, z_{n-1})$$

и

$$\psi(z_2, z_3, \ldots, z_{l-2}, \theta_l, \theta_{l+1}, z_{l+1}, \ldots, z_{n-1}).$$

Поэтому, если перемѣнныя (123) удовлетворяютъ неравенствамъ (124) и не ограничены никакимъ другимъ условіемъ, то наибольшее значеніе функціи (122) равно наибольшему изъ коэффиціентовъ при x^{n-4} въ функціяхъ

$$\frac{S'_n(x)}{2^{n-1}n(x-\theta_2)}, \frac{S'_n(x)}{2^{n-1}n(x-\theta_3)}, \ldots, \frac{S'_n(x)}{2^{n-1}n(x-\theta_n)},$$

а наименьшее значеніе функціи (122) равно наименьшему изъ тѣхъ же коэффиціентовъ.

Такъ какъ

$$\frac{S'_n(x)}{2^{n-1}n} = x^{n-1} - \frac{n-2}{4}x^{n-3} + \ldots,$$

то коэффиціентъ при x^{n-4} въ функціи

$$\frac{S'_n(x)}{2^{n-1}n(x-\theta_l)}$$

равенъ

$$O_l^2 - \frac{n-2}{4},$$

а потому, если перемѣнныя (123) удовлетворяютъ неравенствамъ (124), то

$$\left|\psi(z_2, z_3, \ldots, z_{l-2}, z_{l-1}, z_l, z_{l+1}, \ldots, z_{n-1})\right| < \frac{n-2}{4}.$$

Слѣдовательно, и

$$\left|q_2\right| < \frac{n-2}{4} \qquad (125).$$

А по теоремѣ § 33

$$p'_0 < 2^{n-1} \qquad (126).$$

Принимая во вниманіе неравенства (121), (125) и (126), изъ формулы (120) заключаемъ, что если

$$|\xi| < \frac{1}{2},$$

то имѣетъ мѣсто неравенство

$$\left|g^{(n-2)}(x)\right| < \frac{2^{n-1}(n-3)!\,n}{2}\left\{(n-1)(n-2)\xi^2 + 2(n-1)|\xi| + 2 + \frac{n-2}{2}\right\} <$$

$$< \frac{2^{n-1}(n-3)!\,n}{2}\left\{\frac{(n-1)(n-2)}{4} + n - 1 + 2 + \frac{n-2}{2}\right\} =$$

$$= \frac{2^{n-1}(n-3)!\,n}{4} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Но при $n > 5$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} < (2n-3)(n-2),$$

а при $n = 5$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = 21 = (2n-3)(n-2).$$

Слѣдовательно, если

$$\xi < \frac{1}{2},$$

то

$$\left|g^{(n-2)}(\xi)\right| < \frac{2^{n-3}\,n!\,(2n-3)}{n-1} = \frac{n^2(n^2-1^2)\ldots\{n^2-(n-3)^2\}}{1.3\ldots(2n-5)} = \max.\left|S_n^{(n-2)}(x)\right|.$$

А потому предположеніе

$$y = Mu, \quad |t| < \frac{1}{2}$$

невозможно.

Далѣе изъ § 30 слѣдуетъ, что и предположеніе

$$y = Mu, \quad |t| \geqq \frac{1}{n} + \frac{R}{2n(n-1)} - \left(\frac{n-1}{n} - \frac{R}{2n(n-1)}\right)\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n},$$

гдѣ

$$R = \sqrt{4(n-1)^3 + 2n(n-1)(n-2)},$$

невозможно.

Но при $n > 5$

$$\frac{1}{n} + \frac{R}{2n(n-1)} - \left\{\frac{n-1}{n} - \frac{R}{2n(n-1)}\right\}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n} <$$

$$< \frac{1}{n} + \frac{R}{2n(n-1)} < \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n}} \leqq \frac{1}{6} + \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{12}} = \frac{1}{2}.$$

А при $n = 5$

$$\frac{1}{n} + \frac{R}{2n(n-1)} - \left\{\frac{n-1}{n} - \frac{R}{2n(n-1)}\right\}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{2n} = \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{184}}{40} - \left(\frac{4}{5} - \frac{\sqrt{184}}{40}\right)\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{10}.$$

Такъ какъ

$$\frac{\sqrt{184}}{40} = \frac{\sqrt{46}}{20} < 0{,}34,$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{10} > 0{,}1,$$

то

$$\frac{1}{5} + \frac{\sqrt{184}}{40} - \left(\frac{4}{5} - \frac{\sqrt{184}}{40}\right)\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{10} < 0{,}2 + 0{,}34 - 0{,}08 + 0{,}034 = 0{,}494 < \frac{1}{2}.$$

Всѣ эти разсужденія показываютъ, что при $k = n - 2$ и $n > 2$ предположеніе

$$y = Mu$$

невозможно.

Итакъ, если

$$a = -1, \quad b = 1, \quad n > 2, \quad k = n - 2,$$

то искомый maximum равенъ

$$\frac{n^2 (n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots\{n^2-(n-3)^2\} M}{1.3.5\ldots(2n-5)} = 2^{n-3}(n-2)!\, n\,(2n-3)\, M.$$

$$y = \pm MS_n(x),$$

$$t = \pm 1.$$

ОПЕЧАТКИ, ЗАМѢЧЕННЫЯ ПО ОТПЕЧАТАНІИ ПОСЛѢДНЯГО ЛИСТА.

Стр.	Строка.	Папечатано.	Должно быть.
II	5 снизу	въ	въ
17	11	$\omega(x-b)$	$\omega(x-x_2)$
34	3	$k \leqq s$	$k < s$
34	11	$k = s.$	$k = s - 1.$
34	13	$0 < k < s.$	$0 < k < s - 1.$
74	3 снизу	$(-1)^t$	$(-1)^i$
82	1 снизу	$\|\delta$	$\|\delta\|$
86	14	дкоазанной	доказанной
88	3 снизу	$\frac{d\, W^{(k+1)}}{dz}$	$\frac{d\, W^{(k+1)}(z)}{dz}$
94	1 снизу	$-\frac{\cos^2\frac{\pi}{2n}}{1+\xi_i} W^{(k)}(z)$	$-\frac{k\cos^2\frac{\pi}{2n}}{1+\xi_i} W^{(k)}(z)$
103	7 снизу	2 36 4	2.36.4
106	Въ примѣчаніи	$l > 2$	$2 < l < n$
108	9	p'_0	$\|p'_0\|$
109	2	ξ	$\|\xi\|$