ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE,

POUR LES

SCIENCES MATHÉMATIQUES ET LES SCIENCES PHYSIQUES,

PUBLIÉES

SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE,

PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE DE LA FACULTÉ.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME I. — ANNÉE 1909.

(23e VOLUME DE LA COLLECTION.)

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS,
IMPRIMEUR-ÉDITEUR.

TOULOUSE,
ÉD. PRIVAT,
IMPRIMEUR-LIBRAIRE.

1909

SUR LES INTÉGRALES SINGULIÈRES,

PAR HENRI LEBESGUE,

Professeur à l'Université de Poitiers.

I.

Ce travail est consacré à l'étude de la convergence vers $f(x)$ des intégrales de la forme

$$\mathrm{I}_n = \int_0^l f(t)\,\varphi(t-x,\, n)\,dt.$$

Le théorème classique sur cette question suppose, comme l'on sait, que f est à variation bornée; il est démontré le plus souvent par l'emploi du second théorème de la moyenne. Si l'on essaie de construire un raisonnement analogue en utilisant le premier théorème de la moyenne, on est conduit à ne faire sur f aucune autre hypothèse que celle de la continuité au point x étudié, mais à admettre que le noyau $\varphi(\alpha, n)$ est positif et tel que l'intégrale

$$\int_{-h}^{+k} \varphi(\alpha,\, n)\,d\alpha \qquad (-l < -h < 0 < +k < +l)$$

est singulière et admet 1 pour valeur limite. Sous ces seules conditions, la convergence de I_n vers f est assurée et même cette convergence est uniforme à l'intérieur de tout intervalle de continuité de f.

Il me semble qu'il y a au moins un intérêt pédagogique à faire cette remarque puisque le même raisonnement fait successivement avec les deux théorèmes de la moyenne fournit d'une part la théorie des séries de Fourier, par exemple, et d'autre part le théorème précédent, lequel s'applique en particulier à l'intégrale

$$\mathrm{W}_n = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-n^2(t-x)^2}\,dt,$$

— qui se rencontre dans la théorie de la Chaleur, dans les questions d'approximation de grands nombres et de laquelle Weierstrass a déduit ses théorèmes si remarquables sur la représentation approchée des fonctions arbitraires, — à l'intégrale P_n de Poisson, à l'intégrale F_n de l'étude de laquelle M. Fejér a déduit que toute fonction continue admettait une série de Fourier sommable par le procédé de la moyenne arithmétique.

D'ailleurs ce théorème se prête immédiatement à des applications assez variées. Prenons en effet pour le noyau $\varphi(\alpha, n)$ un polynome en α ou une suite finie de Fourier en α remplissant les conditions imposées, I_n sera alors un polynome en x ou une suite de Fourier en x et ainsi nous démontrerons les théorèmes de Weïerstrass dont je viens de parler. En essayant de choisir simplement I_n, on est conduit tout naturellement aux intégrales

$$L_n = \frac{\sqrt{n}}{\pi} \int_0^1 f(t)[1-(t-x)^2]^n dt, \qquad V_n = \frac{\sqrt{n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos^{2n} \frac{t-x}{2} dt,$$

que M. Landau et M. de La Vallée-Poussin viennent d'étudier récemment.

Il y a plus, si l'on remarque avec M. de La Vallée-Poussin que pour des noyaux assez simples comme ceux de L_n et V_n on peut calculer effectivement une limite supérieure de $I_n - f$, on déduira de là des renseignements sur l'ordre de grandeur de l'approximation à laquelle on peut prétendre en approchant d'une fonction continue à l'aide de polynomes de degré n ou de suites de Fourier d'ordre n.

J'ai l'occasion dans le dernier numéro de ce travail de faire une application d'un tel résultat en montrant qu'on peut affirmer la convergence de la série de Fourier de f si, quel que soit n, on peut approcher de f avec une suite d'ordre n et en commettant une erreur d'ordre supérieur à $\frac{1}{\log n}$. De là se déduit une nouvelle démonstration de la convergence des séries de Fourier des fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz-Dini.

Comme autres applications immédiates du même théorème, je signale l'obtention de formules d'interpolation permettant l'approximation indéfinie et la résolution de certains « problèmes de moments ».

Le théorème dont je viens de parler a certainement été aperçu par la plupart de ceux qui se sont occupés des intégrales singulières ; aussi ai-je été étonné que l'attention n'ait pas été davantage appelée sur lui (¹). Il me semble qu'on peut en voir la raison. Presque tous les travaux sur les intégrales singulières ont été faits en vue d'application aux séries trigonométriques ou à d'autres développements analogues. De sorte que ce que se proposaient les auteurs c'était surtout, étant donné un noyau $\varphi(\alpha, n)$, de rechercher les fonctions f pour lesquelles I_n converge vers f et le

(¹) Voir cependant les travaux récents de MM. Haar et Hobson, qui sont cités plus loin.

théorème précédent imposait à φ des restrictions inacceptables pour les applications qu'on se proposait. Cela m'a conduit à *rechercher, au contraire, les noyaux φ propres à la représentation approchée de toutes les fonctions f d'une certaine famille*, de la famille des fonctions continues par exemple.

On trouve facilement les conditions nécessaires et suffisantes que doit vérifier $\varphi(\alpha, n)$; elles consistent en ceci : certaines intégrales dépendant de n et au plus de deux paramètres, λ, μ doivent être bornées ou tendre vers des limites déterminées 0 et 1.

Il peut sembler qu'on ne gagne rien à énoncer ces conditions parce qu'elles paraissent de même nature que la question à étudier, la convergence de I_n vers f; mais il faut remarquer que dans I_n, sous le signe d'intégration, figure la fonction arbitraire f et qu'au contraire les intégrales à l'aide desquelles s'expriment les conditions nécessaires et suffisantes portent sur des quantités connues quand $\varphi(\alpha, n)$ est donné.

L'avantage qu'il y a à démontrer des conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence c'est qu'on a en même temps en quelque sorte des conditions de divergence, et c'est ainsi que j'ai pu rattacher à un fait général l'existence de fonctions continues dont la série de Fourier ne converge pas partout. Cela résulte de ce que le noyau de l'intégrale de Fourier-Dirichlet [1]

$$\mathcal{D}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{\sin\,(2n+1)\,\dfrac{x-t}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}\,dt$$

ne satisfait pas à toutes les conditions nécessaires pour permettre la représentation de toutes les fonctions continues. D'un autre théorème on déduit l'existence de fonctions continues dont la série de Fourier converge partout sans converger uniformément partout [2].

Pour cette recherche, j'ai cru utile de démontrer, pour le cas où l'on adopte la définition de l'intégrale que j'ai proposée, un certain nombre de théorèmes bien connus dans le cas des intégrales ordinaires : les théorèmes de la moyenne, le théorème du changement de variable, de l'intégration par parties. Certains de ces théorèmes ont d'ailleurs été déjà utilisés par d'autres auteurs ou par moi-même. La démonstration de ces théorèmes généraux étant acquise, j'ai pu étudier la convergence de I_n

---

(1) Cette intégrale, qui représente la somme des $n+1$ premiers termes de la série de Fourier de f, joue le rôle fondamental dans le travail classique de Dirichlet sur les séries trigonométriques. Il ressort clairement des observations de M. Darboux (*Œuvres de Fourier*, t. I, n° 235, p. 234; n° 416, p. 499; n° 423, p. 511) que Fourier avait aperçu l'intérêt de l'étude d'une intégrale fort analogue et le moyen d'entreprendre cette étude.

(2) J'ai indiqué ces résultats dans une note des *Comptes rendus* (17 novembre 1905) et aussi, mais en me bornant au cas des séries Fourier, dans les numéros 45 à 47 de mes *Leçons sur les séries trigonométriques*.

vers f en d'autres points que les points de continuité ou les points de discontinuité de première espèce. J'ai réussi à étendre à des cas assez généraux une propriété que j'avais démontrée jadis pour l'intégrale F_n et qui me paraît pouvoir être utile dans l'étude des fonctions discontinues, savoir que l'intégrale F_n converge presque en tout point vers la fonction f correspondante; les points exceptionnels, s'il en existe, forment un ensemble de mesure nulle. La même proposition a été démontrée par M. Fatou en ce qui concerne l'intégrale de Poisson P_n et par M. Riesz pour l'intégrale L_n précédemment citée.

Ce travail, commencé il y a quelques années déjà, n'a été repris que récemment, à la suite de la publication d'une note de M. Landau, *Uber die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion* (1), contenant l'étude de la convergence de l'intégrale L_n et des applications à la démonstration des théorèmes de Weïerstrass et à la résolution d'un problème de moments. Cette note provoqua plusieurs travaux (2), parmi lesquels je citerai une note de M. Friedrich Riesz (3) contenant en particulier le résultat déjà cité et un travail de M. Hobson (4) qui présente une grande analogie avec celui-ci, puisque M. Hobson se propose de trouver un caractère de convergence de I_n vers f applicable en tout point de continuité de f, quelle que soit la fonction sommable f. Le travail de M. Hobson est même en un sens plus général que le mien puisqu'il est relatif aux intégrales I_n de la forme

$$I_n = \int_a^b f(t)\,\varphi(t, n, x)\,dt.$$

Sans nouveaux raisonnements, il serait facile d'étendre les résultats qu'on trouvera plus loin au cas de ces noyaux plus compliqués.

La principale différence entre le travail de M. Hobson et le mien vient de ce que son auteur étudie seulement des conditions suffisantes de convergence, tandis que je m'occupe des conditions nécessaires et suffisantes (5).

---

(1) *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXV, 1er semestre, 1908, pp. 337-345.

(2) J'ai moi-même publié à cette occasion, dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXVI, 2e semestre 1908, pp. 325-328, un extrait d'une lettre adressée à M. Landau le 24 février 1908, qui contenait l'énoncé de ceux des résultats de ce travail qui se rapportent aux fonctions continues.

(3) *Uber die Approximation einer Funktion durch Polynome* (Jahresberich der deutschen mathematiker-vereiuigung, Bd. 17, mai 1908, pp. 196-211).

(4) *On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by series of normal functions* (Proceedings of the London mathematical Society, sér. 2, vol. 6, part. 5, 1908, pp. 349-395).

(5) Au moment où je terminais ma rédaction, j'ai reçu une nouvelle note de M. Hobson : *On the second mean-value theorem of the integral calculus* (Proceedings of the London mathematical Society, ser. 2, vol. 7, part. 1, 1909, pp. 14-23) contenant une démonstration du second théorème de la moyenne valable pour les intégrales à mon sens.

Dans son *Inaugural-Dissertation* (1), M. Alfred Haar indique une condition permettant de reconnaître qu'une série de la forme

$$\sum \varphi_i(s) \int_a^\beta f(t)\, \varphi_i(t)\, dt,$$

où les φ_i forment un système orthogonal, converge quelle que soit la fonction continue f et un critérium permettant au contraire d'affirmer l'existence d'une fonction continue f pour laquelle la série diverge. Si l'on pose, avec M. Haar,

$$K_n(s, t) = \sum_1^n \varphi_i(s)\, \varphi_i(t),$$

on voit que ce noyau $K_n(s, t)$ joue le rôle de $\varphi(t, n)$ et que le résultat de M. Haar ne diffère pas essentiellement de ceux qui sont rapportés ici relativement à la représentation des fonctions continues.

Je dois enfin signaler un article de M. de La Vallée-Poussin (2), dans lequel il étudie avec soin les intégrales L_n et V_n, poussant même cette étude jusqu'au calcul de l'ordre de grandeur de l'approximation obtenue, ainsi qu'on le verra plus loin.

II.

[1] Ce travail est consacré à des intégrales définies portant sur le produit $f(x)\, \varphi(x)$ de deux fonctions. Les théorèmes qui servent à l'évaluation approchée de ces intégrales sont la généralisation de ceux qui servent à l'approximation des sommes de la forme $\sum_{i=0}^{i=n} a_i\, b_i$ et que je vais rappeler.

Le plus simple s'énonce ainsi :

a) Si l'on a, quel que soit i,

$$b_i \geqslant 0, \qquad m \leqslant a_i \leqslant M,$$

on a aussi

$$m \sum b_i \leqslant \sum a_i b_i \leqslant M \sum b_i.$$

Et de là on conclut que, si l'on a constamment

$$|a_i| \leqslant M,$$

on a aussi

$$\left| \sum a_i\, b_i \right| \leqslant M \sum |b_i|.$$

(1) *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme*, Göttingen, 1908.

(2) *Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynomes et des suites finies de Fourier* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, classe des sciences, n° 3, 1908, pp. 193-254).

La seconde proposition n'est que le résultat de l'application de la précédente à la suite transformée par l'identité d'Abel :

$$\sum_{i=0}^{i=n} a_i b_i = \sum_{i=0}^{i=n-1} \left(\sum_{j=0}^{j=i} b_j \right) (a_i - a_{i+1}) + \left(\sum_{j=0}^{j=n} b_j \right) a_n .$$

b) Donc, *si les* a_i *vont en décroissant et sont positifs et si, quel que soit* i, *on a*

$$m \leqslant \sum_{j=0}^{j=i} b_j \leqslant \mathrm{M},$$

on a aussi

$$m\, a_0 \leqslant \sum a_i b_i \leqslant \mathrm{M}\, a_0 .$$

Si l'on sait seulement que l'on a constamment

$$\left| \sum_{j=0}^{j=i} b_j \right| \leqslant \mathrm{M},$$

on concluera

$$\left| a_n \sum b_i - \sum a_i b_i \right| \leqslant \sum | a_i - a_{i+1} | \,.\, \mathrm{M}.$$

A ces deux propositions, il faut joindre celle qui s'exprime par l'inégalité

c) $$\left(\sum a_i b_i \right)^2 \leqslant \sum a_i^2 \,.\, \sum b_i^2,$$

laquelle résulte immédiatement de l'identité

$$\left[\sum_{i=0}^{i=n} a_i b_i \right]^2 = \sum_{i=0}^{i=n} a_i^2 \,.\, \sum_{i=0}^{i=n} b_i^2 - \sum_{i=0}^{i=n} \sum_{j=0}^{j=n} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

[2] Pour étendre aux intégrales des propriétés telles que *a*), *b*), *c*), démontrées pour des sommes, il est souvent commode, si l'on adopte la définition de l'intégrale que j'ai donnée, de la rapprocher de la définition de Riemann en faisant voir que *l'intégrale, à mon sens, peut toujours être définie par certaines, convenablement choisies, des sommes qu'on utilise dans la définition riemannienne de l'intégrale.* En d'autres termes, je vais montrer que $f(x)$ étant mesurable [1] dans (a, b), $a < b$, on peut

---

[1] Toutes les fonctions dont il s'agira dans ce travail sont des fonctions mesurables; je ne prendrai pas toujours la peine de l'indiquer.

toujours décomposer (a, b) en intervalles partiels I_k et choisir dans chaque I_k un point distingué t_k de manière que, $m(I_k)$ désignant la mesure de I_k, la somme

$$S = \sum f(t_k) m(I_k)$$

diffère de l'intégrale de f, prise de a à b, d'aussi peu que l'on veut, si l'intégrale existe, et que *la somme des valeurs absolues des termes de* S soit aussi grande que l'on veut si l'intégrale n'existe pas.

Cela est à peu près évident. Il est facile de prouver, en effet, qu'en profitant de la double indétermination des *éléments de base* I_k et t_k avec lesquels a été construite S on peut faire en sorte que cette somme tende vers telle limite que l'on veut entre les intégrales par excès et par défaut quand on fait varier ces éléments de base de façon que la longueur maximum des I_k tende vers zéro. Et l'intégrale d'une fonction est toujours comprise entre ses intégrales par excès et par défaut.

Mais nous trouverons avantage à employer une démonstration plus longue. ε étant arbitrairement choisi positif, désignons par E_i l'ensemble des points de (a, b) pour lesquels on a $i\varepsilon \leqslant f(x) < (i+1)\varepsilon$. La série

$$s = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} i\varepsilon m(E_i)$$

est absolument convergente et a une somme qui diffère de $\int_a^b f(x)dx$ de $\varepsilon(b-a)$ au plus si cette intégrale existe; si l'intégrale n'existe pas, s n'est pas absolument convergente.

Conservons seulement dans cette somme un nombre fini de termes convenablement choisis, de façon à satisfaire aux conditions suivantes :

c_1) Si $f(x)$ n'est pas sommable dans (a, b), la somme des valeurs absolues des termes conservés doit surpasser $\frac{1}{\varepsilon}$;

c_2) Si $f(x)$ est sommable dans (a, b), la série $s' = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} | i\varepsilon m(E_i) |$ est convergente et il existe un nombre σ tel que tout ensemble contenu dans (a, b) et de mesure σ fournisse dans s' une contribution au plus égale à ε (1). Les termes négligés

(1) On peut déterminer un tel nombre σ comme il suit : Soit N un nombre assez grand pour que les termes d'indice i supérieur à N en valeur absolue fournissent dans s' une contribution inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. Soit σ_1 la mesure de la somme des ensembles E_i, $(|i| > N)$. Un ensemble extérieur au précédent et de mesure σ_2 fournit dans s' une contribution au plus égale à $\sigma_2 N\varepsilon$. Donc on peut prendre pour σ le plus petit des deux nombres σ_1 et $\frac{1}{2N}$.

dans s (ou s') doivent correspondre à des ensembles E_i dont la mesure totale τ est au plus σ; alors la somme des valeurs absolues des termes négligés ne peut pas surpasser ε.

Nous obtenons ainsi une somme qui, en changeant de notations, peut s'écrire

$$t = \sum_{h=1}^{h=p} \lambda_h m(e_h).$$

Nous allons la transformer en remplaçant les e_h par des ensembles d'intervalles. On remplacera d'abord e_1 par un ensemble a_1 d'intervalles obtenu en conservant seulement un nombre fini d'intervalles convenablement choisis dans un ensemble dénombrable d'intervalles couvrant tout e_1; on remplacera en même temps $e_h (h > 1)$ par la partie e'_h de e_h qui est extérieure à a_1, cela donnera

$$u = \lambda_1 m(a_1) + \sum_{h=2}^{h=p} \lambda_h m(e'_h).$$

On remplacera ensuite de même e'_2 par un nombre fini d'intervalles formant l'ensemble a_2 et e'_h $(h > 1, 2)$ par la partie e''_h de e'_h extérieure à a_2, etc. En continuant ainsi, on arrivera à la somme

$$w = \sum_{h=1}^{h=p} \lambda_h m(a_h).$$

Ces transformations devront être faites de façon à satisfaire aux conditions suivantes :

c_3) Les intervalles formant les ensembles a_h doivent être chacun de longueur inférieure à ε, contenir chacun des points de l'ensemble e_h correspondant et ne pas empiéter les uns sur les autres.

c_4) Le passage de chaque somme à la suivante, de t à u par exemple, doit modifier la somme des valeurs absolues des termes de $\frac{\varepsilon}{p}$ au plus.

c_5) Enfin, si $f(x)$ est sommable dans (a, b), chaque quantité $|m(e_h) - m(a_h)|$ doit être inférieure à $\frac{\sigma - \tau}{p}$.

Dans chaque intervalle α faisant partie de a_h choisissons un point ξ appartenant à e_h ; dans w remplaçons $m(a_h)$ par $\sum m(\alpha)$, puis développons les produits et remplaçons chaque $\lambda_h m(\alpha)$ par la quantité $f(\xi) \,.\, m(\alpha)$ correspondante. Cela augmente w au plus de $\varepsilon(b - a)$ et nous donne une somme z qui ne diffère des sommes riemanniennes que parce que les intervalles α ne couvrent peut-être pas tout (a, b).

Divisons les parties de (a, b) non couvertes par les α en intervalles β ayant chacun une longueur au plus égale à ε. Dans chaque intervalle β nous choisissons un point η tel que $|f(\eta)|$ ne surpasse la limite inférieure de $|f(x)|$ dans β que de ε au plus. L'introduction des termes $f(\eta)\, m(\beta)$ augmentera la somme des valeurs absolues des termes de z et, quand f est sommable, modifiera z au plus de $\varepsilon + \sigma\varepsilon \leqslant \varepsilon(b - a + 1)$, puisque la somme des β a une mesure au plus égale à $\sigma \leqslant b - a$.

En résumé, la somme riemannienne

$$S = \sum_{h=1}^{h=N} f(t_k)\, m(I_k),$$

que nous avons formée, diffère de $\int_a^b f(x)\, dx$ de moins de

$$3\varepsilon[(b - a) + 1],$$

si $f(x)$ est sommable, et, si $f(x)$ n'est pas sommable, la somme des valeurs absolues des termes de S surpasse

$$\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon[(b - a) + 1].$$

Cette somme S satisfait donc bien aux conditions imposées.

[3] Voici maintenant des conséquences de la démonstration adoptée. Supposons $f(x)$ sommable dans (a, b); soit (a_1, b_1) une partie quelconque de (a, b). Ne conservons dans S que les termes provenant d'intervalles I_k intérieurs à (a_1, b_1), cela nous donnera ce qu'on peut appeler la somme riemannienne S_1 relative à (a_1, b_1) et construite avec les mêmes éléments de base que S.

On a évidemment, (a_2, b_2) étant l'intervalle effectivement couvert par les I_k intérieurs à (a_1, b_1),

$$\left| \int_{a_1}^{b_1} f(x)\, dx - S_1 \right| \leqslant \left| \int_{a_1}^{a_2} f(x)\, dx \right| + \left| \int_{b_2}^{b_1} f(x)\, dx \right| + 3\varepsilon(b_1 - a_1 + 1).$$

De là il résulte que si, à des nombres ε tendant vers zéro, on a associé des éléments de base permettant de calculer l'intégrale de f dans (a, b), les sommes construites avec les mêmes éléments de base et relatives à f dans (a_1, b_1) tendent vers l'intégrale $\int_{a_1}^{b_1} f(x)\, dx$, *et cela uniformément, quels que soient* a_1 *et* b_1 *tels que*

$$a \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b.$$

Soient $f_1, f_2, \ldots f_p$ des fonctions définies dans (a, b), *je dis qu'on peut définir les intégrales de toutes ces fonctions à l'aide de sommes riemanniennes construites avec les mêmes éléments de base.*

Désignons par $E_{i_1, i_2, \dots, i_p}$ l'ensemble des points en lesquels sont vérifiées les p inégalités de la forme

$$i_k \varepsilon \leqslant f_k(x) < (i_k + 1)\varepsilon.$$

Rangeons ces ensembles en suite simplement infinie, soit la suite $E_1, E_2, \dots$ La somme analogue à s et relative à f_k peut alors s'écrire :

$$s_k = \sum_{i=1}^{i=\infty} \mu_{i,k} \cdot m(E_i);$$

si E_i désigne $E_{i_1, i_2, \dots i_k, \dots, i_p}$ on a $\mu_{i,k} = i_k \varepsilon$.

Parmi les E_i nous choisirons les e_h de façon que la condition c_1 soit vérifiée pour chaque fonction f_k non-sommable et que la condition c_2 soit vérifiée pour la série s' formée par la réunion de toutes celles des séries $s'_k = \sum_{i=1}^{i=\infty} |\mu_{i,k} m(E_i)|$ qui sont convergentes. Les nombres σ et τ sont définis à l'aide de cette série s'. La condition c_2 est ainsi vérifiée pour chaque fonction f_k sommable.

Le passage des e_h aux a_h se fait comme précédemment, les conditions c_3, c_4, c_5 doivent être remplies.

Pour que la condition c_4 soit remplie pour chaque f_k il suffirait évidemment qu'elle le soit pour les sommes relatives à $|f_1| + |f_2| + |f_3| + \dots + |f_p|$ et on peut évidemment faire qu'il en soit ainsi.

Le choix du point de base ξ dans chaque élément de base α se fait comme précédemment, ainsi que le choix des éléments de base β ; quant au choix des points η, on le fera en faisant jouer le rôle de $|f(x)|$ à la somme des valeurs absolues de celles des $f_k(x)$ qui sont sommables.

La proposition qui vient d'être démontrée s'étend évidemment à une suite dénombrable de fonctions f_i. Il suffit en effet de choisir des nombres ε_i décroissant jusqu'à zéro et de supposer que dans le choix des éléments de base relatifs à ε_h on tient compte seulement des h premières fonctions f_i.

Remarquons encore que les éléments de base choisis conviennent pour le calcul des intégrales des sommes $k_1 f_1 + k_2 f_2 + \dots + k_p f_p$, $k_1 |f_1| + k_2 |f_2| + \dots + k_p |f_p|$ quelles que soient les constantes $k_1, k_2, \dots k_p$. Cela n'est entièrement démontré par ce qui précède que si toutes les f_i sont sommables. Pour les cas où elles ne le seraient pas toutes, quelques précautions nouvelles seraient nécessaires.

[**4**] Les considérations précédentes, qui sont souvent utiles, ne sont nullement indispensables pour la démonstration des théorèmes suivants, mais grâce à elles ces théorèmes se présentent avec le maximum de simplicité et d'uniformité.

Considérons des éléments de base permettant de définir les intégrales de f, de φ, de $f\varphi$ dans un intervalle positif (a, b). Pour $f\varphi$ nous aurons la somme

$$S = \sum_{k=1}^{k=N} f(t_k)\,\varphi(t_k)\,m(I_k).$$

Nous allons appliquer à cette somme les trois propositions $a)$, $b)$, $c)$ et nous passerons à la limite.

Pour appliquer $a)$ nous supposerons que l'on a constamment

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) \geqslant 0$$

et nous poserons

$$a_i = f(t_i), \qquad b_i = \varphi(t_i)\,m(I_i);$$

d'où

$$m \sum \varphi(t_k)\,m(I_k) \leqslant S \leqslant M \sum \varphi(t_k)\,mI_k.$$

En passant à la limite on a *le premier théorème de la moyenne.*

A. — *Si les trois fonctions f, φ, $f\varphi$ sont sommables dans (a, b), $(a < b)$, et si l'on a constamment*

$$m \leqslant f(x) \leqslant M, \qquad \varphi(x) \geqslant 0,$$

on a aussi

$$m\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqslant M\int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Supposons seulement que l'on a :

$$|f(x)| \leqslant \mu.$$

et appliquons la proposition $a)$ à la somme S' des valeurs absolues des termes de S on a :

$$S' \leqslant \mu \sum |\varphi(t_k)\,mI_k)|.$$

Donc, *en multipliant une fonction sommable φ par une fonction bornée f on obtient un produit $f\varphi$ qui est sommable.*

Pour appliquer $b)$ supposons $f(x)$ positive et décroissante; nous trouvons

$$mf(t_1) \leqslant S \leqslant Mf(t_1),$$

si l'on a, quel que soit α,

$$m \leqslant \sum_{k=1}^{k=\alpha} \varphi(t_k)\,m(I_k) \leqslant M.$$

Or, quand on passe à la limite, les sommes $\sum_{k=1}^{k=\alpha} \varphi(t_k)\, m(\mathrm{I}_k)$ tendent uniformément vers $\int_a^x \varphi(x)\, dx$, x étant convenablement choisi dans $(a,\ b)$. Donc si l'on a, quel que soit x,

$$n \leqslant \int_a^x \varphi(x)\, dx \leqslant \mathrm{N},$$

on a aussi

$$n f(a+o) \leqslant \int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx \leqslant \mathrm{N} f(a+o).$$

Si l'on suppose seulement $f(x)$ décroissante, $f(x) - f(b-o)$ est positive et décroissante. Donc, les autres hypothèses étant les mêmes, on en conclut

$$n[f(a+o) - f(b-o)] \leqslant \int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx - \int_a^b f(b+o)\, \varphi(x)\, dx$$
$$\leqslant \mathrm{N}[(f(a+o) - f(b-o)].$$

Ou encore, en tenant compte de ce que $\int_a^x \varphi(x)\, dx$ est fonction continue de x et par suite prend toutes les valeurs entre n et N,

$$\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx - f(b+o) \int_a^b \varphi(x)\, dx = \int_a^\xi \varphi(x)\, dx \,.\, [f(a+o) - f(b-o)];$$

ξ étant convenablement choisi dans $(a,\ b)$.

On raisonnerait d'une façon analogue pour les fonctions décroissantes; nous pouvons donc énoncer *le second théorème de la moyenne :*

B. — *Si f est bornée et monotone dans $(a,\ b)$ et si φ est sommable dans $(a,\ b)$,* — auquel cas $f\varphi$ l'est aussi, d'après un théorème précédent, — *on a*

$$\int_a^b f(x)\, \varphi(x)\, dx = f(a+o) \int_a^\xi \varphi(x)\, dx + f(b-o) \int_\xi^b \varphi(x)\, dx,$$

ξ étant convenablement choisi dans $(a,\ b)$.

Si l'on suppose seulement que l'on a, quel que soit b,

$$\left| \sum_{k=1}^{k=l} \varphi(t_k)\, m(\mathrm{I}_k) \right| \leqslant \mu,$$

on en concluera

$$\left| \mathrm{S} - \left[\sum_{k=1}^{k=\mathrm{N}} \varphi(t_k)\, m(\mathrm{I}_k) \right] f(b-o) \right| \leqslant \mu \,.\, \sum_{k=1}^{k=\mathrm{N}-1} | f(t_k) - f(t_{k+1}) |.$$

Donc, *si la variation totale de $f(x)$ dans (a, b) est finie et égale à* $\mathcal{V}$, *et si l'on a, quel que soit x dans (a, b)*,

$$\left| \int_a^x \varphi(x)\, dx \right| \leqslant \mathfrak{M},$$

on a aussi :

$$\left| \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\, dx - f(b-0)\int_a^b \varphi(x)\, dx \right| \leqslant \mathfrak{M}\mathcal{V}.$$

On obtiendra facilement des énoncés analogues où l'on mettrait en évidence $f(a+0)$ ou $f(c)$, c étant quelconque dans (a, b), au lieu de $f(b-0)$. Ces énoncés se déduisent facilement de B et réciproquement.

Posons maintenant

$$a_i = f(t_i)\sqrt{m(\mathrm{I}_i)}, \qquad b_i = \varphi(t_i)\sqrt{m(\mathrm{I}_i)}$$

et appliquons l'inégalité c) à la somme S ; il vient :

$$\left[\sum f(t_i)\,\varphi(t_i)\, m(\mathrm{I}_i)\right]^2 \leqslant \sum \overline{f(i)}^2\, m(\mathrm{I}_i)\,.\sum \overline{\varphi(i)}^2\, m(\mathrm{I}_i);$$

on déduit de là l'inégalité

$$\left[\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\, dx\right]^2 \leqslant \int_a^b \overline{f(x)}^2\, dx\,.\int_a^b \overline{\varphi(x)}^2\, dx.$$

Avant d'énoncer le résultat, appliquons encore l'inégalité c) à la somme S' ; il vient :

$$\mathrm{S}'^2 \leqslant \sum \overline{f(i)}^2 m(\mathrm{I}_i)\,.\sum \overline{\varphi(i)}^2 m\mathrm{I}_i.$$

Si donc les sommes du second membre tendent vers des limites finies, S' reste inférieure à une limite fixe et par suite $f\varphi$ est sommable. De là la proposition connue sous le nom d'*inégalité de Schwarz :*

C. — *Si f^2 et φ^2 sont des fonctions sommables dans (a, b), il en est de même de $f\varphi$, et l'on a :*

$$\left[\int_a^b f\varphi\, dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2\, dx\,.\int_a^b \varphi^2\, dx.$$

D'une façon analogue, on démontrerait l'inégalité

$$\left|\int_a^b f\varphi\, dx\right| \leqslant \int_a^b |f\varphi|\, dx \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_a^b f^2\, dx + \int_a^b \varphi^2 dx\right).$$

Cette inégalité est moins bonne que l'inégalité de Schwarz pour le calcul approché de $\int_a^b f\varphi\, dx$ parce que la moyenne arithmétique des deux quantités $\int_a^b f^2\, dx$, $\int_a^b \varphi^2\, dx$ est toujours au moins égale à leur moyenne géométrique.

A l'égard du second théorème de la moyenne une remarque est utile. Les seules fonctions que nous avons considérées sont des fonctions sommables et dont, par conséquent, la valeur absolue a une intégrale. Dans la démonstration classique, au contraire, on s'occupe d'intégrales de fonctions non absolument intégrables (voyez, par exemple, le *Cours d'analyse* de M. Jordan, 2e édition, t. II, n° 216, p. 222). Il serait facile, mais cela nous est inutile, d'étendre le résultat obtenu de manière qu'il contienne le résultat classique.

Il est au contraire utile d'étendre à un intervalle infini les propositions précédentes. Cela se fait comme pour l'intégrale de Riemann (voyez, par exemple, Jordan, *loc. cit.*, n° 219, p. 226); mais il est utile de préciser ce qu'on entend par l'intégrale de f dans un intervalle infini (a, ∞), par exemple. J'entends par là, si la limite pour $b = \infty$ de $\int_a^b |f|\,dx$ existe, la limite de $\int_a^b f\,dx$. Cette définition diffère de la définition classique par la considération de $\int_a^b |f|\,dx$, mais il n'en résulte aucune complication nouvelle si l'on se rappelle que dans un intervalle fini f et $|f|$ sont sommables en même temps, et si l'on remarque que $|f|$ est à variation bornée, si f l'est.

[5] Nous venons de voir que *le produit de deux fonctions sommables est certainement sommable toutes les fois que l'une des fonctions est bornée ou toutes les fois que les deux fonctions ont leurs carrés sommables.*

Le premier cas peut être étendu un peu. Deux fonctions qui ne diffèrent qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle ont la même intégrale dans tout intervalle, nous dirons qu'elles sont *équivalentes*.

Le produit d'une fonction équivalente à zéro par une autre fonction, même non mesurable, est évidemment équivalent à zéro.

Le produit d'une fonction sommable par une fonction équivalente à une fonction bornée est sommable ; c'est l'extension annoncée.

On peut compléter ces énoncés par deux remarques :

Si φ est une fonction sommable, non équivalente à une fonction bornée, on peut toujours déterminer une fonction sommable f telle que le produit $f\varphi$ ne soit pas sommable dans l'intervalle considéré.

Puisque $|\varphi|$, $|f|$, $|f\varphi|$ sont sommables en même temps que φ, f, $f\varphi$, on peut supposer φ positive et rechercher f parmi les fonctions positives.

Les nombres $a_1, a_2, a_3, \ldots$ étant positifs et croissant jusqu'à $+\infty$, appelons u_i la mesure de l'ensemble E_i des points où l'on a $a_i \leqslant \varphi(x) < a_{i+1}$. D'après les hypothèses, il y a un nombre infini de nombres u_i différents de zéro ; donc, en supprimant au besoin certains des a_i précédemment choisis, on peut supposer que tous les u_i sont différents de zéro. Enfin, admettons que l'on a, quel que soit i, $a_i > i$.

La série $\Sigma a_i u_i$, étant inférieure à l'intégrale de φ, est convergente.

Prenons pour f la fonction égale à $\dfrac{1}{i a_i u_i}$ dans E_i, et cela quel que soit i; f est sommable et son intégrale est égale à

$$\sum \frac{1}{i a_i u_i} u_i = \sum \frac{1}{i a_i} < \sum \frac{1}{i^2}.$$

Au contraire, $f\varphi$ n'est pas sommable, car la série

$$\sum \frac{1}{i a_i u_i} a_i u_i = \sum \frac{1}{i}$$

est inférieure à l'intégrale de $f\varphi$.

Si φ est une fonction sommable, dont le carré n'est pas sommable, on peut toujours trouver une fonction f, dont le carré est sommable (1), *et telle que $f\varphi$ ne soit pas sommable dans l'intervalle considéré.*

Supposant encore qu'il s'agit de fonctions positives, appelons E_i l'ensemble des points où l'on a : $i\varepsilon \leqslant \varphi(x) < (i+1)\varepsilon$. La série $\sum i^2 \varepsilon^2 m(E_i)$ est divergente par hypothèse.

Si, dans chaque E_i, f est constante et égale à λ_i, l'intégrale de f^2 est $\sum \lambda_i^2 m(E_i)$; cette série doit être convergente. Et si la série $\sum \lambda_i i \varepsilon m(E_i)$, valeur approchée par défaut de l'intégrale de $f\varphi$, est divergente, la fonction f répondra à la question.

Nous sommes ainsi amenés, étant donné une série divergente à termes positifs $\sum i^2 \varepsilon^2 m(E_i) = \sum u_i$, à trouver des multiplicateurs $\dfrac{\lambda_i}{i\varepsilon} = \alpha_i$ tels que la série $\sum \lambda_i i \varepsilon m(E_i) = \sum \alpha_i u_i$ soit encore divergente, mais que la série $\sum \lambda_i^2 m(E_i) = \sum \alpha_i^2 u_i$ soit convergente.

Réunissons les u_i en groupes de façon que les u_i d'un même groupe aient une somme supérieure à 1, on remplace ainsi la série Σu_i par une série Σv_i à termes plus grands que 1. A tous les u_i contenus dans v_p nous associons comme multiplicateurs α_i le nombre $\dfrac{1}{p v_p}$. Alors la série $\sum \alpha_i u_i = \sum v_p \times \dfrac{1}{p v_p}$ est divergente. Au contraire, la série

$$\sum \alpha_i^2 u_i = \sum v_p \left(\frac{1}{p v_p}\right)^2 = \sum \frac{1}{p^2 v_p} < \sum \frac{1}{p^2}$$

est convergente.

Les remarques précédentes ne sont jusqu'ici démontrées que pour un intervalle d'intégration fini, l'extension à un intervalle infini est immédiate.

---

(1) Bien entendu si f^2 est sommable, f l'est aussi; cela résulte par exemple de l'inégalité

$$|f| \leqslant \tfrac{1}{2}(1+f^2)$$

ou de l'inégalité de Schwarz.

III.

[6] Lorsqu'il s'agit de fonctions continues, pour le calcul de l'intégrale de $f\varphi$ on emploie souvent les deux procédés d'intégration par substitution et par parties. Ces procédés peuvent encore être employés lorsqu'il s'agit de fonctions sommables quelconques, mais ces procédés ne résultent plus immédiatement des deux identités

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}; \qquad \frac{d(uv)}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$$

et il est nécessaire de les légitimer.

Comme la démonstration que je vais employer est assez différente de la démonstration classique et comme on ne démontre le plus souvent que des cas particuliers des théorèmes généraux relatifs à l'intégration au sens de Riemann [1], je m'occuperai aussi de cette intégration.

La démonstration, qu'il s'agisse de fonctions intégrables ou sommables [2], se résume en ceci : on montre que les deux identités précédentes sont vraies presque partout et qu'on peut négliger l'ensemble des points où elles ne sont pas vraies.

Soit $u(x)$ une fonction intégrable, $V(x) = k + \int_a^x u(\xi)\,d\xi$ une de ses intégrales indéfinies. On sait que $u(\xi)$ est bornée et de plus continue partout, sauf tout au plus aux points d'un ensemble de mesure nulle, cette propriété étant d'ailleurs caractéristique des fonctions intégrables. Il résulte de là, en appliquant le premier théorème de la moyenne à $V(x)$, *que $V(x)$ est une fonction à nombres dérivés bornés ayant de plus une dérivée continue en tout point, sauf peut-être aux points d'un ensemble de mesure nulle convenablement choisi.*

---

(1) C'est ainsi que M. Jordan (*loc. cit.*, t. I, nº 141, p. 133) étudie seulement le changement de variable

$$x = \int \varphi'(t)\,dt,$$

où φ' est *continue* et de signe constant.

Je dois à l'obligeance de M. de la Vallée-Poussin de pouvoir signaler un résultat dû à M. Dini (*Fundamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, pp. 371 et suiv.) plus voisin de celui que j'ai en vue. M. Dini légitime la formule

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_a^b f[\psi(y)]\,\lambda_\psi\,dy,$$

λ_ψ étant un nombre dérivé de ψ et cela pour des cas déjà très généraux.

Dans le *Cours* de M. de la Vallée-Poussin (2e édit., t. I, p. 220) on trouvera l'étude du cas où λ_ψ est une dérivée continue de signe quelconque. Dans ce qui suit, je n'étudierai que les changements de variable univoques; pour les cas plus généraux on pourra imiter ce que fait M. de la Vallée-Poussin.

(2) Je rappelle qu'intégrable veut dire ayant une intégrale au sens de Riemann, et sommable ayant une intégrale à mon sens.

Ces propriétés caractérisent les intégrales indéfinies au sens de Riemann; soit en effet $F(x)$ une fonction à nombres dérivés bornés admettant une dérivée $f(x)$ continue quand on néglige les points d'un ensemble E de mesure nulle; f n'est pas définie aux points de E, mais si x_0 est un point de E, il existe des points en lesquels f est définie aussi voisins que l'on veut de x_0, de sorte qu'on peut définir les limites inférieure et supérieure de f quand x tend vers x_0. Nous prendrons, par exemple, $f(x_0)$ égal à la moyenne arithmétique de ces deux limites. La fonction $f(x)$ ainsi partout définie n'ayant comme points de discontinuité que des points de E est intégrable et la fonction $\varphi(x) = F(x) - \int^x f(\xi)\,d\xi$ est à nombres dérivés bornés et a une dérivée nulle sauf peut-être aux points de E. Je dis que $\varphi(x)$ est une constante.

D'après les hypothèses, en effet, il existe un nombre M tel que l'on ait constamment

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| < Mh.$$

Enfermons les points de E dans un ensemble $\mathcal{E}$ d'intervalles de longueur totale inférieure à σ et soit (a, b) l'intervalle positif où F est donnée.

Si a appartient à E, a est dans un intervalle de $\mathcal{E}$, l'intervalle (l, m), j'attache à a l'intervalle (a, m). Si a n'appartient pas à E j'attache à a un intervalle (a, n) tel que l'on ait, ce qui est possible puisque $\dfrac{d\varphi(a)}{dx} = 0$,

$$|\varphi(m) - \varphi(a)| < \varepsilon(m-a), \qquad \text{pour} \qquad m < n.$$

En tous cas j'attache ainsi à a un intervalle (a, a_1), j'opère ensuite sur a_1 comme sur a, ce qui me donne (a_1, a_2), et ainsi de suite. Si je n'atteins pas b au bout d'un nombre fini d'opérations, les points $a_1, a_2, \ldots$ tendent vers un point limite a_ω à partir duquel j'opère comme sur a pour définir $(a_\omega, a_{\omega+1})$, etc. On définit ainsi une chaîne d'intervalles.

Posons quelques définitions : $\sum_1^\omega u_i$ est la somme d'une série ordinaire où i prend toutes les valeurs inférieures à ω, c'est-à-dire toutes les valeurs entières finies. Si $\alpha - 1$ existe, c'est-à-dire si α transfini est de la première espèce, par définition on a $\sum_1^\alpha u_i = u_\alpha + \sum_1^{\alpha-1} u_i$. Si $\alpha - 1$ n'existe pas, c'est-à-dire si α est de la seconde espèce, $\sum_1^\alpha u_i$ est la limite, si elle existe, de $\sum_1^\beta u_i$ quand on donne à β une suite de valeurs croissantes tendant vers α.

Ces définitions supposent α transfini de la seconde classe numérique de M. Cantor (première classe de nombres transfinis). Alors les u_i forment un ensemble dénombrable. Il n'en saurait d'ailleurs être autrement pour que la somme à définir existe, au moins si les u_i sont positifs, car sans cela pour ε assez petit il devrait y avoir une infinité non dénombrable de u_i plus grands que ε.

Une série ordinaire $\sum_1^\omega u_i$ étant donnée, la ranger en série de type α c'est faire correspondre à tout nombre de première espèce au plus égal à α l'un des indices des u_i et cela de façon que chaque indice soit employé une fois. On démontrera facilement en copiant le raisonnement classique que les deux séries $\sum_1^\omega u_i$, $\sum_1^\alpha v_j$ qu'on fait ainsi correspondre ont la même somme si l'une d'elles (et par suite l'autre) est absolument convergente, c'est-à-dire si les sommes $\sum_1^\omega |u_i|$, $\sum_1^\alpha |v_j|$ ont un sens.

Ceci posé, si a_α a été trouvé comme point de la chaîne construite et s'il est entre a et b, on a évidemment

$$b - a > a_\alpha - a = \sum_1^\alpha (a_i - a_{i-1});$$

d'où il résulte qu'on atteint ou dépasse b avec une chaîne contenant une infinité dénombrable d'intervalles.

D'autre part on a évidemment, a_α étant le dernier point de la chaîne avant b,

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(b) - \varphi(a_\alpha) + \sum_1^\alpha [\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})].$$

La série de type α est évidemment absolument convergente, car pour les a_{i-1} faisant partie de E on a :

$$|\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})| < \mathrm{M}(a_i - a_{i-1}),$$

et pour ceux qui ne font pas partie de E

$$|\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})| \leqslant \varepsilon(a_i - a_{i-1});$$

donc on a :

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| < \sigma\mathrm{M} + \varepsilon(b - a).$$

Et, puisque ε et σ sont quelconques, $\varphi(b) - \varphi(a) = 0$.

Or, ce que nous venons de faire pour (a, b) aurait pu être fait pour (a, x), $(x < b)$; donc $\varphi(x)$ est une constante. La proposition est démontrée [1].

---

[1] Pour plus de détails sur les chaînes d'intervalles, voir mes *Leçons sur l'intégration*, ch. IV, en particulier page 63.

La proposition caractéristique des fonctions intégrables qui nous a servi a été obtenue indépendamment par M. Vitali (*Rendiconti del R. Istituto Lomb. di sc. e lett.*, série II, vol. XXXVII, 1904, pp. 69-73) et par moi-même (*Leçons sur l'intégration*, pp. 29 et 109).

[7] Soit $u(x)$ une fonction sommable, $V(x) = k + \int_a^x u(\xi)d\xi$ une de ses intégrales indéfinies. On sait que $u(x)$ est la dérivée de $V(x)$ en tous ses points sauf au plus ceux d'un ensemble de mesure nulle et que $V(x)$ est à variation bornée, sa variation totale dans un intervalle (λ, μ) étant au plus $\int_\lambda^\mu |u(\xi)|d\xi$; il y a, en réalité, égalité entre cette intégrale et la variation totale.

Soient des intervalles, non empiétant les uns sur les autres, (λ_1, μ_1), (λ_2, μ_2), ... La somme des variations totales de $V(x)$ dans ces intervalles sera au plus l'intégrale de $|u(\xi)|$ étendue à l'ensemble de ces intervalles. Or, il existe évidemment un nombre σ tel que tout ensemble de mesure inférieure à σ fournisse dans $\int |u(\xi)|d\xi$ une contribution au plus égale à un nombre ε arbitrairement choisi positif (¹).

Donc, étant donné un ensemble de points de mesure nulle, on peut toujours l'enfermer dans un ensemble d'intervalles tels que la somme des variations totales correspondantes de $V(x)$ soit aussi petite que l'on veut. Disons, pour résumer, que $V(x)$ *est à variation bornée et de variation totale nulle dans tout ensemble de mesure nulle.*

Ces propriétés caractérisent les intégrales indéfinies des fonctions sommables; soit, en effet, $F(x)$ une fonction y satisfaisant. $F(x)$ ayant une variation totale bornée a presque partout (²) une dérivée f, et la fonction f égale à cette dérivée où elle existe et à zéro ailleurs est sommable. Des hypothèses relatives à F et du théorème d'après lequel une intégrale indéfinie a presque partout pour dérivée la fonction intégrée il résulte que la fonction $\varphi = F(x) - \int^x f(x)dx$ a une dérivée nulle presque partout. D'ailleurs, dans l'ensemble de mesure nulle E des points où elle n'a pas une dérivée nulle, elle est à variation totale nulle. Enfermons les points de E dans un ensemble $\mathcal{E}_1$ d'intervalles tel que la somme des variations totales correspondantes de φ soit inférieure à ε.

Raisonnons maintenant comme au numéro précédent, en ayant soin, quand la construction de la chaîne nous conduira à un point a_i appartenant à E, auquel cas a_i est intérieur à un intervalle (k, l) de $\mathcal{E}_1$, d'attacher à a_i l'intervalle (a_i, l); de la sorte, on arrivera à l'égalité

$$|\varphi(b) - \varphi(a)| < \varepsilon + \varepsilon(b-a)$$

et l'on en conclura $\varphi(x) \equiv \varphi(a)$ (³).

(¹) Pour la détermination de ce nombre σ on peut imiter ce qui a été fait dans la note 1 du nº 2, page 31.

(²) J'emploie « presque partout » pour « sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle ».

(³) J'avais énoncé cette proposition incidemment et sans démonstration dans les dernières lignes et dans la note de la page 129 de mes *Leçons sur l'intégration*, 1904. J'en ai donné la démonstration dans une note parue aux *Rendiconti dei Lincei* (*Sur la recherche des fonctions primitives par l'intégration*, vol. XVI, 1er semestre 1907). Entre temps, la proposition avait

[8] Intégration par substitution. — *Si la fonction $f(x)$ a une intégrale dans (a, b) et si la formule*

$$x = \varphi(t) = a + \int_\alpha^t \Psi(t)\,dt$$

définit une fonction non décroissante de t qui varie de a à b quand t varie de α à β, on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\Psi(t)\,dt.$$

Cet énoncé suppose que f et φ sont intégrables, s'il s'agit d'intégrales au sens de Riemann; que f et φ sont sommables, s'il s'agit d'intégrales à mon sens. Je ne m'occupe que de ce dernier cas, le cas des fonctions intégrables se traitant d'une façon entièrement analogue en utilisant les résultats du numéro 6.

L'énoncé indiqué est presque inutilement général, je veux dire qu'il démontre plus qu'il n'est nécessaire pour le changement de variable ordinaire. On n'y suppose pas, en effet, que l'inversion de la fonction $x = \varphi(t)$ puisse se faire d'une façon univoque; on n'exclut donc pas le cas où $\varphi(t)$ aurait des traits d'invariabilité. Mais ce cas se ramène de suite à celui où l'inversion est possible. Il suffit de prendre t' égal à t diminué de la mesure $\mu(t)$ des traits d'invariabilité depuis α jusqu'à t; on prendra $\beta' = \beta - \mu(\beta)$, $\alpha' = \alpha$, $\Psi'(t') = \Psi(t)$, $\varphi'(t') = \varphi(t)$ et il suffira de légitimer le changement de variable défini par ces symboles accentués puis de remarquer que les deux intégrales

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\Psi(t)\,dt, \qquad \int_{\alpha'}^{\beta'} f[\varphi'(t')]\,\Psi'(t')\,dt'$$

ont un sens en même temps et sont égales.

On pourra donc supposer que de $x = \varphi(t)$ se déduit la fonction continue univoque $t = \rho(x)$.

La correspondance univoque entre x et t fait correspondre à tout ensemble E_x de valeurs de x, un ensemble E_t de valeurs de t et inversement. A un ensemble A_x d'intervalles non empiétant et enfermant E_x correspond un ensemble A_t d'intervalles non empiétant et enfermant E_t et réciproquement. Or, entre deux intervalles correspondants I_x et I_t on a évidemment la relation

$$m(I_x) = \int_{I_t} \Psi(t)\,dt,$$

été retrouvée et démontrée par M. Vitali (*Sulle funzioni integrali, Atti della Accad. di Torino*, vol. XL, 1905). Pour d'autres formes de cette condition nécessaire et suffisante, voir *Applications d'un théorème sur la convergence en moyenne*, par E. Fischer, *C. R.*, 1er semestre 1907.

donc

$$m(\mathrm{A}_x) = \int_{\mathrm{A}_t} \Psi(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \chi(t)\,dt,$$

en désignant par $\chi(t)$ la fonction égale à $\Psi(t)$ dans les intervalles constituant $\mathrm{A}(t)$ et égale à zéro ailleurs.

Considérons une suite infinie d'ensembles A_t, chacun de ces ensembles étant contenu dans le précédent. Soient $\mathcal{E}_t$ l'ensemble des points communs à tous ces A_t, $\mathcal{E}_x$ l'ensemble correspondant, $\mathrm{X}(t)$ la fonction égale à $\Psi(t)$ aux points de $\mathcal{E}_t$ et égale à zéro ailleurs.

Quand les A_t varient, $\chi(t)$ tend en décroissant vers $\mathrm{X}(t)$; donc $\int_\alpha^\beta \chi(t)\,dt$ tend vers $\int_\alpha^\beta \mathrm{X}(t)\,dt$ [1].

Donc on a

$$m(\mathcal{E}_x) \leqslant \int_{\mathcal{E}_t} \Psi(t)\,dt.$$

Or, on peut choisir les A_t de façon que $\mathcal{E}_t$ ne diffère de E_t que par un ensemble de mesure nulle; donc

$$m(\mathrm{E}_x) \leqslant \int_{\mathrm{E}_t} \Psi(t)\,dt.$$

F_t et F_x étant formés par les points qui ne font pas partie de E_t et E_x on a de même

$$m(\mathrm{F}_x) \leqslant \int_{\mathrm{F}_t} \Psi(t)\,dt.$$

Or, comme on a

$$m(\mathrm{E}_x) + m(\mathrm{F}_x) = b - a = \int_\alpha^\beta \Psi(t)\,dt = \int_{\mathrm{E}_t} \Psi(dt)\,dt + \int_{\mathrm{F}_t} \Psi(t)\,dt,$$

on en déduit

$$m(\mathrm{E}_x) = \int_{\mathrm{E}_t} \Psi(t)\,dt.$$

De là résulte qu'à un E_t de mesure nulle correspond un E_x de mesure nulle. La réciproque n'est pas nécessairement vraie, mais si à E_x de mesure nulle correspond E_t, puisque $\Psi(t)$ est équivalente à une fonction non négative, on peut affirmer qu'aux points de E_t, $\Psi(t)$ est nulle, exception faite des points d'un ensemble e_t de mesure nulle.

---

[1] Cela résulte soit de la sixième condition du problème d'intégration (voir *Leçons sur l'intégration*, p. 99), soit d'un théorème qui sera rappelé plus loin, n° 11.

Ceci posé, supposons $f(x)$ sommable et bornée ; alors $f[\varphi(t)]\,\Psi(t)$ est sommable. D'ailleurs, sauf aux points d'un ensemble E_x de mesure nulle (en x), $f(x)$ est la dérivée de $\mathcal{F}(x)=\int_a^x f(x)dx$. E_t et e_t correspondant à E_x comme il a été dit plus haut, on a évidemment

$$\frac{d\mathcal{F}[\varphi(t)]}{dt}=f[\varphi(t)]\,\Psi(t),$$

sauf aux points de $e_t+e'_t$, e'_t étant l'ensemble de mesure nulle (en t) des valeurs de t pour lesquelles $\Psi(t)$ n'est pas la dérivée de son intégrale indéfinie.

Comparons $\mathcal{F}[\varphi(t)]$ et $\mathcal{G}(t)=\int_\alpha^t f[\varphi(t)]\,\Psi(t)dt$. Ces deux fonctions de t s'annulent pour $t=\alpha$, elles ont la même dérivée presque partout, si donc on démontre que $\mathcal{F}[\varphi(t)]$ est une intégrale indéfinie en t, la différence $\mathcal{F}[\varphi(t)]-\mathcal{G}(t)$ sera une intégrale indéfinie à dérivée presque partout nulle; donc elle sera identiquement nulle et le théorème sera démontré.

Or, la substitution $x=\varphi(t)$ transforme une fonction non décroissante en une fonction non décroissante, donc transforme $\mathcal{F}(x)$ en une fonction à variation bornée. De plus, la variation totale de $\mathcal{F}[\varphi(t)]$ dans un ensemble A_t formé d'intervalles non empiétant étant celle de $\mathcal{F}(x)$ dans l'ensemble A_x correspondant, $\mathcal{F}[\varphi(t)]$ est à variation totale nulle dans tout ensemble E_t de mesure nulle. Ainsi $\mathcal{F}[\varphi(t)]$ est une intégrale indéfinie en t et le théorème est démontré pour les fonctions f bornées.

Si f sommable n'est pas bornée, désignons par f_n la fonction égale à f quand f est inférieure à n et égale à zéro ailleurs. Le théorème s'applique à f_n et à $|f_n|$; de là résulte que les intégrales $\int_\alpha^\beta |f_n[\varphi(t)]\,\Psi(t)|\,dt$ ne croissent pas indéfiniment avec n, donc $f[\varphi(t)]\,\Psi(t)$ est sommable. D'ailleurs les intégrales de $f(x)$ et de $f[\varphi(t)]\,\Psi(t)$ étant les limites de celles de $f_n(x)$ et de $f_n[\varphi(t)]\,\Psi(t)$, le théorème est vrai de f comme des f_n.

Si l'on s'occupait de fonctions intégrables, on raisonnerait exactement de la même manière, seulement on prendrait pour E_x et e'_t les ensembles des points de discontinuité de $f(x)$ et de $\Psi(t)$ et on utiliserait les propriétés caractéristiques des fonctions intégrables et des intégrales indéfinies qui ont été signalées au numéro 6. Pour ce cas on pourrait, bien entendu, faire disparaître toute trace de l'emploi des intégrales à mon sens, mais il ne résulterait de là, il me semble, que des complications dans l'exposition.

[9] Intégration par parties. — *Si f et φ sont deux fonctions sommables dans (a, b) et y admettant respectivement* F *et* Φ *comme intégrales indéfinies, on a :*

$$\int_a^b f(x)\,\Phi(x)dx=[F(x)\,\Phi(x)]_a^b-\int_a^b F(x)\,\varphi(x)dx.$$

Opérons comme précédemment. Nous remplaçons la limite supérieure b par une variable x, les deux membres sont des fonctions de x qui s'annulent pour $x = \alpha$, ils ont la même dérivée pour tous les points où f et φ sont les dérivées de F et Φ, il suffit donc de démontrer que le second membre est une intégrale indéfinie pour qu'on en puisse conclure l'égalité des deux membres.

Il suffit de prouver que le produit $F(x)\,\Phi(x)$ de deux intégrales indéfinies est une intégrale indéfinie; tout d'abord ce produit est à variation bornée. Soit maintenant M la limite supérieure de $|F(x)|$ et $|\Phi(x)|$ dans (a, b) et considérons une suite dénombrable d'intervalles (a_k, b_k) non empiétant. La variation de $F(x)\,\Phi(x)$ dans cet ensemble est

$$\sum |F(b_k)\Phi(b_k) - F(a_k)\Phi(a_k)| = \sum |[F(b_k) - F(a_k)]\,\Phi(b_k) + F(a_k)[\Phi(b_k) - \Phi(a_k)]|$$

et cette quantité est au plus égale au produit par M de la somme V des variations de F et de Φ dans l'ensemble E d'intervalles considéré. Or, quand on fait varier E de façon que sa mesure tende vers zéro, V tend vers zéro, donc la variation de $F\Phi$ dans E tend aussi vers zéro.

La proposition est exacte aussi pour les intégrales riemanniennes; sa démonstration est analogue.

L'intégration par parties peut encore se légitimer en faisant appel à la théorie des intégrales doubles qui montre que dans l'expression $\int_a^b f(x)\left(\int^x \varphi(t)\,dt\right)dx$ on peut intervertir l'ordre des intégrations.

IV.

[**10**] Nous considérons l'intégrale $I_n = \int_0^l f(\alpha)\,\varphi(\alpha, n)\,d\alpha$, construite avec un noyau donné $\varphi(\alpha, n)$ et une fonction $f(\alpha)$, et nous voulons rechercher sa limite pour n infini. Le seul cas élémentaire est celui où la suite des fonctions $f(\alpha)\,\varphi(\alpha, n)$ converge et est intégrable terme à terme. Bien que ce cas ne soit pas celui des intégrales dites singulières que nous voulons étudier, il est utile de s'y arrêter un instant.

Soit une suite $u_1, u_2, \ldots$ de fonctions sommables convergeant vers une fonction sommable u. Soit $E_n(\varepsilon)$ l'ensemble des points de l'intervalle considéré en lesquels on a, quel que soit $N \geqslant n$,

$$|u_n - u| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $F_n(\varepsilon)$ l'ensemble des autres points. On a évidemment (1)

$$\left| \int_{E_n(\varepsilon)} u_N\,dx - \int_{E_n(\varepsilon)} u\,dx \right| \leqslant \varepsilon\, m[E_n(\varepsilon)].$$

(1) Pour que $m[E_n(\varepsilon)]$ et $m(F_n(\varepsilon)]$ existent certainement, il faut que l'intervalle d'intégration soit fini, ce qu'on supposera; mais l'extension des résultats aux intervalles infinis est immédiate.

Or, puisque $\int_{F_n(\varepsilon)} u\,dx$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, l'égalité

$$\int_{E_n(\varepsilon)+F_n(\varepsilon)} u\,dx = \int_{E_n(\varepsilon)+F_n(\varepsilon)} u_N\,dx - \int_{F_n(\varepsilon)} u_N\,dx + \int_{F_n(\varepsilon)} u\,dx + \theta\varepsilon m[E_n(\varepsilon)],$$

où θ est compris entre -1 et $+1$, montre que $\int u_N\,dx$ tendra vers $\int u\,dx$ toutes les fois que $\int_{F_n(\varepsilon)} u_N\,dx$ tendra vers zéro avec ε et $\frac{1}{n}$, $\lim_{\varepsilon=0}\left[\lim_{n=\infty}\int_{F_n(\varepsilon)} u_N\,dx\right] = 0$.

Si l'on désigne par λ_n une fonction égale à 1 aux points de $F_n(\varepsilon)$ et à 0 ailleurs on a, par définition même,

$$\int_{F_n(\varepsilon)} u_N\,dx = \int_a^b u_N\lambda_n\,dx,$$

(a, b) étant l'intervalle d'intégration, $(b > a)$. Donc on peut utiliser les théorèmes A, B, C pour l'évaluation de cette intégrale.

La quantité

$$m[F_n(\varepsilon)] = \int_a^b \lambda_n\,dx$$

est une fonction non décroissante de $\varepsilon > 0$ qui, pour chaque valeur de ε, tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Ceci posé :

α Pour appliquer le théorème A, je suppose $|u_i| \leqslant M$, quel que soit i, alors on a :

$$\left|\int_{F_n(\varepsilon)} u_N\,dx\right| \leqslant M\,m[F_n(\varepsilon)],$$

et la suite des u_i est intégrable terme à terme;

β Pour appliquer le théorème B je suppose u_i à variation bornée, et soit v_i sa variation totale de a à b, on a :

$$\left|\int_{F_n(\varepsilon)} u_N\,dx\right| \leqslant v_N\,m[F_n(\varepsilon)];$$

si l'on a, quel que soit i, $v_i \leqslant M$, la suite des u_i est intégrable terme à terme.

γ Pour appliquer le théorème C, je suppose que u_i^2 est sommable et que l'on a, quel que soit i, $\int_a^b u_i^2\,dx \leqslant M$; alors si l'on remarque que $\lambda_n^2 = \lambda_n$ on en déduit :

$$\left|\int_{F_n(\varepsilon)} u_N\,dx\right| \leqslant \sqrt{M\,m[F_n(\varepsilon)]},$$

et la suite des u_i est intégrable terme à terme.

Avant d'énoncer les résultats, remarquons que le second théorème de la moyenne ne nous donne pas un cas nouveau, ce qui est fort naturel puisque λ_n n'est jamais négatif.

Si les hypothèses du cas β sont en effet remplies, on a, quel que soit x dans (a, b), $|u_N(x)| \leqslant |u_N(a)| + M$ et les hypothèses du cas α sont aussi vérifiées.

Remarquons encore que si les conditions indiquées sont vérifiées pour les u_i des conditions analogues sont vérifiées par les restes $u - u_i$. La réciproque n'est pas vraie, mais cela importe peu, car on peut évidemment considérer la suite des u_i comme somme de la suite $u_i - u$ et d'une suite dont tous les termes sont égaux à u.

Une suite de fonctions sommables u_i convergeant vers une fonction sommable u est intégrable terme à terme : α, si les restes $u - u_i$ sont uniformément bornés, ou bien : γ, si les fonctions $(u - u_i)^2$ sont sommables et ont des intégrales uniformément bornées (¹). Les conditions précédentes, convergence et condition α, peuvent n'être pas remplies aux points d'un ensemble de mesure nulle sans qu'il y ait rien à changer à nos conclusions.

[**11**] Avec la forme qui vient d'être adoptée l'énoncé précédent s'applique à la suite $u_i + v$ s'il s'applique à u_i et si v est sommable. Voyons ce que l'on peut dire de la suite $u_i v$.

Si la condition α est vérifiée, c'est-à-dire si $|u - u_i|$ est toujours inférieure à un un nombre M, $|uv - u_i v|$ est toujours inférieure à $M|v|$; par suite, si uv est sommable, $u_i v$ l'est aussi. De plus on a :

$$\left|\int uv\,dx - \int u_N v\,dx\right| \leqslant M \int |v|\,dx,$$

à quelque ensemble mesurable qu'on étende les intégrales. Si on les étend à l'ensemble $\mathcal{F}_n(\varepsilon)$ relatif à $u_i v$, analogue à l'ensemble $F_n(\varepsilon)$ relatif à u_i, l'intégrale de $|v|$ tend vers zéro et par conséquent la suite $u_i v$ est intégrable terme à terme.

Si la condition γ est vérifiée, c'est-à-dire si $\int_a^b (u - u_i)^2 dx$ est toujours inférieure à M, et si v^2 est sommable, uv et les $u_i v$ sont sommables en même temps et l'on a :

$$\left|\int_{\mathcal{F}_n(\varepsilon)} u_N v\,dx\right| \leqslant \sqrt{M \cdot \int_{\mathcal{F}_n(\varepsilon)} v^2\,dx},$$

donc la suite $u_i v$ est intégrable terme à terme.

(¹) J'ai donné la première partie de ce théorème dans ma thèse, puis dans mes *Leçons sur l'Intégration*, p. 114. La seconde partie est due à M. Friedrich Riesz (*Sur les systèmes orthogonaux de fonctions*, C. R., 18 mars 1907).

D'où les énoncés suivants :

α′ La suite u_1, u_2, …, formée de fonctions sommables et convergeant vers une fonction sommable u est intégrable terme à terme si, quel que soit i et x, on a

$$| u(x) - u_i(x) | \leqslant V(x),$$

$V(x)$ étant une fonction sommable (¹).

γ′ La suite $u_1 v$, $u_2 v$, …, convergeant vers la fonction uv, est intégrable terme à terme si uv et v^2 sont sommables, si $(u - u_i)^2$ est sommable et tel que, quel que soit i, on ait dans l'intervalle considéré

$$\int (u - u_i)^2 dx \leqslant M,$$

M étant une constante (²).

Du théorème α′ il résulte en particulier que si des fonctions sommables v_i tendent en croissant vers une fonction sommable v la suite est intégrable terme à terme. Cela

---

(¹) J'ai donné ce théorème dans un article récent (*Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'Equation de Fredholm*, Bull. de la Soc. math., 1908). On est conduit d'ailleurs très simplement à ce théorème en recherchant quelles hypothèses on doit faire pour que les raisons qui nous ont permis de négliger $\int_{F_n(\varepsilon)} u\,dx$ permettent aussi de négliger $\int_{F_n(\varepsilon)} u_n dx$.

A la page 121 des *Leçons sur la Théorie du potentiel newtonien*, professées à la Sorbonne en 1894-95 par M. Poincaré et rédigées par MM. Le Roy et Vincent, qui furent publiées en 1899 chez Carré et Naud, on lit :

Soit l'intégrale $\int_S f(x, y, z)dx\,dy$ étendue à un certain domaine S.

Supposons :

1° que le contour C qui limite S ne dépende pas de z;

2° que l'on ait en tout point de S : $|f(x, y, z)| < \varphi(x, y)$, φ étant une fonction positive;

3° que l'intégrale $\int \varphi\,dx\,dy$, étendue au domaine S, ait un sens;

4° enfin, que l'on ait $\text{Lim}_{z=0} f(x, y, z) = f(x, y, 0)$, quels que soient x et y, pourvu qu'ils restent fixes.

Dans ces conditions, on a la relation :

$$\text{Lim}_{z=0} \int_S f(x, y, z)\,dx\,dy = \int_S f(x, y, 0)\,dx\,dy.$$

On voit que c'est le théorème α′ énoncé pour le cas de deux variables. Comme cet énoncé est donné sans démonstration, il est difficile de se rendre compte de sa portée exacte, d'autant que les explications qui le précèdent semblent indiquer qu'il s'agit de fonctions continues et que ce n'est qu'en des points exceptionnels qu'on renonce à la convergence uniforme de $f(x, y, z)$ vers $f(x, y, 0)$. En tous cas cet énoncé me paraît devoir être signalé, ne serait-ce que parce qu'on ne connaissait pas d'autre cas que celui des séries uniformément convergentes pour l'intégration terme à terme des séries, jusqu'à ce que M. Osgood ait démontré le cas particulier du théorème α où les u et u_i sont continues (*On the non-uniform convergence*, American Journal, 1897).

(²) Toutes ces propriétés ne sont que des cas particuliers d'un théorème très général dû à M. Vitali (*Sull' integrazione per serie*, Rend. del Circ. mat. di Palermo, t. XXIII, 1907, pp. 137-155).

n'est d'ailleurs guère surprenant, puisque cette propriété est la sixième condition que j'ai imposée *à priori* à l'intégrale dans l'énoncé du problème d'intégration (voir mes *Leçons sur l'Intégration*, p. 99).

Il n'est pas sans intérêt de remarquer, comme le fait M. Beppo Levi (1), que la fonction v, limite de la suite croissante des v_i, est sommable quand la série des intégrales des v_i est convergente, de sorte qu'on peut dire que la suite est toujours intégrable terme à terme que v soit sommable ou non. Pour le prouver, remarquons que $u = v - v_1$ et les $u_i = v_i - v_{i-1}$ ne sont jamais négatifs; donc, si la série des $\int u_i\,dx$ n'est pas convergente, pour n assez grand et pour i surpassant une certaine limite, $\int_{E_n(\varepsilon)} v_i\,dx$ surpasse tel nombre que l'on veut M; alors $\int_{E_n(\varepsilon)} v\,dx$ surpasse aussi M et par suite

$$\int_a^b v\,dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_{E_n(\varepsilon)} v\,dx$$

est infinie.

Remarquons encore avec M. Levi qu'une série dont les termes sont en valeur absolue égaux aux u_i représente *à fortiori* une fonction sommable et est intégrable terme à terme quand la série des intégrales des u_i est convergente; donc : *une série $\sum w_i$ est intégrable terme à terme dans un intervalle (a, b), dans lequel elle est convergente, si la série $\sum \int_a^b |w_i|\,dx$ est convergente. Ou plus particulièrement une série $\sum w_i$ est intégrable terme à terme dans (a, b), si la série $\sum |w_i|$ converge dans cet intervalle vers une fonction sommable.* Ces énoncés ne supposent pas l'intervalle (a, b) fini.

V.

[**12**] Considérons l'opération fonctionnelle $I_n(f) = \int_a^b f(\alpha)\varphi(\alpha, n)\,d\alpha$ faisant correspondre un nombre à chaque fonction $f(\alpha)$ appartenant à une certaine famille $\mathcal{F}$ de fonctions. Nous allons rechercher que doit être le noyau $\varphi(\alpha, n)$ pour que I_n tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$, quelle que soit f.

Nous savons déjà que, pour que I_n ait un sens pour toutes les fonctions de la famille $\mathcal{F}$, il faut et il suffit :

(1) *Sopra l'integrazione delle serie* (Rend. del Ist. Lomb. di sc. e lett., série II, vol. XXXIX, 1906, pp. 775-780).

1° que $\varphi(x, n)$ soit équivalente à une fonction bornée, pour n fixe, si $\mathcal{F}$ est la famille des fonctions sommables;

2° que $\varphi(x, n)$ soit de carré sommable, si $\mathcal{F}$ est la famille des fonctions dont le carré est sommable;

3° que $\varphi(x, n)$ soit sommable, si $\mathcal{F}$ est la famille des fonctions sommables bornées.

Ces conditions résultent des nos 4 et 5.

[13] I. — *Pour que* $I_n(f)$ *tende vers zéro avec* $\frac{1}{n}$, *quelle que soit la fonction sommable* f, *il faut et il suffit*

1° *que le noyau* $\varphi(x, n)$ *soit équivalent à une fonction restant inférieure en module à un nombre fixe* M *indépendant de* x *et de* n;

2° *que* $\int_\lambda^\mu \varphi(x, n)\,dx$ *tende vers zéro avec* $\frac{1}{n}$, *quels que soient* λ *et* μ *pris dans* (a, b).

Les conditions sont suffisantes. Pour le démontrer, j'utiliserai un mode de raisonnement de proche en proche qui m'a déjà servi pour démontrer un théorème de Riemann, cas particulier de celui dont il s'agit ici, et d'après lequel les coefficients d'une série de Fourier tendent vers zéro [1]. On se rendra compte facilement que ce raisonnement revient à la définition des intégrales dont on s'occupe à l'aide de certaines sommes riemanniennes; inversement, d'ailleurs, les propositions démontrées précédemment à l'aide de sommes riemanniennes peuvent être obtenues par un raisonnement analogue au suivant.

$\varphi(x, n)$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé, soit une fonction f et supposons qu'on puisse déterminer des fonctions f_p telles que $I_n(f_p)$ tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$ pour chaque valeur de p, et telles que $\int_a^b |f - f_p|\,dx$ tende vers zéro avec $\frac{1}{p}$. La relation évidente

$$\left| \int_a^b f(x)\,\varphi(x, n)\,dx - \int_a^b f_p(x)\,\varphi(x, n)\,dx \right| \leqslant \mathrm{M} \int_a^b |f - f_p|\,dx,$$

qui résulte du théorème A, montre que $I_n(f)$ tend aussi vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Ceci posé, il est évident que $I_n(f)$ tend vers zéro si f est égale à 1 dans un nombre *fini* d'intervalles et égale à zéro ailleurs.

Si f est égale à 1 dans une infinité d'intervalles et égale à zéro ailleurs, on prendra pour f_p la fonction égale à 1 dans les p premiers intervalles considérés et égale à zéro ailleurs, donc $I_n(f)$ tend vers zéro.

---

(1) *Sur les séries trigonométriques* (Annales de l'École normale, oct. 1903). Voir aussi mes *Leçons sur les séries trigonométriques*, no 13.

Si f est égale à 1 dans un ensemble mesurable E et égale à zéro ailleurs, on prendra pour f_p la fonction égale à 1 dans un ensemble d'intervalles enfermant E et dont la mesure diffère de celle de E de $\frac{1}{p}$ au plus; et l'on voit que $I_n(f)$ tend vers zéro. Il en est évidemment de même si f est une fonction mesurable ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

Si f est une fonction sommable bornée, pour définir f_p on divisera l'intervalle d'intégration en un nombre fini d'ensembles mesurables sur chacun desquels f a une oscillation au plus égale à ε (1) et on prendra f_p constant sur chacun d'eux et égale, par exemple, à la limite inférieure de f sur cet ensemble. Ainsi on voit que $I_n(f)$ tend vers zéro.

Enfin, si f est sommable quelconque, on prendra pour f_p la fonction égale à f quand $|f|$ ne surpasse pas p et égale à zéro ailleurs. Le théorème est ainsi démontré dans tous les cas.

Les conditions sont nécessaires. — Il est évident que la condition 2 est nécessaire. D'autre part, nous savons déjà que, pour chaque valeur de n, $\varphi(\alpha, n)$ est équivalent à une fonction bornée, sans quoi $I_n(f)$ n'aurait pas toujours un sens (n° 5); mais supposons que la limite supérieure du module de cette fonction bornée équivalente à $\varphi(\alpha, n)$ tende vers ∞ avec n, c'est-à-dire qu'on puisse trouver n tel qu'il existe un ensemble E de mesure non nulle en les points duquel $|\varphi(\alpha, n)|$ surpasse tel nombre que l'on voudra. Si l'on décompose E en l'ensemble des points où φ est positive et l'ensemble de ceux où elle est négative, l'un d'eux est de mesure non nulle et l'on peut toujours supposer, en changeant au besoin le signe de $\varphi(\alpha, n)$ pour certaines valeurs de n, que c'est l'ensemble correspondant aux valeurs positives.

Ceci posé soient E_1, E_2, ... des ensembles de points de l'intervalle considéré (a, b) en lesquels $\varphi(\alpha, n_1)$, $\varphi(\alpha, n_2)$, ... sont respectivement supérieures, par exemple, à 1, 2, ...; n_1, n_2, ... sont des nombres croissants indéfiniment. Les E_i ont des mesures non nulles.

En rapetissant au besoin les E_i on peut faire en sorte que chaque E_i ait une mesure supérieure au double de la mesure de la somme des ensembles $E_{i+1} + E_{i+2} + \dots$; en supprimant ensuite de chaque E_i les points appartenant à $E_{i+1} + E_{i+2} + \dots$, on obtient des ensembles e_1, e_2, ... de mesures non nulles et sans points communs.

Soit l_i la limite inférieure de $\varphi(\alpha, n_i)$ dans e_i et L_i la limite supérieure de $|\varphi(\alpha, n_i)|$ dans (a, b); l_i, et à plus forte raison L_i, croît indéfiniment avec i.

Pour former une fonction F sommable et telle que $I_n(F)$ ne tende pas vers zéro nous attribuerons à F une valeur constante dans chaque e_i et nulle ailleurs. Nous

(1) Ce qui est évidemment possible, il suffit de prendre les ensembles pour lesquels on a, K étant constant, $\frac{K}{p} \leqslant f < \frac{K+1}{p}$.

pouvons d'ailleurs laisser de côté certains des e_i; nous désignerons ceux que nous utiliserons par $e^1, e^2, \ldots$, par l^i, L^i, n^i les valeurs correspondantes de l, L, n, et par K^i la valeur constante de F sur e^i.

Alors F sera sommable si la série

$$K^1 m(e^1) + K^2 m(e^2) + \ldots$$

qui représente son intégrale quand elle existe, est absolument convergente. Nous ferons en sorte que $K^i m(e^i)$ ne surpasse pas en module $\frac{1}{2^i}$; donc F sera sommable.

Je prends e_1 pour e^1 et K^1 tel que $K^1 m(e^1) = \frac{1}{2}$. Alors si $K^1 \int_{e_1} \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$ ne tend pas vers zéro avec $\frac{1}{n}$, je laisse de côté tous les autres e_i; sinon, pour $n > \mu^1$,

$$K^1 \int_{e_1} \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$$

est en module inférieur à 1.

Je néglige tous les e_i qui suivent e^1 jusqu'à celui qui correspond à un n_i plus grand que μ^1 et à un l_i plus grand que $2^3 L^1$. Soit e^2 ce premier e_i, je prends $K^2 m(e^2) = \frac{1}{2^2 L^1}$ alors, si

$$K_1 \int_{e_1} \varphi(\alpha, n)\,d\alpha + K_2 \int_{e_2} \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$$

ne tend pas vers zéro avec $\frac{1}{n}$, je laisse de côté tous les autres e_i; sinon, pour $n > \mu^2$, cette quantité est inférieure à 1.

Je néglige tous les e_i qui suivent e^2 jusqu'à celui qui correspond à un n_i plus grand que μ^2 et à un l_i plus grand que $2^4 L^2$. Soit e^3 ce premier e_i, je prends $K^3 m(e_3) = \frac{1}{2^3 L^2}$.

En continuant ainsi, on définit une suite finie ou dénombrable de K^i et la fonction F sommable ainsi définie répond bien à la question, car si la suite est illimitée on a :

$$\int_a^b F(\alpha)\varphi(\alpha, n^i)\,d\alpha = \sum_{p=1} K^p \int_{e^p} \varphi(\alpha, n^i)\,d\alpha = \sum_{p=1}^{p=i-1} K^p \int_{e^p} \varphi(\alpha, n^i)\,d\alpha$$
$$+ K^i \int_{e^i} \varphi(\alpha, n^i)\,d\alpha + \sum_{p=i+1} K^p \int_{e^p} \varphi(\alpha, n^i)\,d\alpha;$$

donc, pour i au moins égal à 2, on a

$$\left| \int_a^b F(\alpha)\varphi(\alpha, n_i)\,d\alpha \right| \geqq K^i l^i m(e^i) - 1 - L^i \sum_{p=i+1} K^p m(e^p)$$
$$= \frac{l^i}{2^i L^{i-1}} - 1 - L^i \sum_{p=i+1} \frac{1}{2^p L^{p-1}} \geqq 2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

On pourrait aussi se demander comment doit être modifiée la condition nécessaire et suffisante que nous venons d'examiner si l'on désirait seulement que

$$\int_a^b f(\alpha)\,\varphi(\alpha,\,n)\,d\alpha$$

existe pour chaque fonction sommable $f(\alpha)$, dès que n surpasse une certaine limite, variable avec f, et tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Les conditions énoncées devraient alors être vérifiées à partir d'une certaine valeur fixe de n; car, par des raisonnements analogues à celui du numéro 5, on montrera facilement qu'étant données des fonctions φ_1, φ_2, ... sommables mais dont aucune n'est équivalente à une fonction bornée on peut former une fonction sommable f telle qu'aucune des fonctions $f\varphi_1$, $f\varphi_2$, ... ne soit sommable.

La proposition qui suit prête à une remarque analogue.

[**14**] II. — *Pour que* $I_n(f)$ *tende vers zéro avec* $\frac{1}{n}$, *quelle que soit la fonction* f *de carré sommable, il faut et il suffit :*

1° *Que le noyau* $\varphi(\alpha,\,n)$ *soit de carré sommable et que l'intégrale* $\int_a^b \varphi^2(\alpha,\,n)\,d\alpha$ *reste inférieure à un nombre* M, *indépendant de* n;

2° *Que* $\int_\lambda^\mu \varphi(\alpha,\,n)\,d\alpha$ *tende vers zéro avec* $\frac{1}{n}$, *quels que soient* λ *et* μ *pris dans* $(a,\,b)$.

Les conditions sont suffisantes. — $\varphi(\alpha,\,n)$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé, soit une fonction f, et supposons qu'on puisse déterminer des fonctions f_p telles que $I_n(f_p)$ tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$ pour chaque valeur de p et telles que $\int_a^b (f-f_p)^2\,d\alpha$ tende vers zéro avec $\frac{1}{p}$. La relation évidente

$$\left|\int_a^b f(\alpha)\,\varphi(\alpha,\,n)\,d\alpha - \int_a^b f_p(\alpha)\,\varphi(\alpha,\,n)\,d\alpha\right| \leqslant \sqrt{M\int_a^b [f(\alpha)-f_p(\alpha)]^2\,d\alpha},$$

qui résulte du théorème C, montre que $I_n(f)$ tend aussi vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Cette remarque faite, la démonstration s'achève comme précédemment.

Les conditions sont nécessaires. — Il est évident que la condition 2 est nécessaire; d'autre part, nous savons déjà que le noyau $\varphi(\alpha,\,n)$ doit être de carré sommable, n° 5; mais supposons que la valeur de $\int_a^b \varphi^2(\alpha,\,n)\,d\alpha$ tende vers l'infini avec n.

Alors si petit que soit ε, si grand que soit η, on peut trouver un ensemble E de mesure au plus égale à ε et tel que, pour une certaine valeur de n, $\int_E \varphi^2(\alpha,\,n)\,d\alpha$ surpasse η. Pour cette valeur de n il existe un nombre ζ tel que tout ensemble de mesure inférieure à ζ fournisse dans $\int_a^b \varphi^2(\alpha, n)\,d\alpha$ une contribution inférieure à 1 (n° 7, note 1, page 43). ζ est inférieur à ε, si η surpasse 1.

Prenons d'abord $\eta = 2$ et $\varepsilon = l$. Soit E_1, n_1, ζ_1 les ensemble et nombres E, n, ζ correspondants. Prenons ensuite $\eta = 3$, $\varepsilon = \frac{\zeta_1}{2}$. Soit E_2, n_2, ζ_2 les ensemble et nombres correspondants. Prenons ensuite $\eta = 4$, ε égal au plus petit des deux nombres $\frac{\zeta_1}{2^2}$, $\frac{\zeta_2}{2}$, cela nous donne E_3, n_3, ζ_3. Puis nous prendrons $\eta = 5$, ε égal au plus petit des trois nombres $\frac{\zeta_1}{2^3}$, $\frac{\zeta_2}{2^2}$, $\frac{\zeta_3}{2}$, et ainsi de suite.

Retirant enfin de chaque E_i les points appartenant à certains des ensembles suivants, il nous reste des ensembles e_1, e_2, ... sans point commun et auxquels correspondent des nombres n_1, n_2, ... indéfiniment croissants tels que

$$l_i^2 = \int_{e_i} \varphi^2(\alpha, n_i)\,d\alpha$$

augmente indéfiniment avec i. Soit $L_i^2 = \int_a^b \varphi^2(\alpha, n_i)\,d\alpha$.

Nous allons former une fonction F de carré sommable et telle que $I_n(F)$ ne tende pas vers zéro en attribuant à $F(\alpha)$ la valeur $K_i\varphi(\alpha, n_i)$ pour les points de e_i et la valeur zéro ailleurs. Les K_i sont des constantes à déterminer. Nous laisserons de côté certains des e_i et nous affecterons d'indices supérieurs ceux que nous conserverons ainsi que les nombres correspondants.

F sera de carré sommable si la série

$$(K^1 l^1)^2 + (K^2 l^2)^2 + (K^3 l^3)^2 + \dots$$

est convergente. Nous ferons en sorte que $(K^i l^i)$ ne surpasse pas $\frac{1}{2^i}$; donc F^2 est sommable.

Je prends e_1 pour e^1 et K_1 tel que $K_1 l_1 = \frac{1}{2}$.

Alors si $K^1 \int_{e^1} \varphi(\alpha, n)\,\varphi(\alpha, n^1)\,d\alpha$ ne tend pas vers zéro, je néglige tous les autres e_i; sinon, pour $n > \mu^1$, $K^1 \int_{e^1} \varphi(\alpha, n)\,\varphi(\alpha, n^1)\,d\alpha$ est en module inférieur à 1.

Je néglige tous les e_i qui suivent e^1 jusqu'à celui qui correspond à un n_i plus grand que μ^1 et à un l_i plus grand que $2^3 L^1$. Soit e_2 ce premier e_i, je prends $k^2 l^2 = \frac{1}{2^2 L^1}$.

Alors si $K^1 \int_{e^1} \varphi(\alpha, n)\,\varphi(\alpha, n^1)\,d\alpha + K^2 \int_{e^2} \varphi(\alpha, n)\,\varphi(\alpha, n^2)\,d\alpha$ ne tend pas vers zéro avec $\frac{1}{n}$, je laisse de côté tous les autres e_i; sinon, pour $n > \mu^2$, cette quantité est inférieure a 1.

Je néglige tous les e_i qui suivent e^2 jusqu'à celui, e^3, qui correspond à un n_i plus grand que μ^2 et à un l_i plus grand que $2^4 L^2$. Je prends $K^3 l^3 = \frac{1}{2^3 L^2}$, etc.

La fonction F de carré sommable, ainsi construite, répond bien à la question, car, d'après C, on a :

$$\int_{e^j} F(\alpha)\varphi(\alpha, n^i)\,d\alpha \leqslant K^j \sqrt{\int_{e^j} \varphi^2(\alpha, n^i)\,d\alpha \cdot \int_{e^j} \varphi^2(\alpha, n^j)\,d\alpha} \leqslant K^j L^i l^j,$$

si n^i et n^j diffèrent, et, si $n^i = n^j$, cette intégrale égale $K^i(l^i)^2$. De sorte que

$$\left|\int_a^b F(\alpha)\varphi(\alpha, n^i)\,d\alpha\right| \geqslant \int_{e^i} F(\alpha)\varphi(\alpha, n^i)\,d\alpha - 1 - \sum_{p=i+1} \int_{e^p} F(\alpha)\varphi(\alpha, n^i)\,d\alpha$$

$$\geqslant K^i(l^i)^2 - 1 - \sum_{p=i+1} K^p L^i l^p \geqslant \frac{1}{2}.$$

[**15**] III. — *Pour que $I_n(f)$ tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$, quelle que soit la fonction f bornée et sommable, il faut et il suffit :*

1° *Que le noyau $\varphi(\alpha, n)$ soit sommable et que l'intégrale $\int |\varphi(\alpha, n)|\,d\alpha$, étendue à un ensemble quelconque d'intervalles de mesure totale λ, reste inférieure à un nombre $M(\lambda)$ indépendant de n, et tendant vers zéro avec λ ;*

2° *Que $\int_\lambda^\mu \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$ tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$, quels que soient λ et μ pris dans (a, b).*

Les conditions sont suffisantes. — $\varphi(\alpha, n)$ satisfaisant aux conditions indiquées, soit une fonction f, et supposons que f soit la limite d'une suite de fonctions f_p bornées dans leur ensemble et pour lesquelles $I_n(f_p)$ tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Reprenons le raisonnement employé pour le cas α' du n° 11 ; soit $E_n(\varepsilon)$ l'ensemble des points en lesquels $|f - f_N|$ est inférieur à ε pour $N \geqslant n$ et soit $F_n(\varepsilon)$ l'ensemble des autres points. On a :

$$\left|\int_a^b f(\alpha)\varphi(\alpha, n)\,d\alpha - \int_a^b f_p(\alpha)\varphi(\alpha, n)\,d\alpha\right| \leqslant \varepsilon \int_{E_p(\varepsilon)} |\varphi(\alpha, n)|\,d\alpha + 2\eta \int_{F_p(\varepsilon)} |\varphi(\alpha, n)|\,d\alpha,$$

si η est le maximum du module de $f_p(\alpha)$. Soit $A_p(\varepsilon)$ un ensemble d'intervalles enfermant $F_p(\varepsilon)$ et de mesure au plus égale à $2m[F_p(\varepsilon)]$; alors le second membre de l'inégalité précédente est au plus égal à

$$\varepsilon \int_{E_p(\varepsilon)} |\varphi(\alpha, n)|\,d\alpha + 2\eta \int_{A_p(\varepsilon)} |\varphi(\alpha, n)|\,d\alpha \leqslant \varepsilon M(l) + 2\eta M[\text{mes. } A_p(\varepsilon)],$$

quantité qui tend vers zéro avec $\frac{1}{p}$, uniformément quel que soit n.

Ainsi les hypothèses faites sur f entraînent la convergence de $I_n(f)$ vers zéro.

Le raisonnement se poursuit comme précédemment.

Les conditions sont nécessaires. — Il est évidemment nécessaire que φ soit sommable et que la deuxième condition soit remplie; mais supposons que la première ne le soit pas. Raisonnant comme précédemment, on montrera qu'en changeant au besoin le signe de $\varphi(x, n)$ pour certaines valeurs de n, on peut trouver des ensembles $e_1, e_2, \ldots$ sans point commun, auxquels correspondent des nombres $n_1, n_2, \ldots$ tels que, sur e_i, $\varphi(x, n_i)$ soit positive ou nulle et que $\int_{e_i} \varphi(x, n_i)\,dx$ surpasse un nombre fixe z, indépendant de i. Pour construire une fonction F sommable bornée et telle que $I_n(F)$ ne tende pas vers zéro, j'attribuerai la valeur 1 à F aux points de certains des e_i que j'appellerai $e^1, e^2, \ldots$ et la valeur 0 ailleurs.

Pour e^1, je prends e_1, $n^1 = n_1$. Soit ε^1 un nombre tel que, étendue à un ensemble quelconque de mesure au plus égale à ε^1, $\left|\int \varphi(x, n^1)\,dx\right|$ soit inférieure à $\frac{z}{3}$.

Si $\int_{e^1} \varphi(x, n)\,dx$ ne tendait pas vers zéro avec $\frac{1}{n}$, je laisserai de côté tous les autres e_i; mais il n'en sera pas ainsi généralement, et je laisserai seulement de côté assez des e_i suivant e^1 pour que ceux qui restent aient une mesure totale inférieure à ε^1.

Je prends pour e^2 le premier des e_i qui restent auquel correspond un n_i assez grand pour que, quand N est au moins égal à n_i, $\left|\int_{e^1} \varphi(x, \mathrm{N})\,dx\right|$ soit inférieure à $\frac{z}{3}$. Alors si $\int_{e^1+e^2} \varphi(x, n)\,dx$ ne tend pas vers zéro, le choix de F est achevé, sinon on déterminera un nombre ε^2 analogue à ε^1, n^2 remplaçant n^1, et on laissera de côté assez des e_i suivant e^2 pour que ceux qui restent aient une mesure totale inférieure à ε^2; et ainsi de suite.

La fonction F ainsi définie est évidemment bornée et sommable; de plus, on a :

$$|I_{n^i}(F)| = \left| \int_{e^1+e^2+\ldots+e^{i-1}} \varphi(x, n^i)\,dx + \int_{e^i} \varphi(x, n^i)\,dx + \int_{e^{i+1}+e^{i+2}+\ldots} \varphi(x, n^i)\,dx \right| \geqq z - \frac{z}{3} - \frac{z}{3} = \frac{z}{3};$$

le théorème est donc démontré.

On pourrait examiner de même le cas où la famille $\mathcal{F}$ de fonctions f est la famille des fonctions intégrables au sens de Riemann, il n'y aurait à cela aucune difficulté que l'on adopte ou non ma définition de l'intégrale. Mais, pour la suite, il sera plus intéressant d'étudier deux familles plus particulières de fonctions, celle des fonctions continues et celle des fonctions à variation bornée. Quelques remarques préliminaires ne seront pas inutiles.

[**16**] Jusqu'ici, pour chacune des familles de fonctions f étudiées, si, quelle que soit f,

$$\int f(\alpha)\,\varphi(\alpha, n)\,d\alpha$$

tendait vers zéro quand on l'étendait à (a, b), il en était de même à quelque partie de (a, b) qu'on étende cette intégrale. Cela ne sera plus nécessairement vrai quand il s'agira de fonctions f continues, et cela ne doit pas nous étonner parce que, f étant continue dans (a, b), la fonction g égale à f dans (λ, μ), intérieur à (a, b), et à zéro ailleurs ne sera pas nécessairement continue, de sorte que rien ne prouve que

$$\mathrm{I}_n(g) = \int_\lambda^\mu f(\alpha)\varphi(\alpha, n)\,d\alpha$$

tende vers zéro. Cette première différence disparaîtrait si, au lieu de s'occuper de la famille des fonctions f continues on s'occupait de la famille des fonctions f ayant au plus deux points de discontinuité, ces points étant de première espèce.

D'autre part jusqu'ici les familles de fonctions f considérées étaient de plus en plus restreintes, chacune formant une sous-famille de la précédente. Au contraire, les deux familles des fonctions continues et des fonctions à variation bornée ont des éléments communs, mais aucune ne comprend l'autre. Si l'on se rappelle que les fonctions à variation bornée n'ont que des points de discontinuité de première espèce, — c'est-à-dire que pour une telle fonction f les limites $f(x - 0)$ et $f(x + 0)$ existent quel que soit x, — on est assez naturellement conduit à étudier la famille des fonctions n'ayant pas d'autres points de discontinuité que des points de première espèce. J'appellerai ces fonctions *les fonctions simplement discontinues*.

Une fonction simplement discontinue n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité en lesquels l'oscillation surpasse un nombre donné $\varepsilon > 0$; car, s'il en était autrement, ces points de discontinuité auraient au moins un point limite A, et, par suite, quel que soit (B, C) contenant A à son intérieur, l'oscillation de la fonction à l'intérieur (1) de l'un au moins des intervalles (B, A), (C, A) surpasserait ε et A serait un point de discontinuité de seconde espèce.

Il résulte de là que les fonctions simplement discontinues n'ont qu'une infinité dénombrable de points de discontinuité — desquels on peut par suite ne pas tenir compte dans les intégrations — que ce sont des fonctions intégrables au sens de Riemann et aussi que, *si f est simplement discontinue dans (a, b), on peut diviser (a, b) en un nombre fini de parties de manière qu'à l'intérieur de chacune d'elles l'oscillation de f ne surpasse pas* ε. En effet, marquons les points de discontinuité en lesquels l'oscillation est au moins égale à ε. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de points de discontinuité en lesquels l'oscillation surpasse $\frac{\varepsilon}{2}$, les points de discontinuité non marqués ont tous une oscillation inférieure à un certain nombre $\eta < \varepsilon$.

Si donc λ et μ sont deux points de discontinuité marqués consécutifs, d'après un

(1) Il ne faut pas confondre l'oscillation *à l'intérieur* d'un intervalle, qui se définit sans tenir compte des valeurs de la fonction aux extrémités de l'intervalle, avec l'oscillation *dans* un intervalle, qui se définit en tenant compte des valeurs de la fonction aux extrémités de l'intervalle.

théorème de M. Baire, généralisation du théorème classique sur la continuité uniforme (¹), on peut diviser (λ, μ) en un nombre fini d'intervalles dans chacun desquels l'oscillation ne surpasse pas ε, pourvu peut-être qu'on remplace pour un instant $f(\lambda)$ par $f(\lambda + 0)$ et $f(\mu)$ par $f(\mu - 0)$.

En opérant ainsi sur chaque (λ, μ), on divisera évidemment (a, b) en intervalles à l'intérieur de chacun desquels f a une oscillation au plus égale à ε. On verra facilement que cette propriété est caractéristique des fonctions simplement discontinues de même que la proposition suivante est caractéristique des fonctions continues : on peut toujours diviser l'intervalle fini où une fonction continue est donnée en un nombre fini d'intervalles partiels dans chacun desquels la fonction a une oscillation inférieure à ε, arbitrairement donné.

[17] IV. — *Pour que $I_n(f)$ tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$, quelle que soit la fonction f simplement discontinue, il faut et il suffit :*

1° *Que le noyau $\varphi(\alpha, n)$ soit sommable et que l'intégrale $\int_a^b |\varphi(\alpha, n)|\, d\alpha$, reste inférieure à un nombre fixe M indépendant de n;*

2° *Que $\int_\lambda^\mu \varphi(\alpha, n)\, d\alpha$ tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$, quels que soient λ et μ pris dans (a, b).*

Les conditions sont suffisantes. — $\varphi(\alpha, n)$ satisfaisant aux conditions indiquées, soit une fonction f limite d'une suite uniformément convergente de fonctions f_p telles que $I_n(f_p)$ tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$. La relation évidente :

$$\left| \int_a^b f(\alpha)\varphi(\alpha, n)\, d\alpha - \int_a^b f_p(\alpha)\varphi(\alpha, n)\, d\alpha \right| \leqq \mathfrak{M}(f - f_p) \times \mathrm{M},$$

dans laquelle $\mathfrak{M}(f - f_p)$ désigne le maximum de $|f - f_p|$ quand α varie dans $(0, l)$, prouve que $I_n(f)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Or, si f est simplement discontinue, on peut prendre pour f_p la fonction obtenue en divisant (a, b) en parties telles qu'à l'intérieur de chacune d'elles l'oscillation de f soit inférieure à $\frac{1}{p}$ et assujettissant f_p à avoir dans chaque partie une valeur constante et égale, par exemple, au minimum de f_p à l'intérieur de cette partie; aux points de division on prendra $f_p = f$.

Les conditions sont nécessaires. — Il est évident que $\varphi(\alpha, n)$ doit être sommable et que la condition 2 doit être remplie. Mais supposons que la 1ʳᵉ condition ne soit pas

(¹) Voir, par exemple, la thèse de M. Baire, *Sur les fonctions de variables réelles*, Annali di matematica, 1902, § 13; ou mes *Leçons sur l'Intégration*, p. 21.

remplie, on peut alors trouver un nombre n_0 tel que $\int_a^b |\varphi(\alpha, n_0)|\,d\alpha$ surpasse un nombre arbitrairement donné l_0. Je considère la fonction de α, bornée et sommable, *signe* $\varphi(\alpha, n_0)$; elle est égale à $+1$ dans un ensemble P, à -1 dans un ensemble N (¹). Enfermons P dans un ensemble d'intervalles A dont la mesure surpasse très peu celle de P, puis ne conservons qu'un nombre fini des A, enfin désignons par f_0 la fonction égale à 1 dans les intervalles conservés et à -1 ailleurs. Les points où $f_0\varphi(\alpha, n_0)$ diffère de $|\varphi(\alpha, n_0)|$ forment un ensemble aussi petit qu'on le veut; donc on peut supposer que $\int_a^b f_0(\alpha)\,\varphi(\alpha, n_0)\,d\alpha$ surpasse l_0 comme $\int_a^b |\varphi(\alpha, n_0)|\,d\alpha$.

$f_0(\alpha)$ peut d'une infinité de manières être considérée comme la limite vers laquelle tend une suite de fonctions continues $u_1(\alpha)$, $u_2(\alpha)$, ..., inférieures à 1 en modules. Même, si on attribue à $f_0(\alpha)$ la valeur 0 pour $\alpha = a$ et $\alpha = b$, on pourra supposer que tous les $u_i(\alpha)$ s'annulent pour ces deux valeurs de α. D'après le théorème α', n° 11, $\int_a^b u_i(\alpha)\,\varphi(\alpha, n_0)\,d\alpha$ tend, pour i croissant indéfiniment, vers $\int_a^b f_0(\alpha)\,\varphi(\alpha, n_0)\,d\alpha$; donc nous pouvons trouver une fonction $g_0(\alpha)$ continue, et même s'annulant en $\alpha = a$ et $\alpha = b$, telle que $\int_a^b g_0(\alpha)\,\varphi(\alpha, n)\,d\alpha$ surpasse l_0.

Ceci posé, soit $l_1 = 2$ un nombre auquel nous faisons jouer le rôle de l_0, soit n_1 et g_1 les nombres et fonctions correspondantes et soit L_1 la valeur de $\int_a^b |\varphi(\alpha, n_1)|\,d\alpha$.

Si $I_n(g_1)$ ne tend pas vers zéro avec $\frac{1}{n}$, nous arrêterons là nos considérations et nous prendrons $F = g_1$, sinon, pour $n > \mu_1$, on aura $|I_n(g_1)| < 1$. Soit alors $l_2 = 2^2 L_1$ et soient $n_2 > \mu_1$ et g_2 les nombres et fonctions correspondantes.

Si $I_n\left(g_1 + \frac{1}{2L_1} g_2\right)$ ne tend pas vers zéro avec $\frac{1}{n}$, alors nous prendrons

$$F = g_1 + \frac{1}{2L_1} g_2,$$

sinon, pour $n > \mu_2$, on aura $\left|I_n\left(g_1 + \frac{1}{2L_1} g_2\right)\right| < 1$. Soit alors $L_2 = \int_a^b |\varphi(\alpha, n_2)|\,d\alpha$, prenons $l_3 = 2^3 L_2$, et soit $n_3 > \mu_2$ et g_3 les nombre et fonction correspondantes. On essayera $F = g_1 + \frac{1}{2L_1} g_2 + \frac{1}{2^2 L_2} g_3$, et ainsi de suite.

En fin de compte, on a une fonction définie par une somme ou une série uniformément convergente de la forme

$$F = g_1 + \frac{1}{2L_1} g_2 + \frac{1}{2^2 L_2} g_3 + \dots,$$

(¹) On pourra faire rentrer les points où $\varphi(\alpha, n_0) = 0$ dans P ou dans N, comme on le voudra.

donc F est continue et, si l'on veut, s'annule en $\alpha = 0$ et $\alpha = l$. On a de plus :

$$\mathrm{I}_{n_i}(\mathrm{F}) = \mathrm{I}_{n_i}\left(g_1 + \frac{1}{2\mathrm{L}_1} g_2 + \ldots + \frac{1}{2^{i-2}\mathrm{L}_{i-2}} g_{i-1}\right) + \mathrm{I}_{n_i}\left(\frac{1}{2^{i-1}\mathrm{L}_{i-1}} g_i\right) + \mathrm{I}_{n_i}\left(\frac{1}{2^i \mathrm{L}_i} g_{i+1} + \ldots\right);$$

donc

$$\mathrm{I}_{n_i}(\mathrm{F}) \geqslant \frac{1}{2^{i-1}\mathrm{L}_{i-1}} \int_a^b g_i(\alpha)\, \varphi(\alpha, n_i)\, d\alpha - 1 - \left(\frac{1}{2^i \mathrm{L}_i} \int_a^b g_{i+1}(\alpha)\, \varphi(\alpha, n_i)\, d\alpha + \ldots\right),$$

où, pour i au moins égal à 2,

$$\mathrm{I}_{n_i}(\mathrm{F}) \geqslant \frac{1}{2^{i-1}\mathrm{L}_{i-1}} l_i - 1 - \left[\frac{1}{2^i \mathrm{L}_i} \mathrm{L}_i + \frac{1}{2^{i+1}\mathrm{L}_{i+1}} \mathrm{L}_i + \ldots\right] \geqslant 2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

le théorème est démontré.

[**18**] Les conditions du théorème IV sont encore nécessaires et suffisantes si l'on veut que $\int f(\alpha)\, \varphi(\alpha, n)\, d\alpha$, *étendue à une partie quelconque de* (a, b), tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$, quelle que soit la fonction *continue* f. Mais si l'on désire seulement que $\int_a^b f(\alpha)\, \varphi(\alpha, n)\, d\alpha$ tende vers zéro, il n'est plus prouvé que la condition 2 soit nécessaire. En fait elle ne l'est pas; si l'on prend en effet $a = 0$, $b = l$, $\varphi(\alpha, n)$ nul à l'extérieur de $\left(\frac{l}{2} - \frac{1}{n}, \frac{l}{2} + \frac{1}{n}\right)$, égal à $-n$ dans $\left(\frac{l}{2} - \frac{1}{n}, \frac{l}{2}\right)$ et égal à $+n$ dans $\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2} + \frac{1}{n}\right)$, on a évidemment un noyau tel que $\mathrm{I}_n(f)$ tende vers zéro pour toutes les fonctions $f(\alpha)$ continues au point $\alpha = \frac{l}{2}$ et cependant on a : $\int_0^{\frac{l}{2}} \varphi(\alpha, n)\, d\alpha = -1$, quel que soit n.

Pour voir par quoi nous pouvons remplacer cette condition 2, remarquons d'abord que les énoncés précédents ne nous renseignent nullement sur la structure des noyaux $\varphi(\alpha, n)$; même ils pourraient sembler illusoires parce qu'ils ramènent l'étude de la convergence vers zéro d'une intégrale $\mathrm{I}_n(f)$ à l'étude de la convergence vers zéro d'autres intégrales $\int_\lambda^\mu \varphi(\alpha, n)\, d\alpha$. Mais, tandis que l'étude directe de $\mathrm{I}_n(f)$ ne pouvait se réduire à un calcul parce que la quantité à intégrer contient la fonction arbitraire f, l'étude de l'intégrale $\int_\lambda^\mu \varphi(\alpha, n)\, d\alpha$, quand $\varphi(\alpha, n)$ est donnée, se fait grâce au calcul de cette intégrale ordinaire, qui est une fonction des deux paramètres λ, μ.

En somme, nos énoncés ne nous fournissent nullement le moyen de construire *tous* les noyaux relatifs aux quatre familles $\mathcal{F}$ de fonctions f qui ont été étudiées, mais ils nous permettent, un noyau $\varphi(\alpha, n)$ étant donné, de reconnaître s'il correspond ou non à l'une de ces familles. On peut encore dire que nos énoncés nous permettent de remplacer l'étude de $I_n(f)$: 1° par l'étude de la nature finie ou non de la borne supérieure d'un ensemble de nombres; 2° par l'étude de $I_n(f)$ pour une famille très particulière de fonctions f, les fonctions $f_{\lambda,\mu}$ égale à 1 dans (λ, μ) et à zéro ailleurs.

Pour remplacer la condition 2, il suffit donc de désigner une famille de fonctions continues qui remplacera la famille des $f_{\lambda,\mu}$.

Puisque, lorsqu'on étudie la famille des fonctions continues, la condition 1 reste nécessaire et que, lorsque cette condition 1 est remplie, la première partie du raisonnement fait pour démontrer que les conditions du théorème IV sont suffisantes subsiste, la condition 2 pourra être remplacée par celle-ci : $I_n(f)$ devra tendre vers zéro avec $\frac{1}{n}$, quelle que soit la fonction continue f telle que $y = f(x)$ soit l'équation d'une ligne polygonale.

Or, une telle fonction est une combinaison linéaire de fonctions $f_\lambda(\alpha)$ égale à zéro pour $\alpha \leqslant \lambda$ et égale à $\alpha - \lambda$ pour $\alpha > \lambda$; donc :

IV'. — *On peut dans l'énoncé IV remplacer la famille des fonctions simplement discontinues par la famille des fonctions continues, pourvu qu'on remplace la condition 2 par :*

2', — *que l'intégrale* $\int_a^b \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$ *et, quel que soit* λ *dans* (a, b), *l'intégrale* $\int_\lambda^b (\alpha - \lambda)\varphi(\alpha, n)\,d\alpha$ *tendent vers zéro avec* $\frac{1}{n}$.

D'une façon analogue, on légitime les théorèmes suivants :

IV''. — *On peut dans l'énoncé IV remplacer la famille des fonctions simplement discontinues par la famille des fonctions continues s'annulant pour* $\alpha = a$ *pourvu qu'on remplace 2 par :*

2'', — *que l'intégrale* $\int_\lambda^b (\alpha - \lambda)\,\varphi(\alpha, n)\,d\alpha$ *tende vers zéro avec* $\frac{1}{n}$, *quel que soit* λ *dans* (a, b).

IV'''. — *Si l'on s'occupe de la famille des fonctions continues s'annulant pour* $\alpha = a$ *et* $\alpha = b$, *on remplacera 2 par :*

2''', — *que l'intégrale*

$$\int_0^{\frac{\mu-\lambda}{2}} t[\varphi(\lambda + t, n) + \varphi(\mu - t, n)]\,dt$$

tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$, *quels que soient* λ *et* μ *dans* (a, b).

L'intégrale qui figure dans 2''' est l'intégrale $I_n(g_{\lambda,\mu})$ relative à la fonction $g_{\lambda,\mu}(\alpha)$ nulle à l'extérieur de (λ, μ), égale à $\alpha - \lambda$ de λ à $\frac{\lambda + \mu}{2}$ et égale à $\mu - \alpha$ de $\frac{\lambda + \mu}{2}$ à μ.

Bien entendu, les familles de fonctions $f_{\lambda,\mu}$, f_λ, $g_{\lambda,\mu}$ que nous mettons ainsi en évidence peuvent être remplacées par d'autres de bien des manières; par exemple, remplaçons chaque côté de la ligne polygonale dont il a été parlé par un arc de sinusoïde aboutissant aux mêmes sommets et limité par deux tangentes parallèles à ox. Cela nous conduira à remplacer l'intégrale qui figure dans $2'''$ par l'intégrale

$$\int_\lambda^\mu \sin\left(\pi \frac{\alpha-\lambda}{\mu-\lambda}\right)\varphi(\alpha, n)\,d\alpha.$$

Je n'insiste pas davantage, ces énoncés étant à peu près inutiles pour la suite parce que, dans toutes les intégrales singulières, par définition même de ce que l'on entend par ces mots, la condition 2 est remplie.

[**19**] Le second théorème de la moyenne, appliqué à l'intégrale

$$\int_a^b f(\alpha)\,\varphi(\alpha, n)\,d\alpha,$$

montre que le module de cette intégrale ne surpasse pas la variation totale V de f, supposée à variation bornée, multipliée par le maximum de $\int_a^\xi \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$, ξ étant dans (a, b). Donc, $I_n(f)$ *tend vers zéro avec* $\frac{1}{n}$, *quelle que soit la fonction à variation bornée* f, *si l'intégrale* $\int_a^\xi \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$ *tend vers zéro avec* $\frac{1}{n}$, *et cela uniformément, quel que soit* ξ *dans* (a, b).

Ce résultat est celui qu'on utilise dans la théorie classique des intégrales singulières, mais il est évident que le noyau y est assujetti à une condition trop restrictive. Posons, en effet, $a=0$, $b=1$, $\varphi(\alpha, n)=n$ de 0 à $\frac{1}{n}$, $\varphi(\alpha, n)=-n$ de $\frac{1}{n}$ à $\frac{2}{n}$, et $\varphi(\alpha, n)=0$ de $\frac{2}{n}$ à 1. On a constamment $\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(\alpha, n)\,d\alpha=1$, donc le noyau ne satisfait pas à la condition de l'énoncé précédent, mais, comme il satisfait aux conditions du théorème IV, il convient cependant pour la famille des fonctions simplement discontinues et *à fortiori* pour la famille des fonctions à variation bornée.

Avant d'étudier l'énoncé que suggère la comparaison du théorème IV et de la proposition ci-dessus démontrée, il est utile de rappeler succinctement quelques propriétés des fonctions à variation bornée. Une telle fonction étant la différence de deux fonctions croissantes jouit de toutes celles des propriétés des fonctions croissantes qui sont vraies d'une différence quand elles sont vraies des deux termes de la différence.

Une fonction à variation bornée n'a que des points de discontinuité de première espèce car il est évident qu'il en est ainsi pour les fonctions croissantes. Les deux quantités $f(x) - f(x-0)$ et $f(x+0) - f(x)$ s'appellent les sauts de gauche et de droite au point x. Puisqu'il n'y a qu'une infinité dénombrable de points de discontinuité, n° 16, il n'y a qu'une infinité dénombrable au plus de sauts non nuls. La série des sauts $\sum [f(x) - f(x-0)] + \sum [f(x+0) - f(x)]$ est absolument convergente, car il est évident que si f est croissante tous ses termes sont positifs et que leur somme est au plus $f(b) - f(a)$, s'il s'agit de l'intervalle (a, b). La fonction des sauts $s(x)$ définie comme la somme de la série des sauts de l'intervalle (a, x), c'est-à-dire la fonction

$$s(x) = [f(a+0) - f(a)] + [f(x) - f(x-0)] + \sum_x [f(\xi+0) - f(\xi-0)];$$

la somme $\sum_x$ étant étendue à tous les points de discontinuité ξ de (a, x), est donc une fonction bien déterminée.

La fonction $f(x) - s(x)$ est une fonction continue à variation bornée.

Désignons par $\xi_1, \xi_2, \ldots$ les points de discontinuité et par $s_p(x)$ la fonction analogue à $s(x)$ mais définie en tenant compte seulement des points de discontinuité $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p$. Il est évident que $s_p(x)$ tend vers $s(x)$, quand p croît indéfiniment; et d'autre part la différence $s(x) - s_p(x)$ a évidemment pour variation totale la somme des valeurs absolues des sauts relatifs aux points de discontinuité non employés, $\xi_{p+1}, \xi_{p+2}, \ldots$. Donc la variation totale de $s(x) - s_p(x)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{p}$.

[**20**] Nous pouvons maintenant démontrer le théorème V.

V. — *Pour que $I_n(f)$ tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$, quelle que soit la fonction f à variation bornée, il faut et il suffit :*

1° *Que le noyau $\varphi(\alpha, n)$ soit sommable et que son intégrale $\int_a^\lambda \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$ reste inférieure à un nombre fixe M indépendant de n et de λ pris quelconque dans (a, b).*

2° *Que $\int_\lambda^\mu \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$ tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$, quels que soient λ et μ pris dans (a, b).*

Les conditions sont suffisantes. — $\varphi(\alpha\ n)$ satisfaisant aux conditions indiquées, soit une fonction f, et supposons qu'on sache trouver des fonctions f_p telles que $I_n(f_p)$ tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$, et que la variation totale V_p de $f - f_p$ tende vers zéro avec $\frac{1}{p}$. Le second théorème de la moyenne nous donne :

$$\left| \int_a^b f(\alpha)\,\varphi(\alpha, n)\,d\alpha - \int_a^b f_p(\alpha)\,\varphi(\alpha, n)\,d\alpha \right| \leqq V_p \,.\, M;$$

donc $I_n(f)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Appliquons cela à la fonction des sauts $s(x)$, nous prendrons $s_p(x)$ pour $f_p(x)$. Or, $s_p(x)$ est constante dans chacun des intervalles en lesquels (a, b) est divisée par $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p$; donc, d'après 2, $I_n[s_p(x)]$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ et il en est de même de $I_n[s(x)]$.

Il suffit donc de considérer le cas où f est continue et à variation bornée [1]. Supposons d'abord que $f(\alpha)$ soit l'intégrale indéfinie d'une fonction sommable $g(\alpha)$. On a :

$$I_n[f(\alpha)] = \int_a^b \left[K + \int_a^\alpha g(t)\,dt \right] \varphi(\alpha, n)\,d\alpha.$$

Il suffit évidemment de s'occuper du terme indépendant de la constante K; ce terme, grâce à l'intégration par parties, s'écrit :

$$\int_a^b \left[\int_a^\alpha g(t)\,dt \right] \varphi(\alpha, n)\,d\alpha = \left[\int_a^\alpha g(t)\,dt \,.\int_a^\alpha \varphi(t, n)\,dt \right]_a^b - \int_a^b g(\alpha) \left[\int_a^\alpha \varphi(t, n)\,dt \right] d\alpha.$$

Le premier terme du second membre, qui est $[f(b) - f(a)] \int_a^b \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$, tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Le second terme est l'intégrale de la fonction $g(\alpha) \int_a^\alpha \varphi(t, n)\,dt$, laquelle tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ et est constamment inférieure à $Mg(\alpha)$; d'après le théorème α', n° 11, la limite de cette intégrale est l'intégrale de la limite, c'est zéro.

Soit maintenant $f(x)$ continue et à variation bornée; ce n'est pas nécessairement une intégrale indéfinie. Soit s l'arc compté à partir du point d'abscisse a de la courbe dont l'équation en coordonnées rectangulaires est $y = f(x)$. L'abscisse et l'ordonnée d'un point de cette courbe sont des fonctions continues de s, ayant des nombres dérivés inférieurs à 1. Soient $x = \chi(s)$, $y = f[\chi(s)]$ ces deux fonctions; d'après les propriétés sus-indiquées et le théorème du n° 7, ce sont des intégrales indéfinies en s. Soit $\chi'(s)$ une fonction dont $\chi(s)$ est l'intégrale indéfinie.

---

(1) Je m'écarte ici, pour abréger, du mode de démonstration de proche en proche que j'ai employé pour les théorèmes précédents. On peut cependant encore l'utiliser; on vérifiera d'abord, par la méthode du texte, que I_n tend vers zéro pour les fonctions représentables par des lignes polygonales, puis on prouvera que l'on peut trouver de telles fonctions jouant le rôle des f_p. Pour cela, par un changement de variable au besoin, on rend f intégrale indéfinie d'une fonction sommable g et l'on montre qu'on peut trouver une combinaison linéaire h des $f_{\lambda,\mu}$ du n° 18, telle que $\int |g - h|\,d\alpha$ soit aussi petit que l'on veut; et l'on prend $\int h\,d\alpha$ pour f_p.

Par un raisonnement analogue à celui qu'on va lire, on pourrait démontrer le second théorème de la moyenne pour les fonctions continues à variation bornée; il serait facile ensuite de passer au cas général.

L'intégration par substitution nous donne

$$\int_a^b f(\alpha)\,\varphi(\alpha,\,n)\,d\alpha = \int_0^S f[\chi(s)]\,\varphi[\chi(s),\,n]\,\chi'(s)\,ds,$$

S étant tel que $\chi(S) = b$. Et nous sommes conduits à étudier une intégrale en s de même forme que la proposée et relative au noyau $\psi(s,\,n) = \varphi[\chi(s),\,n]\,\chi'(s)$ et à l'intégrale indéfinie $f[\chi(s)]$. Or, l'égalité

$$\int_0^s \psi(s,\,n)\,ds = \int_0^{\chi(s)} \varphi(\alpha,\,n)\,d\alpha$$

montre que $\int_0^s \psi(s,\,n)\,ds$ est toujours inférieur à M et tend vers zéro $\frac{1}{n}$; donc $I_n(f)$ tend aussi vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Les conditions sont nécessaires. — Il est évident que $\varphi(\alpha,\,n)$ doit être sommable et que la condition 2 doit être remplie; mais supposons que la condition 1 ne soit pas remplie. Alors on peut trouver n_0 et un intervalle $(\lambda_0,\,\mu_0)$ tel que $\left|\int_{\lambda_0}^{\mu_0} \varphi(\alpha,\,n_0)\,d\alpha\right|$ surpasse un nombre arbitrairement donné l_0.

La fonction f_{λ_0,μ_0}, n° 18, peut d'une infinité de manières être considérée comme la limite d'une suite de fonctions continues non supérieures à 1 en module et dont la variation totale ne surpasse pas 2. Parmi ces fonctions, d'après α', on en pourra toujours trouver une $g_0(\alpha)$ telle que $\left|\int_a^b g_0(\alpha)\,\varphi(\alpha,\,n_0)\,d\alpha\right|$ surpasse l_0.

Raisonnant à partir de ces fonctions $g(\alpha)$ comme à partir de celles considérées au n° 17, on montrera que l'on peut former une fonction continue F, à variation bornée, s'annulant pour $\alpha = a$ et $\alpha = b$, et telle que $I_n(F)$ ne tende pas vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

On pourrait démontrer aussi qu'en remplaçant dans l'énoncé V la condition 2 successivement par 2′, 2″, 2‴ on obtiendra les énoncés relatifs aux familles des fonctions qui sont à variation bornée et de plus : V′ continues, V″ continues et s'annulant pour $\alpha = a$, V‴ continues et s'annulant pour $\alpha = a$ et $\alpha = b$.

[**21**] Il importe de remarquer que tous les énoncés précédents s'appliquent au cas où $(a,\,b)$ est infini soit dans un sens, soit dans les deux. Nos démonstrations s'appliquent à ce cas, tout au plus y aurait-il quelques précautions de langage à prendre de-ci de-là, mais rien d'essentiel à changer. Seulement il faudrait bien se rappeler qu'une fonction f est dite continue dans $(a,\,b)$ si elle y est uniformément continue, qu'elle est dite simplement discontinue si elle n'a que des points de discontinuité de première espèce dans $(a,\,b)$, d'où il résulte que si $(a,\,b)$ s'étend jusqu'à $+\infty$ la limite $f(+\infty)$ de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ doit exister, qu'elle est dite à variation bornée dans $(a,\,b)$ si elle est la différence de deux fonctions croissantes

bornées, qu'elle est dite sommable si $|f|$ a une intégrale dans (a, b). Cette dernière hypothèse pourrait être en partie supprimée, mais cela nous serait inutile.

Une dernière remarque doit être faite. Nous venons de considérer principalement cinq familles de fonctions que je désignerai par $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_4$, $\mathcal{F}_5$ et auxquelles sont relatifs les théorèmes I à V. Pour démontrer que les conditions énoncées dans chacun de ces théorèmes sont suffisantes pour la famille de fonctions considérées, on a évalué approximativement l'intégrale I_n. Pour cette évaluation — sauf en ce qui concerne $\mathcal{F}_5$, mais des remarques analogues s'appliquent à ce cas — on a défini par l'intermédiaire des fonctions désignées par f_p des fonctions f^1, f^2, ... telles que $I_n(f^p)$ tende uniformément vers $I_n(f)$, quel que soit n. Le choix de ces f^p a été fait d'après la seule connaissance de f et de telle manière que f^p soit une somme de fonctions $f_{\lambda,\mu}$, n° 18. Le calcul de la limite supérieure de la différence $|I_n(f) - I_n(f^p)|$ ne dépend que de f, de f^p et du nombre M ou $M(\lambda)$ qui figure dans la condition 1 du théorème que l'on considère.

D'autre part on démontre que $I_n(f^p)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, pour chaque valeur de p, en s'appuyant sur la condition 2 du même énoncé, c'est-à-dire que la limite supérieure de $|I_n(f^p)|$ dépend seulement de f et des limites supérieures de $\int_\lambda^\mu \varphi(\alpha, n)d\alpha$, pour chaque couple λ, μ.

Si donc $\varphi(\alpha, n)$ dépend de certains paramètres $x, y, z, \ldots$ mais si le nombre M ou $M(\lambda)$ de la condition 1 n'en dépend pas et si l'on sait que l'on a, quels que soient $x, y, z, \ldots$, $\left|\int_\lambda^\mu \varphi(\alpha, n)d\alpha\right| \leqslant N(\lambda, \mu, n)$ tendant vers zéro avec n, quels que soient λ et μ (je ne dis pas uniformément quels que soient λ et μ), nous pouvons calculer une limite supérieure de $|I_n(f)|$ indépendante de $x, y, z, \ldots$ et qui tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

C'est ce que l'on peut exprimer en disant : *si le noyau $\varphi(\alpha, n)$, dépendant de certains paramètres $x, y, z, \ldots$, satisfait aux conditions de l'un des énoncés précédents, et cela uniformément quels que soient $x, y, z, \ldots$ au moins pour n supérieur à une certaine limite, pour chaque fonction f de la famille correspondante $I_n(f)$ tend vers zéro uniformément quels que soient $x, y, z, \ldots$*

D'ailleurs, *les conditions ci-dessus énoncées sont nécessaires pour la convergence uniforme vers zéro de l'intégrale $I_n(f)$.*

Tout d'abord, la condition 2 doit être remplie uniformément puisque $f_{\lambda,\mu}$ fait toujours partie de la famille de fonctions considérée. Si la condition 1 ne l'était pas, cela voudrait dire, en supposant par exemple qu'il s'agisse de la famille $\mathcal{F}_1$, qu'on pourrait trouver une suite indéfiniment croissante de nombres $n_1, n_2, \ldots$, auxquels sont associés des cortèges de paramètres $x_1, y_1, z_1, \ldots; \ldots$ tels que la fonction

$$\varphi(\alpha, n_i, x_i, y_i, z_i, \ldots)$$

ne soit pas équivalente, n° 5, à une fonction bornée inférieure en module à i. Posons alors

$$\Phi(\alpha, n_i) = \varphi(\alpha, n_i, x_i, y_i, z_i, \ldots);$$

le noyau $\Phi(\alpha, n_i)$ ne satisfaisant pas à la condition 1 du théorème I, nous savons former une fonction $F(\alpha)$ telle que $\int_a^b F(\alpha)\,\Phi(\alpha, n_i)\,d\alpha$ ne tende pas vers zéro avec $\frac{1}{n_i}$.

Donc, $\int_a^b F(\alpha)\,\varphi(\alpha, n)\,d\alpha$ ne tend pas vers zéro avec $\frac{1}{n}$, du moins uniformément quels que soient $x, y, z, \ldots$

Le noyau Φ n'est pas défini par toutes les valeurs de n, mais il est évident que cela importe peu. On peut toujours supposer que les variables $\alpha, n, x, y, z, \ldots$ sont assujetties à prendre seulement les valeurs de certains ensembles. Au reste, il est bien inutile de s'occuper de ces complications, car pour les faire disparaître il suffit de convenir qu'on posera $\varphi = 0$ pour les valeurs des variables pour lesquelles φ ne serait pas tout d'abord défini.

Relativement aux théorèmes IV' à V''', on peut faire des remarques analogues à celles de ce paragraphe.

VI.

a) Représentation aux points de continuité.

[**22**] Le théorème classique sur les intégrales singulières nous apprend que, dans des cas étendus, l'expression

$$I_n[f(t), x] = \int_0^l f(t)\,\varphi(t - x, n)\,dt$$

tend vers $f(x)$ quand n augmente indéfiniment.

Dans la théorie classique, la fonction $f(t)$ est supposée continue au point $t = x$ ou tout au moins *régulière* en ce point, c'est-à-dire qu'on suppose que l'on a :

$$f(x - 0) + f(x + 0) - 2f(x) = 0.$$

Par analogie, on va rechercher d'abord à quelles conditions doit satisfaire le noyau φ pour que l'intégrale I_n existe et tende vers $f(x)$, pour n croissant; $f(t)$ étant une fonction continue pour $t = x$ et appartenant dans $(0, l)$ à l'une des cinq familles considérées au chapitre précédent. Les raisonnements de ce chapitre conduisent immédiatement aux conditions cherchées que j'énonce en employant le mot intérieur dans son sens étroit, c'est-à-dire qu'un point x sera dit intérieur à $(0, l)$ si l'on a $0 < x < l$, les égalités étant exclues; de même (a, b) sera intérieur (ou complètement intérieur) à (a, b) si l'on a $0 < a < b < l$.

$f(t)$ étant une fonction quelconque appartenant dans $(0, l)$ à l'une des familles $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_4$, $\mathcal{F}_5$, pour que l'intégrale

$$\mathrm{I}_n[f(t), x] = \int_0^l f(t)\,\varphi(t-x, n)\,dt$$

tende, quand n augmente indéfiniment, vers $f(x)$ en tous les points $t=x$ où $f(t)$ est continue, il faut et il suffit que le noyau $\varphi(\alpha, n)$, défini dans $(-l, +l)$, satisfasse aux conditions suivantes :

1) et 2) *Dans tout intervalle (a, b) intérieur à $(0, l)$ ou à $(-l, 0)$, $\varphi(\alpha, n)$ satisfait aux conditions 1 et 2 de celui des théorèmes I à V du chapitre précédent qui est relatif à la famille de fonctions considérée.*

3) *l_1 étant pris arbitrairement intérieur à $(0, l)$, si $f(t)$ appartient à l'une des familles $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_4$, l'intégrale $\int_{-l_1}^{+l_1} |\varphi(\alpha, n)|\,d\alpha$ doit être uniformément bornée, quel que soit n,*

et, si $f(t)$ appartient à $\mathcal{F}_5$, l'intégrale $\int_c^d \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$, étendue à l'intervalle (c, d) intérieur à $(-l_1, +l_1)$, doit être uniformément bornée quels que soient n, c, d.

4) *L'intégrale $\int_e^{e+l} \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$, étendue à un intervalle quelconque $(e, e+l)$ intérieur à $(-l, +l)$, doit tendre vers 1 quand n croît indéfiniment.*

Les conditions sont suffisantes. — Si ces conditions sont remplies en effet, l'intégrale I_n est une intégrale singulière dont le point $t=x$ est le point singulier. Ce qui signifie que l'intégrale I_n a les mêmes valeurs limites si l'on restreint l'intervalle d'intégration à être $(x-h, x+h)$, si petit que soit h; d'où, d'ailleurs, une transformation de la condition 4 sur laquelle il est inutile d'insister.

On peut donc remplacer l'étude de I_n par celle de

$$i_n = \int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\varphi(t-x, n)\,dt = \int_{-h}^{+h} f(x+\alpha)\,\varphi(\alpha, n)\,d\alpha.$$

On a :

$$i_n = \int_{-h}^{+h} [f(x+\alpha) - f(x)]\,\varphi(\alpha, n)\,d\alpha + f(x)\int_{-h}^{+h} \varphi(x, n)\,d\alpha;$$

ou, si $\omega(h)$ est le maximum de l'oscillation de $f(t)$ dans $(x-h, x+h)$,

$$\left| i_n - f(x)\int_{-h}^{+h} \varphi(\alpha, n)\,d\alpha \right| \leqslant \omega(h)\int_{-h}^{+h} |\varphi(\alpha, n)|\,d\alpha.$$

D'après 2 et 4, l'intégrale du premier membre tend vers 1; d'après 3, s'il s'agit des familles $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_4$, l'intégrale du second membre est bornée, et comme $\omega(h)$ tend vers zéro avec h, il est démontré que I_n tend vers $f(x)$ pour les familles $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_4$.

S'il s'agit de la famille $\mathcal{F}_5$, on arrivera à la même conclusion en désignant par $\omega(h)$ la variation totale de $f(t)$ dans $(x-h, x+h)$ et en utilisant la formule

$$i_n - f(x)\int_{-h}^{+h}\varphi(\alpha, n)d\alpha = \int_{-h}^{+h}[f(x+\alpha)-f(x)]\,\varphi(\alpha, n)d\alpha = \omega(h)\int_{\beta}^{\gamma}\varphi(\alpha, n)d\alpha\,;$$

dans cette formule, conséquence du second théorème de la moyenne, β et γ désignent deux valeurs convenablement choisies dans $(-h, +h)$.

Les conditions sont nécessaires. — Nous avons vu en effet que si les conditions 1 ou 2 ne sont pas remplies dans un intervalle (a, b), il est possible de trouver $F(\alpha)$ telle que $\int_a^b F(\alpha)\varphi(\alpha, n)d\alpha$ ne tende pas vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Et, par suite, $I_n(x)$ ne tend pas vers $f(x)$ pour la fonction $f(t)$ égale, si (a, b) est dans $(0, l)$, à 0 de 0 à $a+l-b$ et égale à $F(t+b-l)$ de $a+l-b$ à l, du moins pour le point de continuité $x = l-b$.

De même la condition 3 est nécessaire. Supposons, par exemple, que nous nous occupions d'une des familles $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_4$. Alors si 3 n'est pas remplie, l'une des deux intégrales $\int_{-l_1}^{0}|\varphi(\alpha, n)|d\alpha$, $\int_0^{l_1}|\varphi(\alpha, n_1)|d\alpha$ n'est pas bornée, et par suite, comme on l'a vu en démontrant le théorème IV du chapitre précédent, on peut trouver $F(\alpha)$ continue, nulle à l'origine, et telle que l'une des intégrales $\int_{-l_1}^{0}\varphi(\alpha, n)F(\alpha)d\alpha$, $\int_0^{l_1}F(\alpha)\varphi(\alpha, n)d\alpha$ ne tende pas vers zéro. Supposons que ce soit la seconde qui ne tende pas vers zéro, alors la fonction $f(t)$ égale à 0 de 0 à $l-l_1$ et égale à $F(t+l_1-l)$ de $l-l_1$ à l, donne naissance à une intégrale I_n qui ne tend pas vers $f(l-l_1)$ pour $x = l-l_1$.

Un raisonnement tout à fait analogue s'applique au cas de la famille $\mathcal{F}_5$.

Enfin, la condition 4 est nécessaire comme le montre le cas de $f(t) = 1$.

[23] L'énoncé précédent peut, pour chacune des familles étudiées, recevoir des formes plus élégantes, en particulier en ce qui concerne les familles $\mathcal{F}_4$ et $\mathcal{F}_5$.

Je n'insiste pas sur ces transformations évidentes et j'étudie le cas de la famille des fonctions $f(t)$ continues.

Si l'on veut que l'intégrale I_n soit une intégrale singulière, la famille des fonctions continues peut remplacer la famille $\mathcal{F}_4$ dans l'énoncé précédent; mais il n'est plus indispensable maintenant que I_n soit intégrale singulière. Un exemple simple est donné par le noyau $\varphi(\alpha, n)$ égal à n pour $-\frac{n+1}{n} \leqslant \alpha \leqslant -1$, pour $-\frac{1}{2n} \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2n}$ et pour $\frac{n-1}{n} \leqslant \alpha \leqslant +1$, égal à $-n$ pour $-1 < \alpha \leqslant -\frac{n-1}{n}$ et pour $+1 < \alpha < \frac{n+1}{n}$, et égal à zéro ailleurs. Alors, si $l = 2$, il est bien évident que

I_n tend vers $f(x)$ si $f(x)$ est partout continue; mais I_n n'est pas intégrale singulière nécessairement, au sens ordinaire du mot, puisque, pour $f(t) \equiv 1$ et $x = 1$, $I_n = \int_{-1}^{+1} \varphi(\alpha, n)d\alpha$ n'a pas même limite que $\int_{-1}^{+\frac{1}{2}} \varphi(\alpha, n)d\alpha$, par exemple.

Dans cet exemple, on pourrait encore dire cependant que I_n est singulière parce que, dès que h et k sont assez petits positifs, l'intégrale $\int_{-h}^{+k} \varphi(\alpha, n)d\alpha$ a une limite indépendante de h et k. Mais pour qu'il n'en soit pas ainsi, il suffirait de compliquer la définition de $\varphi(\alpha, n)$ pour que des circonstances analogues à celles qui se rencontraient autour de $\alpha = \pm 1$ se rencontrent autour de chacun des points d'un ensemble dénombrable ayant $\alpha = 0$ comme point limite.

Les raisonnements du numéro précédent nous apprennent que les conditions 3 et 4 sont encore nécessaires. D'ailleurs, en considérant une fonction continue dans $(0, l)$ et nulle dans un certain intervalle à partir de 0, on voit que les conditions du théorème IV″ doivent être remplies dans tout intervalle (a, b) tel que l'on ait $-l \leqslant b < a < 0$ ou $0 < a < b < l$. Cela revient à remplacer dans l'énoncé relatif à la famille $\mathcal{F}_4$ la condition 2 par la condition 2″. On vérifiera de suite que les conditions ainsi énoncées sont nécessaires et suffisantes.

Plaçons-nous dans l'hypothèse où $\varphi(\alpha, n)$ aurait la période l en α et où l'on examinerait la famille des fonctions $f(t)$ continues et de période l; alors il faudrait évidemment remplacer les conditions 1 et 2 par celles qui expriment que, (a, b) étant intérieur à $(0, l)$ ou si l'on veut ne contenant au sens large aucun point congru à 0 suivant le module l, l'intégrale $\int_a^b \varphi(\alpha, n) f(t)dt$ tend vers zéro pour toute fonction $f(t)$ continue s'annulant pour $t = a$ et $t = b$. C'est-à-dire qu'il suffirait de remplacer 2 par 2‴.

Les mêmes remplacements de 2 par 2″ ou 2‴ doivent être faits si l'on s'occupe des familles de fonctions à variation bornée continues ou continues et de période l.

Bien qu'il n'y ait guère de changements à introduire pour examiner le cas général, je suppose dans la suite que les intégrales que j'étudie sont singulières, donc que la condition 2 est remplie [1].

[24] Supposons maintenant $\varphi(\alpha, n)$ fonction de certains paramètres X, Y, Z, ... et étudions la convergence de $I_n[f(t), x]$ vers $f(x)$ pour une valeur déterminée de x. En

---

(1) Au moment où j'ai écrit ma *Lettre à M. Landau*, j'ai voulu reconstituer de mémoire l'énoncé de la condition nécessaire et suffisante pour les fonctions continues. Ma mémoire m'a trahi, et l'énoncé que j'ai indiqué n'est ni nécessaire ni suffisant. Je dois dire d'ailleurs que je n'avais pas encore remarqué à cette époque que la condition 2 était inutilement restrictive, c'est-à-dire que je confondais l'énoncé relatif aux fonctions continues et celui relatif aux fonctions simplement discontinues. Ce n'est qu'à la rédaction que j'ai reconnu la possibilité d'employer d'autres intégrales que les intégrales singulières pour la représentation des fonctions continues.

raisonnant comme au n° 21, on voit que les conditions de l'énoncé précédent doivent être remplies uniformément pour que la convergence de $I_n[f(t), x]$ vers $f(x)$ soit uniforme en chaque point de continuité. Ce qui veut dire que les bornes supérieures dont il est parlé dans cet énoncé précédent doivent être indépendantes de X, Y, Z ... et que les convergences indiquées doivent être uniformes en X, Y, Z, ...

Voici une autre remarque aussi immédiate mais plus importante; je l'énoncerai comme les suivantes en supposant que $\varphi(\alpha, n)$ ne contienne pas de paramètres X, Y, Z, ... afin d'éviter les complications inutiles.

Supposons que $f(t)$ soit fonction d'un autre paramètre θ et que les fonctions de θ obtenues en donnant à t une valeur constante soient également continues; ce qui veut dire que le maximum de $|f(t, \theta) - f(t, \theta_1)|$ pour t variable, θ et θ_1 constants, doit tendre vers zéro avec $|\theta - \theta_1|$. Alors, s'il s'agit d'une des familles $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_4$ et si les conditions du théorème n° 22 sont remplies, les $I_n[f(t, \theta), x]$ fournissent pour chaque couple n, x des fonctions de θ formant une famille de fonctions également continues. Cela est une conséquence immédiate de la condition 3.

On pourrait dire aussi d'ailleurs que cette remarque ne diffère pas de celles que nous faisions au début des raisonnements du chapitre précédent pour démontrer que les conditions des théorèmes I à IV sont suffisantes.

Il résulte en particulier de là que si dans l'intégrale I_n nous remplaçons $f(t)$ par une fonction $f_n(t)$ tendant uniformément vers $f(t)$ quand $\frac{1}{n}$ tend vers zéro — ce qui n'implique bien entendu pas la continuité des $f_n(t)$ — on obtient une nouvelle intégrale $I_n[f_n(t), x]$ tendant vers $f(x)$ pour n croissant indéfiniment. De plus, si, pour x dans (α, β), $f_n(x)$ tendait *uniformément* vers $f(x)$, il en sera de même de $I_n[f_n(t), x]$.

Cela n'est plus nécessairement vrai si $\varphi(\alpha, n)$ satisfait seulement aux conditions relatives à la famille $\mathcal{F}_5$. On peut alors donner un énoncé analogue, que je ne développe pas, la condition que le maximum du module $|f(t, \theta) - f(t, \theta_1)|$ tende vers zéro avec $|\theta - \theta_1|$ étant remplacée par celle-ci : la variation totale de $f(t, \theta) - f(t, \theta_1)$ en tant que fonction de t tend vers zéro avec $(\theta - \theta_1)$.

[**25**] Examinons maintenant la question suivante : *$f(t)$ étant une fonction de l'une des familles $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_5$, que doit être $\varphi(\alpha, n)$ pour que $I_n[f(t), x]$ tende vers $f(x)$ et cela uniformément dans tout intervalle (i, j) entièrement intérieur à un intervalle (i_1, j_1) de continuité de $f(t)$.*

En prenant pour $f(t)$ la fonction $f_{\lambda,\mu}$ égale à 1 de λ à μ et à zéro ailleurs, I_n devient

$$\int_0^l f_{\lambda,\mu}(t)\,\varphi(t-x, n)\,dt = \int_\lambda^\mu \varphi(t-x, n)\,dt = \int_{\lambda-x}^{\mu-x} \varphi(\alpha, n)\,d\alpha.$$

Et I_n doit tendre uniformément vers zéro quel que soit x intérieur à un intervalle complètement à (o, λ) ou (μ, λ). Donc il faut, dans l'énoncé du n° 22, remplacer la condition 2 par :

$\underline{\underline{2}}$ *quel que soit l'intervalle* (a, b) *intérieur à* (o, l) *ou* $(-l, o)$, *l'intégrale* $\int_{\lambda+x}^{\mu+x} \varphi(\alpha, n)d\alpha$, *pour chaque couple* λ, μ, *doit tendre vers zéro et cela uniformément quel que soit* x, *pourvu que* $(\lambda + x, \mu + x)$ *soit intérieur à* (a, b).

Je dis qu'après ce changement les conditions du n° 22 sont suffisantes. Soit en effet ε un nombre inférieur à la fois à $i - i_1$ et à $j_1 - j$. Posons $\varphi(t - x, n) = \psi(t, x, n)$. quand t est extérieur à $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ et $\psi(t, x, n) = o$; dans le cas contraire, on a :

$$I_n = \int_0^l f(t)\psi(t, x, n)dt + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)\varphi(t - x, n)dt.$$

D'après les hypothèses, le noyau $\psi(\alpha, x, n)$ satisfait aux conditions 1 et 2 de celui des théorèmes I à V du chapitre précédent qui est relatif à la famille considérée, et cela uniformément quel que soit la variable x dans (i, j); donc la première intégrale du second membre tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$. La seconde intégrale s'écrit :

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(\alpha + x)\varphi(\alpha, n)d\alpha = f(x)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi(\alpha, n)d\alpha + \theta\omega\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |\varphi(\alpha, n)|d\alpha,$$

θ étant compris entre -1 et $+1$ et ω étant le maximum de l'oscillation de f dans un intervalle d'étendue 2ε compris dans (i, j). Donc, s'il s'agit d'une des familles $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_4$, le coefficient de ω est uniformément borné quel que soit n, et, par suite, le terme en ω tend vers zéro avec ε; $f(x)$ étant supposée continue dans (i_1, j_1), il est démontré que I_n tend uniformément vers $f(x)$ dans (i, j).

La même conclusion s'obtient dans le cas de la famille $\mathcal{F}_5$ en remplaçant la dernière égalité précédente par

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(\alpha + x)\varphi(\alpha, n)d\alpha = f(x)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi(\alpha, n)d\alpha + \theta v\int_{-\theta_1\varepsilon}^{+\theta_2\varepsilon} \varphi(\alpha, n)d\alpha,$$

θ, θ_1 et θ_2 étant des nombres compris entre -1 et $+1$ et v désignant le maximum de la variation totale de f dans un intervalle d'étendue 2ε intérieur à (i_1, j_1).

[**26**] Arrivé à ce point de l'exposition, il ne sera pas inutile de s'arrêter un instant sur le cas particulier qui m'a entraîné à tous ces développements. J'en indiquerai l'étude directe pour mettre bien en évidence la simplicité des raisonnements.

Supposons que le noyau $\varphi(\alpha, n)$ ne soit jamais négatif et recherchons quel il doit être pour pouvoir servir à la représentation de toutes les fonctions sommables bornées en leurs points de continuité. Le théorème du n° 22 nous apprend qu'il suffit que la condition 4 soit remplie; ainsi *il faut et il suffit que le noyau* $\varphi(\alpha, n)$, *supposé non négatif, donne naissance à une intégrale singulière*

$$\int_{-h}^{+k} \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$$

$(-l < -h < 0 < +k < +l)$ *ayant le point* $\alpha = 0$ *pour point singulier et* 1 *pour valeur limite.*

Il est évident que cette condition est nécessaire; vérifions directement qu'elle est suffisante.

Soit ε un nombre positif inférieur à x et à $l - x$, x étant le point de continuité que l'on étudie. Écrivons

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{l} [f(t)\,\varphi(t-x, n)\,dt].$$

Si M est la borne supérieure de $|f(t)|$, la première et la troisième intégrale ont une somme au plus égale à

$$\mathrm{M}\left\{\int_{-x}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{l-x} [\varphi(\alpha, n)\,d\alpha]\right\}.$$

Si l'on convient de ne s'occuper que des valeurs de x dans (a, b) complètement intérieur à $(0, l)$ et si l'on a pris ε inférieur à a et à $l - b$, ceci est au plus égal à

$$\mathrm{M}\left\{\int_{-b}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{l-a} [\varphi(\alpha, n)\,d\alpha]\right\} = \mathrm{M}\,\Omega(\varepsilon, n, a, b),$$

$\Omega(\varepsilon, n, a, b)$ est indépendant de f et, quels que soient a, b, ε satisfaisant aux conditions énoncées, tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Il ne reste qu'à étudier

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)\,\varphi(t-x, n)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(\alpha + x)\,\varphi(\alpha, n)\,d\alpha;$$

d'après le premier théorème de la moyenne, ceci s'écrit

$$[f(x) + \theta\,\omega(\varepsilon)]\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi(\alpha, n)\,d\alpha = [f(x) + \theta\,\omega(\varepsilon)][1 \pm \Omega_1(\varepsilon, n)],$$

θ étant compris entre -1 et $+1$, $\omega(\varepsilon)$ désignant l'oscillation de f dans $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ et $\Omega_1(\varepsilon, n)$ étant une fonction indépendante de f jouissant de toutes les propriétés ci-dessus indiquées comme appartenant à $\Omega(\varepsilon, n, a, b)$.

La conclusion résulte de là immédiatement; on voit même, puisqu'ici le module de la différence $\mathrm{I}_n - f(x)$ se limite facilement par la formule

$$|\mathrm{I}_n - f(x)| \leqslant \mathrm{M}[\Omega(\varepsilon, n, a, b) + \Omega_1(\varepsilon, n)] + \omega(\varepsilon)[1 \pm \Omega_1(\varepsilon, n)],$$

que la convergence de I_n vers $f(x)$ est uniforme quand x est dans un intervalle complètement intérieur à un intervalle de continuité de $f(x)$.

Comme je l'ai annoncé au début, le raisonnement précédent ne diffère pas de celui que Poisson a indiqué pour l'étude de l'intégrale qui porte son nom et que Schwarz a rendu rigoureux en lui donnant la forme classique. C'est aussi le raisonnement qui sert pour l'étude de l'intégrale de Weierstrass et de celle de M. Fejér. Enfin, le raisonnement ne diffère de celui qu'on fait dans la théorie classique des intégrales singulières que par l'emploi du premier théorème de la moyenne au lieu du second, d'où une plus grande simplicité.

[**27**] La théorie des séries de Fourier suggère la question suivante : Un noyau $\varphi(\alpha, n)$ satisfait aux conditions 1_{IV} du n° 22, $\underline{\underline{2}}$ du n° 25, 3_V du n° 22, 4 du même n° 22, mais pas à 3_{IV} de ce n° 22 (¹). C'est-à-dire que I_n tend vers $f(x)$ pour toute fonction f à variation bornée, et cela uniformément dans tout intervalle de continuité; mais nous savons qu'il existe des fonctions continues pour lesquelles I_n ne tend pas toujours vers $f(x)$. *Existe-t-il des fonctions continues pour lesquelles* I_n *tend vers* $f(x)$ *mais non uniformément?* On va voir que la réponse est affirmative.

L'hypothèse 1_{IV} est vérifiée, mais 3_{IV} ne l'est pas; il en résulte que, quel que soit l_1 $(0 < l_1 < l)$, l'intégrale $\int_{-l_1}^{+l_1} |\varphi(\alpha, n)|\,d\alpha$ augmente indéfiniment avec n. Ceci posé, supposons x dans une partie (i, j) intérieure à $(0, l)$; on a :

$$I_n = \int_{-x}^{l-x} f(\alpha + x)\,\varphi(\alpha, n)\,d\alpha;$$

cette intégrale I_n est étendue à un intervalle contenant $(-i, l-j)$. Posons alors

$$\rho(n) = \int_{-i}^{l-j} |\varphi(\alpha, n)|\,d\alpha,$$

quantité qui croît indéfiniment avec n.

Je dis qu'on peut trouver une fonction $f(t)$ *continue à variation bornée de module au plus égal à* M *et pour laquelle* $I_n[f(t), x]$ *surpasse ou au moins s'approche autant que l'on veut de* $M\rho(n)$. x est un point donné de (i, j). Cela résulte de suite d'un raisonnement analogue à celui fait au n° 17 pour démontrer que les conditions du théorème IV sont nécessaires. D'autre part, h étant positif et inférieur à la fois à i et à $l-j$, con-

(¹) Je désigne ici par I_{IV} et 3_V les conditions 1 et 3 relatives aux familles $\mathcal{F}_4$ et $\mathcal{F}_5$. On remarquera qu'on ne changerait rien au résultat en remplaçant IV par I, II ou III. Au contraire la question ne se poserait même plus s'il s'agissait d'autres changements, celui de IV en III et de V en IV, par exemple.

sidérons encore une fonction en module non supérieure à M et qui soit nulle dans $(x - h, x + h)$; alors on a :

$$|\mathrm{I}_n[f(t), x]| = \left|\int_{-x}^{l-x} f(\alpha+n)\varphi(\alpha, n)\,d\alpha\right| \leqslant \mathrm{M}\left[\int_{-x}^{-h} |\varphi(\alpha, n)|\,d\alpha + \int_{h}^{l-x} |\varphi(\alpha, n)|\,d\alpha\right]$$
$$\leqslant \mathrm{M}\left[\int_{-j}^{-h} |\varphi(\alpha, n)|\,d\alpha + \int_{h}^{l-i} |\varphi(\alpha, n)|\,d\alpha\right];$$

désignons par $\mathrm{R}(h)$ le maximum du module pour n variable de la quantité entre crochets; d'après I_{IV} elle est finie, d'ailleurs elle ne décroît évidemment pas quand h décroît.

A l'aide de ces deux remarques, nous atteindrons facilement notre but. Soient x_0 un point de (i, j), $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3, \ldots$ des intervalles contenus dans (i, j) n'empiétant pas les uns sur les autres et tendant vers x_0. Nous désignerons leurs milieux par $x_1, x_2, x_3, \ldots$, leurs longueurs par $4h_1, 4h_2, 4h_3, \ldots$ k_p sera la plus petite distance de x_0 à un point de I_p.

Déterminons une fonction f_p continue, à variation bornée, de module inférieur à l_p et telles que, pour une certaine valeur v_p de n, le module de $\mathrm{I}_n[f_p(t), x_p]$ surpasse $p + 2\mathrm{R}(h_p)$; de sorte que l'on a :

$$|\mathrm{I}_{v_p}[f_p(t), x_p]| > p + 2\mathrm{R}(h_p).$$

Cette détermination de f_p pourra être faite en assujettissant v_p à surpasser telle valeur donnée que l'on voudra.

Soit φ_p une fonction à variation bornée et continue telles que l'on ait $\varphi_p = 0$ à l'extérieur de I_p, $\varphi_p = f_p$ dans $(x_p - h_p, x_p + h_p)$, $|\varphi_p| < l_p$ et $|\varphi_p - f_p| < 1$ dans tout I_p. Cette détermination est possible si, comme nous le supposerons, on a $l_p < 1$; alors on a :

$$|\mathrm{I}_{v_p}[\varphi_p(t), x_p]| > p + \mathrm{R}(h_p).$$

Pour la fonction f égale à φ_p dans chaque I_p et à zéro ailleurs, on a :

$$|\mathrm{I}_{v_p}[f(t), x_p]| > p + \mathrm{R}(h_p) - \mathrm{R}(2h_p) \geqslant p.$$

La convergence de $\mathrm{I}(x)$ vers $f(x)$ n'est donc pas uniforme autour de x_0 si les v_p croissent indéfiniment, mais elle est uniforme partout ailleurs puisque $f(t)$ est continue et à variation bornée partout sauf peut-être autour de x_0. Pour légitimer l'affirmation qui a été faite, il va suffire de profiter de l'indétermination des l_p et des v_p de façon que $f(t)$ soit continue au point x_0 et que $\mathrm{I}_n[f(t), x_0]$ tende vers zéro quand n croît indéfiniment.

Le premier point sera réalisé si les l_p tendent vers zéro avec $\frac{1}{p}$. Pour le second, remarquons que l'on a :

$$\mathrm{I}_n[f(t), x_0] = \sum_{p=1}^{p=\infty} \int_{l_p} \varphi_p(t)\,\varphi(t - x_0, n)\,dt.$$

Chaque terme de cette série tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$; d'autre part, les termes de cette série sont majorés par ceux de la série

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} l_p \mathrm{R}(k_p);$$

il suffit donc, par exemple, de prendre l_p égal au plus petit des deux nombres $\frac{1}{p^2}$ et $\frac{1}{p^2 \mathrm{R}(k_p)}$ pour que $f(t)$ fournisse l'exemple cherché.

La fonction ainsi construite présente le seul point de convergence non uniforme $t = x_0$; il ne serait évidemment pas difficile de faire en sorte qu'il y ait une infinité de tels points, mais il y aurait sans doute quelques difficultés à vaincre pour construire une fonction continue f pour laquelle $\mathrm{I}_n(x)$ converge partout vers $f(x)$ sans converger uniformément dans aucune partie de (o, l). Nos raisonnements laissent douteuse l'existence d'une telle fonction.

b) Représentation aux points de discontinuité.

[**28**] Il est naturel d'étudier tout d'abord ces points x_0 de discontinuité de première espèce en lesquels on a :

$$f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0) - 2f(x_0) = 0,$$

et que j'appellerai points réguliers.

Il est tout à fait évident que pour que $\mathrm{I}_n(x)$ tende vers $f(x)$ en tout point régulier il faut et il suffit que les conditions du n° 22 soient vérifiées, la condition 4 étant remplacée par la suivante :

(4) *quel que soit l_1, tel que $0 < l_1 < l$, les intégrales*

$$\int_0^{l_1} \varphi(\alpha, n)\,d\alpha, \qquad \int_{-l_1}^{0} \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$$

doivent tendre vers $\frac{1}{2}$, quand n croît indéfiniment.

Il n'est pas inutile de remarquer que cette condition (4) est remplie si $\varphi(\alpha, n)$ est une fonction paire en α, c'est-à-dire telle que $\varphi(\alpha, n) + \varphi(-\alpha, n) = 0$, et satisfait aux conditions du n° 22.

[29] Les remarques précédentes suffisent pour l'étude de $I_n(x)$ aux points de discontinuité de première espèce [1]. D'après la théorie de l'intégration des fonctions sommables, il existe des points de discontinuité de deuxième espèce qui sont en quelque sorte les points ordinaires de ces fonctions sommables, puisque les points ne faisant pas partie de leur catégorie forment au plus un ensemble de mesure nulle : ce sont les points x en lesquels $f(x)$ est la dérivée de l'intégrale indéfinie de $f(t)$ et plus particulièrement ceux pour lesquels la fonction $\int_x^t |f(t) - f(x)|\,dt$ considérée comme fonction de t admet une dérivée nulle pour $t = x$.

Etudions les points de cette dernière catégorie. Les conditions 4 et (4) des n^{os} 22 et 28 ont été obtenues en examinant le cas des fonctions $f(t)$ ne prenant (sauf pour $t = x$) que les valeurs 0 et 1 et ayant au point $t = x$ une singularité de la nature considérée. Quelles sont les fonctions analogues dans le cas qui nous intéresse?

Ces fonctions ne prenant que les valeurs 1 et 0 ont, à l'origine, soit la valeur 1, soit la valeur 0. Il suffit d'examiner le premier cas, car, si $f(0) = 1$, la fonction $\varphi(t) = 1 - f(t)$ prend la valeur 0 à l'origine.

Soit E l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles $f(t) = 1$; pour que $\int_0^t |f(t) - 1|\,dt$ admette une dérivée nulle à l'origine, il faut évidemment que, si d désigne la mesure de la partie de E contenue dans un intervalle (a, b) contenant l'origine, le rapport $\dfrac{d}{\text{longueur }(a, b)}$ tende vers 1 avec longueur (a, b). Ce que l'on peut exprimer en disant que E doit avoir une densité égale à 1 à l'origine.

D'où la nouvelle forme de la condition 4 :

((4)) *l'intégrale* $\int_E \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$ *étendue à un ensemble mesurable quelconque* E *contenu dans* $(-l_1 + l_1)$, $(0 < l_1 < l)$, *et de densité* 1 *à l'origine, doit tendre vers* 1 *quand* n *croît indéfiniment.*

Mais cette transformation ne suffit pas toujours pour fournir la condition nécessaire et suffisante. Il est évident en effet que, dans le cas des familles $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, les conditions imposées à $\varphi(\alpha, n)$ n'assurent même pas l'existence de I_n pour toutes les fonctions f de la famille (n° 5).

Mais la transformation de la condition 4 du n° 22 nous fournit bien la condition nécessaire et suffisante dans le cas de la famille $\mathcal{F}_3$.

---

[1] Dans ce qui suit, nous ne nous occupons plus que des familles $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, les seules dont les fonctions peuvent avoir des points de discontinuité de seconde espèce.

En effet, de la condition $\big((4)\big)$ il résulte que l'intégrale $\int \varphi(\alpha, n)d\alpha$, étendue à un ensemble de densité nulle à l'origine, tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$; il en est donc de même de l'intégrale $\int f(\alpha)\,\varphi(\alpha, n)d\alpha$, quelle que soit la fonction $f(\alpha)$ de $\mathcal{F}_3$, puisque $f(\alpha)$ est bornée. Ceci posé, si petit que soit ε, l'ensemble $E(\varepsilon)$ des points où l'on a

$$f(x) - \varepsilon \leqslant f(t) \leqslant f(x) + \varepsilon,$$

x étant le point que l'on étudie en lequel on suppose que $\int^t |f(t) - f(x)|\,dx$ a une dérivée nulle, a une densité égale à 1 à l'origine. Donc, on ne modifie I_n que d'une quantité qui tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ si on la remplace par

$$\int_{E(\varepsilon)} f(\alpha)\,\varphi(\alpha, n)d\alpha = f(x)\int_{E(\varepsilon)} \varphi(\alpha, n)d\alpha + \theta\varepsilon\int_{E(\varepsilon)} |\varphi(\alpha, n)|\,d\alpha,$$

θ étant compris entre -1 et $+1$. L'égalité précédente permet de conclure de suite que $I_n[f(t), x]$ tend vers $f(x)$.

[**30**] La condition $\big((4)\big)$ est trop compliquée pour être facilement maniable; aussi n'irais-je pas plus loin dans cette voie, d'autant qu'ici les réciproques ne sont plus guère intéressantes et que par suite on peut se borner à la recherche de conditions suffisantes applicables aux noyaux de formes très particulières qui se rencontrent dans les applications. C'est pourquoi *je suppose ici que, pour toute valeur de* $\alpha \gtrless 0$, $\varphi(\alpha, n)$ *tend vers zéro avec* $\frac{1}{n}$, *que* $\varphi(\alpha, n)$ *admet une dérivée partielle continue en* α *que je représente par* $\varphi_1(\alpha, n)$ (¹) *et que* $\varphi(\alpha, n)$ *est une fonction paire de* α (²).

$\varphi(\alpha, n)$ étant toujours supposé convenir pour la représentation des fonctions de l'une des familles $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ en leurs points de continuité, pour une fonction de la famille considérée l'étude de $I_n[f(t), x]$ se ramène à celle de

$$\int_{x-A}^{x+A} f(t)\,\varphi(t - x, n)dt = \int_{-A}^{+A} f(\alpha + x)\,\varphi(\alpha, n)d\alpha,$$

si petit que soit A. Nous écrirons cela :

$$f(x)\int_{-A}^{+A} \varphi(\alpha, n)d\alpha + \int_0^A [f(\alpha + x) + f(x - \alpha) - 2f(x)]\,\varphi(\alpha, n)d\alpha.$$

(¹) Cela n'interviendra que par cette conséquence; on a

$$\varphi(\alpha, n) = k + \int_0^\alpha \varphi_1(\alpha, n)d\alpha,$$

k étant une constante en α et φ_1 une fonction sommable de α.

(²) Cette dernière condition n'est nullement essentielle au raisonnement; voir la note suivante.

et, en posant

$$f_1(\alpha) = f(\alpha + x) + f(x - \alpha) - 2f(x) \text{ (1)},$$

l'étude de la convergence de $I_n[f(t), x]$ vers $f(x)$ revient à l'étude de la convergence vers zéro de

$$\int_0^A f_1(\alpha)\varphi(\alpha, n)\,d\alpha.$$

Or, si l'on pose $\mathcal{F}(\alpha) = \int_0^\alpha f_1(\alpha)\,d\alpha$, ceci s'écrit :

$$\mathcal{F}(A)\varphi(A, n) - \int_0^A \mathcal{F}(\alpha)\varphi_1(\alpha, n)\,d\alpha;$$

donc, avec nos hypothèses, c'est l'étude de cette dernière intégrale qu'il suffit d'effectuer.

Supposons que $\mathcal{F}(a)$ ait une dérivée nulle pour $\alpha = 0$, ce qui est en particulier réalisé quand $\int_0^t f(\alpha)\,d\alpha$ admet une dérivée égale à $f(x)$ pour $t = x$. Alors on peut poser $\mathcal{F}(\alpha) = \alpha\theta(\alpha)$, $\theta(\alpha)$ étant une fonction continue s'annulant avec α. Notre intégrale s'écrit

$$\int_0^A \theta(\alpha)[\alpha\varphi_1(\alpha, n)]\,d\alpha.$$

Elle tendra vers zéro toutes les fois que le noyau $\alpha\varphi_1(\alpha, n)$ satisfera aux trois premières conditions du n° 22 qui sont relatives à la famille $\mathcal{F}_4$. Or, dans le cas de la famille $\mathcal{F}_4$, la condition 3 entraîne la condition 1 ; de plus, la condition 2 est évidemment remplie par le noyau $\alpha\varphi_1(\alpha, n)$, car on a :

$$\int_\lambda^\mu \alpha\varphi_1(\alpha, n)\,d\alpha = [\alpha\varphi(\alpha, n)]_\lambda^\mu - \int_\lambda^\mu \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$$

et nous avons supposé que $\varphi(\alpha, n)$ était le noyau d'une intégrale singulière. Il suffit donc d'exprimer la condition 3 : l'intégrale $\int_0^A \alpha\,|\varphi_1(\alpha, n)|\,d\alpha$ est uniformément bornée, quel que soit n. Or, on a :

$$|\alpha\varphi_1(\alpha, n)| = \left|\alpha\frac{\partial\varphi(\alpha, n)}{\partial\alpha}\right| = \left|\frac{\partial}{\partial\alpha}[\alpha\varphi(\alpha, n)] - \varphi(\alpha, n)\right| \leqslant \left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha\varphi(\alpha, n)\right| + |\varphi(\alpha, n)|,$$

donc $\int_0^A |\alpha\varphi_1(\alpha, n)|\,d\alpha$ et $\int_0^A \left|\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha\varphi(\alpha, n)\right| d\alpha$ sont uniformément bornées en même

(1) Si l'on ne supposait pas que $\varphi(\alpha, n)$ soit une fonction paire de α, les résultats qu'on va obtenir seraient vrais à condition de prendre pour définition de $f_1(\alpha)$ l'égalité

$$f_1(\alpha) = f(\alpha + x) - f(x).$$

Les résultats mêmes du texte seraient encore vrais si $\varphi(\alpha, n)$, sans être une fonction paire, satisfaisait aux conditions du n° 28.

temps, puisque $\varphi(\alpha, n)$ satisfait à la condition 3 du n° 22. Remarquons encore que $\int_0^A \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha \varphi(\alpha, n) \right| d\alpha$ ne diffère pas de la variation totale dans (o, A) de

$$\int_0^\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha \varphi(\alpha, n) d\alpha = \alpha \varphi(\alpha, n);$$

donc on peut formuler la proposition suivante, dont l'énoncé est évidemment inutilement restrictif :

a) *Si le noyau $\varphi(\alpha, n)$ convient pour la représentation des fonctions de l'une des familles $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ en leurs points de continuité, s'il satisfait aux conditions énoncées au début de ce numéro;*

b) *Si enfin $\alpha \varphi(\alpha, n)$ a une variation totale finie inférieure à un nombre fixe, indépendant de n, dans un intervalle* (o, A), *l'intégrale*

$$\int_0^l f(t) \varphi(t - x, n) dt$$

tend vers $f(x)$ pour toute valeur de x telle que la fonction $\mathcal{F}(\alpha)$,

$$\mathcal{F}(\alpha) = \int_0^\alpha [f(x + \alpha) + f(x - \alpha) - 2f(x)] d\alpha,$$

admette une dérivée nulle, pour $\alpha = 0$.

La condition relative à la variation totale de $\alpha \varphi(\alpha, n)$ peut être simplifiée dans un cas particulier important, celui où, quel que soit n, $\alpha \varphi(\alpha, n)$, en tant que fonction de α, n'a pas plus de p maxima et minima, p étant indépendant de n. Il suffit alors évidemment que $\alpha \varphi(\alpha, n)$ soit uniformément borné, quels que soient α et n, pour que la condition considérée soit remplie, et inversement.

Une dernière remarque. Supposons que $\varphi(\alpha, n)$ satisfasse aux conditions de l'énoncé précédent, sauf à la dernière, et que l'on ait pu poser

$$\varphi_1(\alpha, n) = P(\alpha, n) + Q(\alpha, n),$$

$\alpha P(\alpha, n)$ satisfaisant aux conditions 2 et 3 ci-dessus examinées; c'est-à-dire que, pour $0 < \lambda < \mu$, $\int_\lambda^\mu \alpha P(\alpha, n) d\alpha$ tend vers zéro et que $\int_0^A \alpha |P(\alpha, n)| d\alpha$ est uniformément borné. Alors la contribution de P dans l'intégrale étudiée tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$ d'après le raisonnement précédent.

[31] Dans le calcul précédent, on n'a tenu compte que d'une des propriétés de $\theta(\alpha)$, sa continuité. Or $\theta(\alpha)$ est de plus à variation bornée dans tout intervalle (λ, μ) ne contenant pas l'origine $(0 < \lambda < \mu)$.

Même sa variation totale dans (λ, μ) quand, μ étant fixe, λ tend vers zéro est une fonction de λ dont l'ordre de grandeur n'est pas quelconque, puisque $\alpha\theta(\alpha)$ doit être à variation bornée jusqu'à zéro. Pour tenir compte de cela, écrivons :

$$\int_0^A \theta(\alpha)[\alpha\varphi_1(\alpha, n)]\,d\alpha = \int_0^{a_n} \theta(\alpha)[\alpha\varphi_1(\alpha, n)]\,d\alpha + \int_{a_n}^A \theta(\alpha)[\alpha\varphi_1(\alpha, n)]\,d\alpha.$$

La seconde intégrale pourra s'évaluer par le second théorème de la moyenne; mais ceci ne pourra nous servir que si a_n varie avec n, sans quoi la convergence vers zéro de l'intégrale étendue à (a_n, A) serait évidente. Il faudra donc faire tendre a_n vers zéro avec $\frac{1}{n}$, assez lentement pour que, en tenant compte de l'ordre de grandeur de la variation totale de $\theta(\alpha)$ dans (a_n, A), on puisse affirmer que la seconde intégrale tende vers zéro. Quant à la première, on l'étudiera par le premier théorème de la moyenne, c'est-à-dire en somme par la méthode du numéro précédent.

Pour l'application que j'ai en vue, il y a avantage à écrire l'intégrale à étudier sous la forme

$$\int_{a_n}^A \frac{\theta(\alpha)}{\alpha}[\alpha^2\varphi_1(\alpha, n)]\,d\alpha;$$

on supposera d'ailleurs que $\mathcal{F}_1(\alpha) = \int_0^\alpha |f_1(\alpha)|\,d\alpha$ a une dérivée nulle pour $\alpha = 0$ (ce qui revient à dire que la variation totale de $\mathcal{F}(t)$ dans $(0, \alpha)$ a une dérivée nulle pour $\alpha = 0$). On posera $\mathcal{F}_1(\alpha) = \alpha\theta_1(\alpha)$; $\theta_1(\alpha)$ tend vers zéro avec α.

Calculons d'abord, dans ces conditions, une limite supérieure de la variation totale $V_\lambda^\mu\left[\frac{\theta(\alpha)}{\alpha}\right]$ de $\frac{\theta(\alpha)}{\alpha}$ dans l'intervalle (λ, μ). On a :

$$\frac{\theta(\alpha)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha^2}\int_0^\alpha f_1(\alpha)\,d\alpha = \frac{\theta(\lambda)}{\lambda} + \int_\lambda^\alpha\left[\frac{f_1(\alpha)}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3}\int_0^\alpha f_1(t)\,dt\right]d\alpha,$$

d'où il résulte [1] :

$$V_\lambda^\mu\left[\frac{\theta(\alpha)}{\alpha}\right] \leqslant \int_\lambda^\mu \left|\frac{f_1(\alpha)}{\alpha^2}\right| d\alpha + 2\int_\lambda^\mu \frac{1}{\alpha^3}\left|\int_0^\alpha f_1(\alpha)\,d\alpha\right| d\alpha \leqslant \int_\lambda^\mu \frac{|f_1(\alpha)|}{\alpha^2}\,d\alpha + 2\int_\lambda^\mu \frac{\mathcal{F}_1(\alpha)}{\alpha^3}\,d\alpha.$$

Pour la première intégrale, nous servant de l'intégration par parties, nous aurons

$$V_\lambda^\mu\left[\frac{\theta(\alpha)}{\alpha}\right] \leqslant \left[\frac{\mathcal{F}_1(\alpha)}{\alpha^2}\right]_\lambda^\mu + 4\int_\lambda^\mu \frac{\mathcal{F}_1(\alpha)}{\alpha^3}\,d\alpha.$$

---

(1) On utilise ici la relation évidente :

$$V_\lambda^\mu\left[k + \int_a^\alpha g(t)\,dt\right] \leqslant \int_\lambda^\mu |g(t)|\,dt;$$

dans cette relation c'est toujours le signe $=$ qui convient, mais l'inégalité précédente nous suffira.

Or

$$\left[\frac{\mathcal{F}_1(\alpha)}{\alpha^2}\right]_\lambda^\mu = \frac{\mathcal{F}_1(\mu)}{\mu^2} - \frac{\mathcal{F}_1(\lambda)}{\lambda^2} = \frac{\theta_1(\mu)}{\mu} - \frac{\theta_1(\lambda)}{\lambda}.$$

$$\int_\lambda^\mu \frac{\mathcal{F}_1(\alpha)}{\alpha^3}d\alpha = \int_\lambda^\mu \frac{\theta_1(\alpha)}{\alpha^2}d\alpha \leqslant \varepsilon(\mu)\int_\lambda^\mu \frac{d\alpha}{\alpha^2} = \varepsilon(\mu)\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}\right),$$

$\varepsilon(\mu)$ désignant la limite supérieure de $\theta_1(\alpha)$ dans $(0, \mu)$. Quand λ tend vers zéro, μ étant fixe, la plus grande des limites de $\lambda V_\lambda^\mu\left[\frac{\theta(\alpha)}{\alpha}\right]$ est donc au plus égale à $4\varepsilon(\mu)$. Mais, si ν est un nombre compris entre o et μ, pour λ assez petit il est entre λ et μ et par suite on peut écrire $V_\lambda^\mu = V_\lambda^\nu + V_\nu^\mu$, donc $\lambda V_\lambda^\mu\left[\frac{\theta(\alpha)}{\alpha}\right]$ tend au plus vers $4\varepsilon(\nu)$, quand λ tend vers zéro. Et comme on peut prendre $\varepsilon(\nu)$ aussi petit que l'on veut $\lambda V_\lambda^\mu\left[\frac{\theta(\alpha)}{\alpha}\right]$ tend vers zéro quand, μ étant fixe, λ tend vers zéro.

Ceci établi, opérant comme il a été dit, nous écrivons :

$$\int_0^A \mathcal{F}(\alpha)\,\varphi_1(\alpha, n)\,d\alpha = \int_0^{a_n} \theta(\alpha)[\alpha\varphi_1(\alpha, n)]\,d\alpha + \int_{a_n}^A \frac{\theta(\alpha)}{\alpha}[\alpha^2\varphi_1(\alpha, n)]\,d\alpha$$
$$\leqslant M(a_n)\,.\,\theta_1(a_n)\,.\,a_n + \left\{\frac{\theta(a_n)}{a_n} + V_{a_n}^A\left[\frac{\theta(\alpha)}{\alpha}\right]\right\}N(a_n),$$

$M(a_n)$ étant le maximum pour n donné de $|\alpha\varphi_1(\alpha, n)|$, α variant de o à a_n, et $N(a_n)$ le maximum pour n donné de $\left|\int_\alpha^\beta t^2\varphi_1(t, n)\,dt\right|$ quand (α, β) est un intervalle quelconque tel que l'on ait $a_n \leqslant \alpha < \beta \leqslant A$. On voit qu'il suffit que $\frac{1}{M(a_n)}$ et $N(a_n)$ soient des infiniment petits de l'ordre de a_n pour qu'on puisse en conclure que l'intégrale considérée tend vers zéro.

Ainsi, *lorsque* $\varphi(\alpha, n)$ *satisfait aux conditions* a) *de l'énoncé du numéro précédent et lorsqu'il est possible de trouver un nombre* a_n *tendant vers zéro avec* $\frac{1}{n}$ *tel que les quantités ci-dessus définies* $\frac{1}{M(a_n)}$ *et* $N(a_n)$ *soient de l'ordre de* a_n, *l'intégrale*

$$\int_0^l f(t)\,\varphi(t-x, n)\,dt$$

tend vers $f(x)$ *en tout point* x *tel que la fonction* $\mathcal{F}_1(\alpha)$,

$$\mathcal{F}_1(\alpha) = \int_0^\alpha |f(\alpha+x) + f(\alpha-x) - 2f(x)|\,dx,$$

admette une dérivée nulle, pour $\alpha = 0$.

Plaçons-nous maintenant dans les conditions indiquées à la fin du numéro précédent : φ satisfait aux conditions *a*), on a posé $\varphi_1 = P + Q$ et P satisfait aux conditions indiquées. Si donc on suppose qu'on définit $M(a_n)$ et $N(a_n)$ par la considération de $|\alpha Q(\alpha, n)|$ et de $\left|\int_\alpha^\beta t^2 Q(t, n)dt\right|$, et que l'on puisse déterminer a_n comme il est dit dans l'énoncé précédent, la conclusion de cet énoncé subsiste.

[**32**] La portée des énoncés de ce chapitre se trouve considérablement accrue moyennant une remarque très simple qui nous a déjà servie, mais qu'il importe de formuler explicitement.

Parmi les conditions du n° 22, les deux premières permettent d'affirmer que, pour les fonctions de celle des familles $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_5$ à laquelle elles sont relatives, la contribution dans $\int_0^l f(t)\varphi(t-x, n)dt$ de la partie extérieure à un certain intervalle (a, b), arbitrairement choisi intérieur à (o, l) et contenant x, tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Et même cette convergence vers zéro sera uniforme, quel que soit x dans (a_1, b_1) intérieur à (a, b), si la condition 2 du n° 22 est remplacée par la condition $\underline{\underline{2}}$ du n° 25; donc : *lorsque le noyau $\varphi(\alpha, n)$ satisfait aux deux premières conditions du n° 22 relatives à l'une des familles $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_5$, pour les fonctions de cette famille la convergence ou la divergence de $I_n[f(t), x]$ vers $f(x)$ ne dépend que de l'allure de la fonction au voisinage du point x.*

Et aussi : *si $\varphi(\alpha, n)$ satisfait aux conditions* 1 *(n° 22) et $\underline{\underline{2}}$ (n° 25) relatives à l'une des familles $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_5$ et si l'on considère deux fonctions f, f_1 de cette famille égale dans (a, b), quel que soit x dans (a_1, b_1) intérieur à (a, b), les deux intégrales $I_n[f(t), x]$, $I_n[f_1(t), x]$ convergent ou divergent en même temps et leur différence tend uniformément vers zéro.*

Tout cela a déjà été dit, c'est l'objet du chapitre précédent; mais il n'était peut-être pas inutile d'attirer l'attention sur ce fait que les conditions 3 et 4 du n° 22 n'interviennent pas dans ces énoncés, de sorte que, par exemple, un noyau satisfaisant aux conditions 1_1 (1), $\underline{\underline{2}}$, 3_v, 4 fournit une intégrale I_n qui, quelle que soit la fonction sommable f à laquelle on l'applique, tend uniformément vers f à l'intérieur de tout intervalle dans lequel f est continue et à variation bornée (2).

Tirons de là une autre conséquence. Supposons $\varphi \geqslant$ o et satisfaisant à la condition 4 du n° 22; alors, si f est comprise entre z et Z dans (o, l), quel que soit x dans (o, l), on aura, pour n assez grand, d'après A (n° 4),

$$z - \varepsilon < I_n[f(t), x] < Z + \varepsilon,$$

sous la seule réserve que $I_n[f(t), x]$ existe.

Mais d'après ce qui précède, au lieu de définir z et Z par la considération de

(1) Pour cette notation, voir n° 27, en note.

(2) L'application aux séries de Fourier est évidente; voir le numéro suivant.

tout $(0, l)$, on peut n'en conserver qu'une petite portion contenant x, de sorte que, *si* m *et* M *sont les minimum et maximum de* f *au point* x, λ *et* Ω *les limites d'indéterminations pour* $n = \infty$ *de l'intégrale* $I_n[f(t), x]$, *on a :*

$$m \leqslant \lambda \leqslant \Omega \leqslant M,$$

quand le noyau $\varphi(\alpha, n)$ *est positif et satisfait à la condition* 4 *du n° 22.*

VII.

[**33**] *L'intégrale de Fourier-Dirichlet.* — L'intégrale

$$\mathfrak{D}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin (2n+1)\dfrac{x-t}{2}}{\sin \dfrac{x-t}{2}}\, dt$$

représente, on le sait, la somme des $n+1$ premiers termes de la série de Fourier de $f(x)$. Sa théorie est connue; je rappelle seulement les résultats la concernant, qui sont établis par ce qui précède.

$\mathfrak{D}_n$ tend vers $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, quand n augmente indéfiniment, si x est intérieur à un intervalle (α, β) où $f(x)$ est à variation bornée; la convergence est uniforme si x est dans (a, b) entièrement intérieur à (a_1, b_1) où $f(x)$ est continue et à variation bornée (n^{os} 22, 25, 32).

La convergence où la divergence de $\mathfrak{D}_n$, pour une valeur x, dépend seulement de l'allure de f au voisinage de cette valeur x, quelle que soit d'ailleurs la fonction sommable f (n° 32).

Le noyau

$$\frac{1}{\pi}\frac{\sin \dfrac{2n+1}{2} t}{\sin \dfrac{t}{2}} = \varphi(t, n)$$

est tel que $\int_0^{2\pi} |\varphi(t, n)|\, dt$ n'est pas bornée, car on a :

$$\pi\int_0^{\pi} |\varphi(t, n)|\, dt > \sum_{p=0}^{p=n-1} \int_{\frac{\pi}{3}\frac{6p+1}{6(2n+1)}}^{\frac{\pi}{3}\frac{6p+5}{(2n+1)}} \frac{\sin \dfrac{2n+1}{2} t}{\sin \dfrac{t}{2}}\, dt > \sum_{p=0}^{p=n-1} \int_{\frac{\pi}{3}\frac{6p+1}{2n+1}}^{\frac{\pi}{3}\frac{6p+5}{2n+1}} \frac{1}{t}\, dt,$$

puisque dans les intervalles considérées $\sin \frac{2n+1}{2} t$ surpasse $\frac{1}{2}$; or, cela s'écrit :

$$\pi \int_0^{\pi} |\varphi(t, n)| dt > \sum_{p=0}^{p=n-1} \mathrm{L}\left(1 + \frac{4}{6p+1}\right),$$

et la série de terme général $\mathrm{L}\left(1 + \frac{4}{6p+1}\right)$ est divergente.

De là résulte (n[os] 22, 27) qu'il existe des fonctions continues dont la série de Fourier n'est pas partout convergente, et aussi des fonctions continues dont la série de Fourier est partout convergente (1), mais n'est pas partout uniformément convergente.

Relativement aux séries de Fourier, on peut ajouter que les coefficients d'une telle série tendent vers zéro, quelle que soit la fonction sommable qui a donné naissance à la série (n° 13). Voir aussi les résultats des deux numéros suivants.

[**34**] *Intégrale de Poisson.* — Cette intégrale s'écrit :

$$\mathrm{P}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\alpha - x) + r^2} d\alpha.$$

Le noyau

$$\varphi(\alpha, n) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\alpha + r^2}$$

est positif ; il tend uniformément vers zéro dans tout intervalle où $\cos\alpha$ ne s'annule pas, quand on donne à r des valeurs, fonctions de n, tendant vers 1 par valeurs plus petites que 1. Donc il suffit, ce qui est immédiat, de vérifier que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha, n) d\alpha = 1$$

pour en conclure que P_n tend vers $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ en tout point x de discontinuité de première espèce de la fonction f sommable (n° 28) ; cette convergence est uniforme à l'intérieur de tout intervalle de continuité (n° 25). La convergence de

(1) Pour être tout à fait rigoureux, je devrais seulement conclure l'existence de fonctions continues dont la série de Fourier ne converge pas partout *vers la fonction ;* car, du n° 22 et du chapitre v, il résulte seulement que si φ satisfait aux conditions 1, 2, 4 du n° 22 pour une des familles $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_5$ sans satisfaire à la condition 3 correspondante, il existe une fonction $f(t)$ faisant partie de la famille considérée, nulle et continue pour $t = x$ et telle que $\mathrm{I}_n[f(t), x]$ ne tende pas vers zéro. Mais en modifiant très légèrement les constructions du chapitre v, on arriverait à une $f(t)$ telle que la limite supérieure d'indétermination de $|\mathrm{I}_n[f(t), x]|$ soit infinie.

Pour le cas des séries de Fourier de fonctions continues, on sait d'ailleurs que la convergence ne peut avoir lieu vers une autre limite que la fonction ayant donnée naissance à la série ; cette proposition intéressante pourrait, sans doute, être étendue à de nombreuses intégrales singulières.

P_n en un point de discontinuité ne dépend que de la nature de $f(x)$ au voisinage de ce point (n° 32).

$\alpha\varphi(\alpha, n)$ a évidemment une variation totale finie et bornée, s'il en est ainsi pour $\sin \alpha \,.\, \varphi(\alpha, n)$. Étudions cette quantité ; on a :

$$2\pi \frac{\partial}{\partial\alpha}[\sin\alpha \,.\, \varphi(\alpha, n)] = \frac{(1 - r^2)\sin\alpha}{1 - 2r\cos\alpha + r^2}\left[\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{2r\sin\alpha}{1 - 2r\cos\alpha + r^2}\right]$$
$$= \frac{1 - r^2}{[1 - 2r\cos\alpha + r^2]^2}[(1 + r^2)\cos\alpha - 2r].$$

Cette expression n'a donc qu'un nombre fini de maxima ou minima dans $(0, 2\pi)$ et la valeur absolue de ses maxima et minima est

$$\frac{[1 - r^2]\sqrt{1 - \left(\frac{2r}{1 + r^2}\right)^2}}{1 - 2r\frac{2r}{1 + r^2} + r^2} = 1.$$

Donc (n° 30) P_n tend vers $f(x)$ en tout point x tel que $f(x + t)$ [et plus généralement $f(x + t) + f(x - t) - f(x)$] soit, pour $t = 0$, la dérivée de son intégrale indéfinie en t.

Ce résultat est dû à M. Fatou qui l'a obtenu par des considérations différentes [1].

Bien entendu, nous n'étudions ici que la variation de l'intégrale de Poisson quand on se déplace sur un rayon ; il n'y aurait aucune difficulté à aller plus loin, mais aussi aucun intérêt, puisque la méthode utilisée ici est la méthode classique.

[**35**] *Intégrale de M. Fejér.* — Cette intégrale s'écrit :

$$F_n = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left[\frac{\sin n\frac{t - x}{2}}{\sin\frac{t - x}{2}}\right]^2 dt;$$

elle représente la moyenne arithmétique des n premières sommes de la série de Fourier de la fonction sommable f.

Le noyau est positif et tend uniformément vers zéro quand la variable est dans un intervalle entièrement intérieur à $(0, 2\pi)$; de plus, il est évident que $\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha, n)d\alpha$ est égal à 1 puisque cette quantité est la moyenne arithmétique des n premières sommes de la série de Fourier de la fonction f constamment égale à 1.

---

(1) Séries trigonométriques et Séries de Taylor (Thèse 1906 ou *Acta mathématica*, t. XXX, pp. 335-400). Voir pp. 348-349.

Donc F_n tend vers $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$ en tout point de continuité ou de discontinuité de première espèce, et cela uniformément, quel que soit x, dans un intervalle complètement intérieur à un intervalle de continuité de f. La convergence de F_n en un point ne dépend d'ailleurs que de l'allure de f au voisinage du point étudié.

Étudions maintenant $\frac{\partial}{\partial \alpha}\varphi(\alpha, n)$. On a :

$$2\pi \frac{\partial}{\partial \alpha}\varphi(\alpha, n) = \frac{\sin n\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{n}\frac{\sin^2 n\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Posons

$$P(\alpha, n) = -\frac{1}{2n\pi}\frac{\sin^2 n\frac{\alpha}{2}}{\sin^3\frac{\alpha}{2}}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$Q(\alpha, n) = \frac{\sin n\alpha}{4\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

et essayons d'utiliser les résultats indiqués en fin des n^{os} 30 et 31. Pour la simplicité du calcul, nous remplacerons $\alpha P(\alpha, n)$, $\alpha Q(\alpha, n)$, $\alpha^2 Q(\alpha, n)$ par $2\sin\frac{\alpha}{2}.P(\alpha, n)$, $2\sin\frac{\alpha}{2}.Q(\alpha, n)$, $\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2.Q(\alpha, n)$, ce qui est évidemment légitime.

$P(\alpha, n)$ tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$ dans tout intervalle entièrement intérieur à $(0, 2\pi)$; de plus, on a :

$$\left|\int_0^{\pi} 2\sin\frac{\alpha}{2}.P(\alpha, n)d\alpha\right| = 2\left|\int_0^{\pi}\varphi(\alpha, n)\cos\frac{\alpha}{2}\,d\alpha\right| < 2\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha, n)d\alpha = 2.$$

P remplit donc les deux conditions du n° 30.

On a d'ailleurs :

$$2\sin\frac{\alpha}{2}.Q(\alpha, n) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin n\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

quantité dont le maximum est $\frac{n}{\pi}$. Donc, quel que soit a_n (n° 31), on a $M(a_n) \leqslant \frac{n}{\pi}$.

$$\left|\int_\alpha^\beta \left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2.Q(\alpha, n)d\alpha\right| = \frac{1}{\pi}\left|\int_\alpha^\beta \sin n\alpha\,d\alpha\right| \leqslant \frac{2}{n\pi},$$

par suite on a : $N(a_n) \leqslant \frac{2}{n\pi}$.

Si donc on prend $a_n = \frac{\pi}{n}$, les conditions du n° 31 sont remplies.

Ainsi il est prouvé que F_n tend vers $f(x)$ pour toute valeur de x telle que $|f(x+t)|$ [et plus généralement $|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|$] est, pour $t=0$, la dérivée de son intégrale indéfinie.

La démonstration précédente ne diffère que par des détails de forme de celle que j'ai donnée dans un article des *Mathematische Annalen* (Recherches sur la convergence des séries de Fourier, Bd LXI, 1905, p. 274). C'est en vue de cette démonstration qu'a été écrit le n° 31 ; j'avais d'abord cru pouvoir étendre assez le théorème du n° 30 pour pouvoir en déduire le théorème qui nous occupe, mais à la rédaction je me suis aperçu de mon erreur. Ce n'était d'ailleurs pas la première fois que je me trompais sur ce point; dans mes *Leçons sur les séries trigonométriques*, n° 50, j'ai prétendu donner une démonstration élémentaire de la proposition précédente, mais, comme on le verra sans peine, mon raisonnement est basé sur une grossière faute de calcul, sur l'oubli d'un exposant 2. Pour réparer cette erreur il faut, ou bien substituer à la démonstration fautive celle de l'article des *Mathematische Annalen*, ou bien comme je l'ai indiqué dans le même article au début du paragraphe VI, se contenter de démontrer que la moyenne arithmétique des n premières moyennes arithmétiques des sommes de la série de Fourier de la fonction $f(x)$ tend vers $f(x)$ en tout point x où $f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$ est, pour $t=0$, la dérivée de son intégrale indéfinie en t. La démonstration de ce fait résulte d'ailleurs de l'expression de cette seconde moyenne arithmétique qui se présente sous la forme d'une intégrale singulière à noyau positif à laquelle s'appliquent les théorèmes des n°s 26 et 30.

On peut appliquer à l'intégrale de M. Fejér, comme à celle de Poisson, les remarques du n° 32, et de là se déduisent les résultats sur la nature de la divergence d'une série de Fourier que j'ai donnés dans mes *Leçons sur les séries trigonométriques*, au n° 51, et qui avaient été obtenus par le même procédé par M. Fejér lui-même (*Untersuchungen über Fouriersche Reihen*, Math. Ann., Bd LVIII, p. 68). Je rappelle ces résultats uniquement pour réparer une omission, pour dire qu'ils avaient été obtenus antérieurement par le Professeur E. Hossenfelder comme conséquences d'une étude directe de l'intégrale $\mathfrak{D}_n$ faite suivant les méthodes jadis utilisées par P. du Bois-Reymond (*Zur Theorie der trigonometrischen Reihen*, XXVII Jahresbericht des königl. Gymn. zu Strasburg, 1900 ; Teubner, éditeur).

[**36**] *L'intégrale de Weierstrass.* — L'intégrale de Weierstrass s'écrit :

$$W_n = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-n^2(t-x)^2}\, dt;$$

Weierstrass l'appliquait à une fonction f uniformément continue et bornée dans $(-\infty, +\infty)$.

Le noyau étant positif, tendant uniformément vers zéro dans tout intervalle fini ou non ne contenant pas zéro et de plus étant tel que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha, n)d\alpha = 1$, les théorèmes des n[os] 22, 28 s'appliquent et nous pouvons conclure que W_n tend vers

$$\tfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$$

en tout point de continuité ou de discontinuité de première espèce quelle que soit la fonction f, *sommable dans* $(-\infty, +\infty)$; et cela uniformément à l'intérieur de tout intervalle de continuité.

Mais ce résultat ne contient pas celui de Weierstrass [1]. Remarquons que, quels que soient $a<0$ et $b>0$, les intégrales $\int_{-\infty}^{a} \varphi(\alpha, n)d\alpha$, $\int_{b}^{+\infty} \varphi(\alpha, n)d\alpha$ tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Donc, si f est bornée à l'extérieur de (a, b) et sommable à l'intérieur, W_n a encore un sens et la contribution dans W_n des intervalles $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Mais, d'autre part, $\varphi(\alpha, n)$ tendant uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$ dans $(-\infty, a)$ et $(b, +\infty)$ la contribution de ces deux intervalles tend aussi vers zéro dans W_n quand f est bornée ou non, mais sommable dans $(-\infty, +\infty)$. Par suite, W_n a un sens si f est sommable dans un intervalle (λ, μ) fini ou non et bornée à l'extérieur de cet intervalle, et la conclusion précédente s'applique à W_n, qu'on étende l'intégrale W_n de $-\infty$ à $+\infty$ comme il a été indiqué ou seulement à un intervalle (a, b) contenant 0 à son intérieur.

On a

$$\alpha\varphi(\alpha, n) = \frac{\alpha n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2\alpha^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[\alpha\varphi(\alpha, n)] = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2\alpha^2}[1 - 2n^2\alpha^2];$$

donc, $\alpha\varphi(\alpha, n)$ admet le minimum 0 qui est atteint pour $\alpha = \pm\infty$, un maximum et un minimum atteints pour $1 - 2n^2\alpha^2 = 0$ et égaux à $\pm\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$. Les conclusions du n° 30 s'appliquent et W_n tend vers $f(x)$ en tout point x tel que

$$f(x+t') + f(x-t) - 2f(x)$$

soit, pour $t=0$, la dérivée de son intégrale indéfinie.

Pour généraliser l'intégrale W_n, Weierstrass considère le noyau

$$\varphi(\alpha, n) = \frac{n}{2\omega}\Psi(n\alpha),$$

---

[1] Il importe de se rappeler que f et $|f|$ sont sommables à la fois, et que le fait que f mesurable soit bornée dans $(-\infty, +\infty)$ n'entraîne pas la sommabilité de f.

Ψ étant une fonction paire bornée, continue et positive dans $(-\infty, +\infty)$ et ω désignant l'intégrale $\int_0^\infty \Psi(x)dx$ que l'on suppose finie.

A ces intégrales s'appliquent le théorème du n° 26 et les remarques du n° 32.

[37] *L'approximation des fonctions de grands nombres.* — Le mémoire de Weierstrass (1) ne traite que des généralisations qui viennent d'être indiquées, les propriétés de W_n étant supposées connues.

C'est qu'en effet l'étude de cette intégrale avait déjà été faite à l'occasion de la Théorie de la Chaleur.

L'étude du mouvement de la chaleur dans une droite indéfinie conduisit Fourier (2) à rechercher une intégrale de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

se réduisant pour $t = 0$ à une fonction donnée $f(x)$. Fourier remarque d'abord que la fonction

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2}\varphi\left(x + 2q\sqrt{kt}\right)dq$$

satisfait à l'équation proposée; il admet que la limite de cette fonction, pour $t = 0$, est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2}\varphi(x)dq = \varphi(x)\sqrt{\pi}$$

et il en conclut

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{\pi}},$$

d'où

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2}f\left(x + 2q\sqrt{kt}\right)dq.$$

Or, faisons le changement de notations :

$$2\sqrt{kt} = \frac{1}{n}, \qquad 2q\sqrt{kt} = \alpha;$$

on trouve

$$u = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+\alpha)e^{-n^2\alpha^2}d\alpha;$$

c'est l'intégrale W_n.

---

(1) *Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen* (Sitz. d. K. Pr. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1885). Une traduction, faite par M. Laugel, a été publiée dans le *Journal de mathématiques* en 1886.

(2) *Théorie de la chaleur*, art. 364, pp. 413-415 du tome I de l'édition complète des *Œuvres de Fourier*, Paris, 1888.

Comme l'indique Fourier, Laplace (1), de son côté, effectuait la même intégration d'une façon analogue.

L'étude des questions d'approximation des fonctions de grands nombres que soulève le Calcul des probabilités conduisit aussi Laplace à étudier toute une famille d'intégrales comprenant en particulier W_n. La méthode qu'emploie Laplace consiste d'ailleurs à ramener toutes ces intégrales à une intégrale analogue à W_n par un changement de variables (2).

Parmi les résultats de Laplace, je choisis celui qui est le plus important pour nous : φ, u, u', u'' ... étant des fonctions positives de x; s, s', s'' des grands nombres, Laplace pose $y = \varphi u^s u'^{s'} u''^{s''} \ldots$

Y désigne le maximum de y, de sorte que $\frac{dY}{dx}$ est supposé nul. Alors, en supposant $\frac{d^2Y}{dx^2} < 0$, Laplace donne comme valeur approchée de $\int_{-\infty}^{+\infty} y\,dx$ l'expression

$$\frac{\sqrt{2\pi}\,Y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{-\frac{d^2Y}{dx^2}}}.$$

La démonstration de Laplace manque entièrement de rigueur, la signification même qu'il faut accorder au résultat est peu claire. Cependant ce résultat a été fréquemment invoqué par les géomètres du dix-neuvième siècle, soit pour démontrer certaines propositions dans les cas où les inconvénients signalés étaient peu sérieux, soit pour montrer seulement la vraisemblance de ces propositions.

Dans un *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en séries* (3), M. Darboux a légitimé et précisé le résultat de Laplace. Il a prouvé que, $|\varphi(x)|$ n'atteignant dans (A, B) qu'un seul maximum et l'atteignant au point α, la valeur principale de $\int_A^B f(x)\,\overline{\varphi(x)}^n dx$ est, pour n très grand,

$$\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,f(\alpha)\,\varphi^n(\alpha)\,\sqrt{\frac{-2\varphi(\alpha)}{\varphi''(\alpha)}}.$$

Il ressort de la *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes* (4) que ce dernier avait obtenu un résultat analogue, auquel il donne une forme particulièrement intéressante pour nous. On a :

$$\lim_{m=\infty} \sqrt{m} \int_a^c f(x)\,\varphi(x)^m dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,f(b)$$

(1) *Mémoire sur diverses questions d'analyse* (Journal de l'École polytechnique, cahier XV).

(2) *Théorie analytique des probabilités*, livre I, 2e partie, chapitre I. Voir en particulier le no 27, pp. 111-115 du tome VII des *Œuvres de Laplace*, Paris, 1847.

(3) *Journal de math.*, 3e série, t. IV, 1878 (1re partie, pp. 5-56).

(4) Tome II, lettres 314 à 317. Voir sur ce sujet une note qui paraîtra à la suite de ce mémoire.

si $\varphi(x)$ est positif dans (a, c), $(a < c)$, plus petit que 1, sauf au point b au voisinage duquel on a :

$$\varphi(b+t) = 1 - \alpha t^2(1+\varepsilon),$$

α étant une constante positive, ε une fonction de t qui tend vers zéro avec t; f est continue au point b.

Ce résultat de Stieltjes, comme celui de M. Darboux, contient les plus simples de ceux qui résultent des considérations de ce mémoire. Voir, par exemple, les résultats relatifs à W_n et aux intégrales L_n et V_n des n[os] 39 et 41.

[**38**] *Théorèmes de Weierstrass.* — Quand on connaît une fonction entière représentant dans un intervalle fini une fonction réelle donnée avec une approximation aussi bonne que l'on veut, il est évidemment facile d'en conclure que la fonction donnée est représentable avec telle approximation que l'on veut par un polynome ou une suite finie de Fourier. D'après ce qui précède, toute fonction continue est dans ce cas puisque P_n, F_n, W_n sont des fonctions entières de x. La démonstration qui vient d'être faite est due à Weïerstrass en ce qui concerne W_n, à M. Picard pour P_n, à M. Fejér pour F_n.

Signalons une petite différence entre W_n et les autres intégrales. W_n est étendue à un intervalle infini, on ne peut donc espérer représenter dans tout cet intervalle le noyau de W_n aussi approximativement que l'on veut par un polynome ou une suite de Fourier, et ce n'est qu'après avoir démontré directement que W_n est une fonction entière qu'on pourra obtenir des polynomes ou suites de Fourier approchées. Au contraire, quand l'intégrale considérée est étendue à un intervalle fini, on peut espérer approcher autant que l'on veut de son noyau avec un polynome ou suite de Fourier, et le remplacement du noyau par ce polynome ou cette suite de Fourier fournit des polynomes ou suites de Fourier approchées. Cela a l'avantage de conduire à des expressions plus simples des polynomes ou suites de Fourier approchées.

Mais le seul cas vraiment simple est celui où $\varphi(\alpha, n)$ est un polynome ou une suite de Fourier; les théorèmes de Weierstrass sont alors immédiats. Dans le cas de F_n, $\varphi(\alpha, n)$ est une suite de Fourier; aussi F_n est-elle une suite de Fourier approchée de f.

[**39**] *Représentation des fonctions continues par des polynomes dans un intervalle fini.* — Voyons comment on peut choisir $\varphi(\alpha, n)$ relatif à $(0, 1)$ pour obtenir des polynomes approchés dans un intervalle fini, qu'on supposera être intérieur à $(0, 1)$.

Posons $\varphi(\alpha, n) = k_n \varphi_1(\alpha, n)$, k_n étant une constante. Si φ_1 était connu, on pourrait déterminer k_n par la condition que $k_n \int_{-1}^{+1} \varphi_1(\alpha, n)\,d\alpha$ soit égale à 1 quel que soit n ou au moins tende vers 1, quand n croît indéfiniment.

Étant donné les conditions que $\varphi(\alpha, n)$ doit remplir, on est assez naturellement conduit à rechercher φ_1 parmi les familles de fonctions qui sont représentées par des courbes ayant pour courbe limite la ligne polygonale formée du segment $(-1, 0)$ de ox, du segment $(0, +1)$ puis du segment $(+1, 0)$ de oy, et enfin du segment $(0, +1)$ de ox.

Si l'on se rappelle la forme de la courbe des erreurs, on est conduit à essayer $\varphi_1 = e^{-n^2\alpha^2}$ d'où l'intégrale W_n et des intégrales analogues.

On généralise ce choix en prenant φ_1 de la forme

$$\varphi_1(\alpha, n) = [\varphi_2(\alpha)]^N,$$

N étant une fonction indéfiniment croissante de n (1). Il est évident que la fonction $\varphi(\alpha, n)$ déduite de la fonction $\varphi_1(\alpha, n)$ remplit bien les conditions voulues si φ_2 est une fonction continue positive égale à 1 pour $\alpha = 0$ et plus petite que 1 pour α non nul et compris dans $(-1, +1)$. Le choix le plus simple auquel on est ainsi conduit pour que $\varphi(\alpha, n)$ soit un polynome est celui de

$$\varphi_1(\alpha, n) = (1 - \alpha^2)^n;$$

k_n se calcule alors facilement par l'intégration par parties. On a :

$$\frac{1}{k_n} = \int_{-1}^{+1} (1 - \alpha^2)^n d\alpha = 2n \int_{-1}^{+1} \alpha^2 (1 - \alpha^2)^{n-1} d\alpha = \frac{2n}{k_{n-1}} - \frac{2n}{k_n},$$

d'où

$$\frac{1}{k_n} = 2 \cdot \frac{2.4.6 \ldots (2n)}{3.5.7 \ldots (2n+1)}.$$

D'ailleurs, d'après la forme de Wallis, on a :

$$\lim_{n=\infty} \frac{2.4.6 \ldots (2n)}{3.5.7 \ldots (2n+1)} \cdot \frac{2.4.6 \ldots (2n)}{1.3.5 \ldots (2n-1)} = \frac{\pi}{2};$$

mais on a aussi

$$\frac{\dfrac{2.4.6 \ldots (2n)}{3.5.7 \ldots (2n+1)}}{\dfrac{2.4.6 \ldots (2n)}{1.3.5 \ldots (2n-1)}} (2n+1) = 1;$$

donc

$$\lim_{n=\infty} (2n+1) \frac{1}{2k_n} \cdot \frac{1}{\pi k_n} = 1.$$

---

(1) Pour le calcul de k_n dans ce cas, voir le n° 37.

En définitive on prendra

$$L_n = k_n \int_0^1 f(t)[1-(t-x)^2]^n dt$$

avec

$$k_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3.5.7\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n)} \qquad \text{ou} \qquad k_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

Cette intégrale a été étudiée récemment par M. Landau (1).

Comme les intégrales les plus intéressantes ne sont certainement pas celles qu'on construit artificiellement mais celles qui se présentent naturellement, je ne ferai pas d'autre application du procédé indiqué pour choisir $\varphi(\alpha, n)$. Je préfère indiquer un procédé de choix en apparence très différent et qui conduira aussi à l'intégrale L_n.

Posons

$$\psi(\alpha, n) = 2\int_0^\alpha \varphi(\alpha, n)d\alpha.$$

$\psi(\alpha, n)$ doit être une fonction continue, croissante si φ est positif, c'est-à-dire si on utilise le résultat simple du n° 26, qui tend, pour n croissant, vers la fonction *Signe* α égale à $+1$ ou à -1, suivant que α est positif ou négatif.

On est ainsi ramené à la recherche d'une expression de la fonction *Signe* (α) comme limite d'une suite de fonctions continues qu'on devra vérifier être croissantes. C'est là un problème identique au fond à celui auquel conduit la méthode de démonstration du théorème de Weierstrass qu'a indiquée M. Runge (2). On peut donc utiliser les calculs qu'on a faits pour l'application de cette méthode. Par exemple, imitant un raisonnement de M. Mittag-Leffler, on peut essayer

$$\psi(\alpha, n) = 2^{1-(1-\alpha)^n} - 1,$$

$$\varphi(\alpha, n) = n(1-\alpha)^{n-1}\,2^{1-(1-\alpha)^n}\,\mathrm{L}2.$$

Il serait facile de déduire de cela des polynomes approchés d'une fonction donnée. Pour indiquer un cas où $\varphi(\alpha, n)$ se présente de suite sous la forme d'un polynome, je remarque que *Signe* (α) est la dérivée de la fonction

$$|\alpha| = \sqrt[2]{1-(1-\alpha^2)} = 1 - \frac{1}{2}(1-\alpha^2) - \frac{1}{2 \cdot 4}(1-\alpha^2)^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}(1-\alpha^2)^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}(1-\alpha^2)^4 \ldots$$

---

(1) E. Landau, *Ueber die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion* (Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, t. XXV, pp. 337-345).

(2) Cette méthode se trouve exposée dans les *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes* de M. E. Borel, au chapitre IV. On trouvera là la bibliographie relative aux théorèmes de Weierstrass.

Le développement précédent est valable dans $(-\sqrt{2}, +\sqrt{2})$. Lorsqu'on le dérive deux fois, tous les termes disparaissent comme il fallait s'y attendre. Mais, si l'on borne le développement à ses termes de degrés non supérieurs à $n+1$ en $1-\alpha^2$, il reste un terme dans la dérivée seconde, le terme

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3.5\ldots(2n+1)}{2.4\ldots(2n)}(1-\alpha^2)^n.$$

Si on essaie cette quantité pour $\varphi(\alpha, n)$, on retrouve L_n (¹).

[**40**] *Représentation des fonctions continues par des polynomes dans un intervalle infini.* — Ce qu'on se propose alors c'est seulement que la convergence soit uniforme dans toute partie finie de l'intervalle considéré.

Soient (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... des intervalles de plus en plus grands et qui tendent vers l'intervalle infini donné (A, B); $\varphi_1(\alpha, n)$, $\varphi_2(\alpha, n)$, ... des noyaux propres à la représentation uniforme des fonctions continues dans ces intervalles. Supposons, de plus, ces noyaux positifs, afin de pouvoir utiliser la formule

$$|I_n - f(x)| \leqslant M[\Omega + \Omega_1] + \omega(\varepsilon)[1 \pm \Omega_1]$$

du n° 26 dans laquelle, je le rappelle, M est la borne supérieure de $|f(t)|$ dans l'intervalle $(0, l)$ auquel est étendue l'intégrale I_n, x est un point d'un intervalle (a, b) entièrement intérieur à $(0, l)$, ε est un nombre positif plus petit que a et que $l-b$, $\omega(\varepsilon)$ la borne supérieure de l'oscillation de $f(t)$ dans les intervalles de longueur 2ε compris dans $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$; enfin, Ω et $1 \pm \Omega_1$ désignent les quantités

$$\int_{-b}^{-\varepsilon} \varphi(\alpha, n)\,d\alpha + \int_{\varepsilon}^{l-a} \varphi(\alpha, n)\,d\alpha \quad \text{et} \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$$

Si nous supposons, ce qui est réalisé dans les exemples précédents, que l'on ait toujours

$$\int_{-l}^{+l} \varphi(\alpha, n)\,d\alpha \leqslant 1,$$

il en résulte que $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \varphi(\alpha, n)\,d\alpha$ est égal à $1 - \Omega_1$, Ω_1 étant positif, et que Ω ne surpasse pas Ω_1; la formule devient donc :

$$|I_n - f(x)| \leqslant 2M\Omega_1 + \omega(\varepsilon).$$

(¹) De la représentation analytique de $|\alpha|$ par la série ci-dessus indiquée on déduit des représentations analytiques des fonctions représentées par des lignes polygonales et de là se déduisent les théorèmes de Weierstrass. C'est la méthode de démonstration que j'ai indiquée autrefois (*Sur l'approximation des fonctions*, Bull. des Sc. math., 1898, p. 278); elle apparaît ainsi comme beaucoup moins éloignée qu'il aurait pu sembler de celle qui utilise l'intégrale L_n.

Supposons donc que l'on a toujours

$$\int_{a_p}^{b_p} \varphi_p(x, n)\,dx \leqslant 1,$$

posons

$$I_{n,p} = \int_{a_p}^{b_p} f(t)\,\varphi(t-x, n)\,dt,$$

et désignons par M_p le maximum de $|f(t)|$ dans (a_p, b_p); on aura

$$|I_{n,p} - f(x)| \leqslant 2 M_p \Omega_1^p + \omega(\varepsilon),$$

Ω_1^p désignant le nombre analogue à Ω_1 et relatif à φ_p, ε étant quelconque positif et x étant dans l'intervalle (a, b), arbitrairement choisi complètement intérieur à (a_p, b_p), et aussi à $(a_p + \varepsilon, b_p - \varepsilon)$.

Si l'on convient de prendre là dedans $\varepsilon = \frac{1}{p}$, pour p assez grand (a, b) sera intérieur à $(a_p + \varepsilon, b_p - \varepsilon)$.

Prenons ensuite n, fonction de p, de façon que pour la valeur de ε choisie $M_p \Omega_1^p$ soit, par exemple, inférieur à $\frac{1}{p}$. Ce qui, sauf pour le cas $f \equiv 0$ qu'on peut laisser de côté, entraîne $\lim_{p=\infty} \Omega_1^p = 0$, car M_p ne peut que croître avec p. Alors l'inégalité précédente montre que les noyaux $\varphi_p(x, n)$ choisis permettent la représentation uniforme de f dans toute partie (a, b) entièrement intérieur à (A, B).

Le choix de la correspondance entre n et p a été fait en vue d'une fonction déterminée f, mais comme seuls les nombres M_p ont servi dans ce choix, il est à peu près évident que *les noyaux considérés conviennent encore pour la représentation de toutes les fonctions* F, *telles que l'on ait, au moins pour x assez grand,*

$$|F(x)| \leqslant |f(x)|.$$

En effet, si cette inégalité est vérifiée pour x extérieur à l'intervalle fini (λ, μ), il suffira de remplacer dans les formules précédentes M_p par le plus grand des deux nombres M_p et m, m désignant le maximum de $|F(t)|$ dans (λ, μ), pour voir que l'intégrale $I_{n,p}$ relative à F tend bien vers F.

En invoquant un théorème de P. Du Bois-Reymond, on en déduira en particulier qu'étant donné une famille dénombrable quelconque de fonctions continues on peut les représenter toutes à l'aide des mêmes noyaux.

Si $f(x) = x$, la famille des F contient toutes les fonctions bornées et continues; toutes ces fonctions sont donc représentables à l'aide des mêmes noyaux; c'est d'ailleurs ce qui résultait de l'étude de W_n.

Au contraire, il est impossible de représenter avec les mêmes noyaux toutes les fonctions qui sont bornées et continues dans toute partie finie de (A, B) infini. Si, en effet, on suppose que les noyaux correspondants à (a_1, b_1), (a_2, b_2), ... sont $\varphi_1, \varphi_2, \ldots,$

par un raisonnement analogue à celui du n° 5 on construira une fonction f continue dans toute partie finie de (A, B) et telle que les intégrales $\int_{a_1}^{b_1} f(t)\varphi_1(t-x)dt$, $\int_{a_2}^{b_2} f(t)\varphi_2(t-x)dt$, ... ne convergent pas.

On a supposé les intervalles (a_i, b_i) finis parce qu'on supposait que les φ étaient des polynomes; si les φ sont quelconques, on pourra examiner de même le cas de noyaux étendus à tout (A, B); la conclusion est la même.

Remarquons encore que, quel que soit (A, B), qu'il soit fini ou non, à condition de définir f continûment à l'extérieur de (A, B), nous aurions pu considérer des (a_i, b_i) en partie extérieurs à (A, B).

[**41**] *Représentation d'une fonction continue par des suites finies de Fourier.* — L'intervalle que l'on considère est alors fini et au plus égal à la période des suites, qu'on supposera être 2π, ou bien encore la fonction à représenter a la même période que les suites. On désire la représentation uniforme à l'intérieur de tout intervalle de continuité et par suite partout s'il s'agit de fonctions continues périodiques.

L'intégrale F_n de M. Fejér fournit une première solution; pour en avoir d'autres on peut reprendre les considérotions du n° 39. On est ainsi conduit à l'intégrale

$$V_n = \frac{k_n}{2}\int_0^{2\pi} f(t)\left[\cos\frac{t-x}{2}\right]^{2n} dt$$

où k_n a les valeurs indiquées au n° 39, ou encore la valeur

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{2.4\ldots(2n)}{1.3\ldots(2n-1)}$$

avec laquelle on a $\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha, n)d\alpha = 1$.

Cette intégrale a été considérée récemment par M. de Vallée-Poussin [1] en même temps que son analogue L_n, dont M. Landau venait de signaler les propriétés.

L'analogie entre L_n et V_n va presque jusqu'à l'identité. Considérons l'intégrale

$$L_v = K_v\int_0^1 f(t)[1-(t-x)^2]^v\, dt,$$

dans laquelle v n'est plus nécessairement entier. Ce que nous avons dit de I_n est vrai de L_v pourvu que K_v soit un infiniment grand équivalent à l'inverse de $k_v = \int_{-1}^{+1}(1-\alpha^2)^n d\alpha$. Or il est évident que si v est compris entre n et $n+1$, k_v est

(1) *Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynomes et des suites finies de Fourier* [Bull. de l'Acad. roy. de Belgique (cl. des Sciences), n° 3 (mars), 1908, pp. 193-254].

compris entre k_{n+1} et k_n; donc k_v et $k_{E(v)}$ sont deux infiniment grands équivalents. On pourra donc prendre $K_v = \sqrt{\frac{v}{\pi}}$ ou un infiniment grand équivalent.

Faisons le changement de variables $t = \sin\frac{\theta}{2}$ dans

$$K_v k_v = K_v \int_{-1}^{+1} (1 - \alpha^2)^v d\alpha = 1,$$

il vient

$$K_v k_v = \frac{K_v}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^{2v+1}\frac{\theta}{2}\, d\theta = 1.$$

Si l'on tient compte de ce que $\cos^{2v+1}\frac{\theta}{2}$ a la période 2π, il en résulte que

$$\frac{K_v}{2} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \cos^{2v+1}\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

tend vers 1 quel que soit λ positif et plus petit que 2π; et par suite l'intégrale

$$\Lambda_v = \frac{K_v}{2} \int_0^{2\pi} f(t) \cos^{2v+1}\left(\frac{t-x}{2}\right) dt$$

tend vers f, si f est continue. Mais V_n n'est pas autre chose que $\Lambda_{v-\frac{1}{2}}$, puisque K_v et $K_{v-\frac{1}{2}}$ sont deux infiniment grands équivalents. On conçoit donc que, dans le numéro suivant, on puisse conclure une propriété de V_n de l'étude de L_v parce que ces deux intégrales dérivent d'un même noyau (¹). Cela ne serait plus légitime cependant s'il s'agissait d'une propriété dans laquelle on doit prendre pour K_v exactement l'inverse de $\int_{-1}^{+1} (1 - \alpha^2)^v d\alpha$; mais on est en droit d'espérer que des raisonnements, analogues à ceux qui auraient fourni cette proposition, exigeant que dans L_n on ait pris pour k_n la première valeur indiquée au n° 39, permettraient de conclure pour le cas où dans V_n on aurait pris la valeur de k_n indiquée dans ce numéro-ci (²).

[**42**] *Représentation des fonctions discontinues par* L_n *et* V_n. — Le noyau de L_v est

$$\varphi(\alpha, v) = k_v(1 - \alpha^2)^v;$$

donc on a :

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}[\alpha\varphi(\alpha, v)] = k_v(1 - \alpha^2)^{v-1}[1 - (2v + 1)\alpha^2].$$

(¹) Il serait plus exact de dire d'un même élément différentiel $\varphi(\alpha, n)d\alpha$.

(²) Si dans L_v on avait posé $t = \sin\frac{\theta}{2}$, $x = \sin\frac{\xi}{2}$, on aurait eu une intégrale singulière propre à la représentation d'une fonction continue dans $(0, \pi)$. Cette intégrale n'est pas de la forme de celles que nous avons étudiées; nos énoncés ne s'y appliquent donc pas immédiatement, au contraire celui de M. Hobson (voir la note 6 du chapitre I) s'y applique.

$\alpha\varphi(\alpha, v)$, qui est égal à o pour $\alpha = \pm 1$, atteint donc un maximum et un minimum, pour $1 - 2(v+1)\alpha^2 = 0$, lesquels sont égaux à

$$\pm \frac{k_v}{\sqrt{2v+1}} \left(1 - \frac{1}{2v+1}\right)^v,$$

quantité qui, pour $v = \infty$, a pour limite $\pm \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$.

Le noyau φ_1 de Λ_v est $\varphi\left(\sin\frac{\theta}{2}, v\right)\cos\frac{\theta}{2}$. Le facteur $\frac{\theta\cos\frac{\theta}{2}}{\alpha} = \theta \operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}$ étant à variation bornée, $\theta\varphi_1$ est à variation uniformément bornée comme $\alpha\varphi(\alpha, v)$. Donc (n° 30), L_v et Λ_v et par suite L_n *et* V_n *tendent vers* $f(x)$ *en tout point* x *tel que*

$$f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

soit, pour $t = 0$, *la dérivée de son intégrale indéfinie en* t.

Ce théorème, en ce qui concerne L_n, a été établi par M. F. Riesz [1], qui a prouvé de plus que L_n jouit des propriétés qui résultent des remarques du n° 32, lesquelles s'appliquent à L_v et Λ_v.

VIII.

[**43**] *Les problèmes de moments.* — Stieltjes, dans ses *Recherches sur les fractions continues* [2], a appelé problème des moments la recherche d'une fonction $f(x)$ satisfaisant aux égalités de la forme $\int_0^\infty f(x)\, x^m dx = c_m$, les c_m étant des constantes données, $(m = 0, 1, 2, \ldots)$.

On dit souvent maintenant qu'on a à résoudre un problème de moments lorsqu'on a à déterminer une fonction $f(x)$ par des égalités de la forme $\int_a^b f(x)\, g_m(x) dx = c_m$, les $g_m(x)$ et c_m étant des fonctions et constantes données.

Le cas de $g_m(x) = x^m$, $a = 0$, $b = 1$, a été étudié par Stieltjes lui-même [3] qui a

---

(1) *Ueber die Approximation einer Funktion durch Polynome* (Jahresbericht d. Deutschen Math. Vereinigung, XVII, 1908, Heft 5, pp. 194-211).

(2) *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse*, t. VIII, 1894; IX, 1895.

(3) *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, t. II, lettre 385. — Je saisis cette occasion de signaler, ce que mon ignorance de la correspondance d'Hermite et de Stieltjes m'avait empêché de faire, l'entière analogie de l'artifice que Stieltjes emploie dans cette lettre pour démontrer qu'une fonction continue f est bien déterminée par les nombres $c_m = \int_0^1 f(t)\, t^m dt$ et de celui que j'ai utilisé à la page 37 de mes *Leçons sur les séries trigonométriques* pour prouver qu'une fonction continue est déterminée par ses constantes de Fourier.

démontré que ce problème ne saurait admettre plus d'une solution continue. Ce résultat avait d'ailleurs été obtenu antérieurement par M. Lerch (¹).

Comme le remarque M. Landau dans son travail déjà cité, la théorie de l'intégrale L_n fournit ce résultat. Il y a même plus; $\varphi(\alpha, n)$ étant un noyau polynome relatif à $(0, 1)$ et propre à la représentation des fonctions continues, on a ;

$$\varphi(t-x, n) = A_0^n + A_1^n t + \ldots + A_{p_n}^n t^p,$$

$A_0^n, A_1^n \ldots A_{p_n}^n$ étant des polynomes en x. On en conclut que, $f(x)$ étant la limite de $\int_0^1 f(t)\varphi(t-x, n)dt$ si f est continue, la seule solution continue est la limite, pour n infini, de

$$I_n = A_0^n \int_0^1 f(t)dt + A_1^n \int_0^1 t f(t)dt + \ldots + A_{p_n}^n \int_0^1 t^{p_n} f(t)dt,$$

c'est-à-dire de

$$I_n = A_0^n c_0 + A_1^n c_1 + \ldots + A_{p_n}^n c_{p_n}.$$

De là résulte en particulier l'unicité de la solution supposée continue. Ne faisons plus cette dernière hypothèse; il est nécessaire que f soit sommable dans $(0, 1)$ puisqu'on admet l'existence de c_0. Alors, s'il existe une solution f, elle est donnée par la limite des I_n partout, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle, au moins pour certains noyaux, par exemple pour le noyau de L_n, d'après le théorème dû à M. Riesz et démontré au n° 42.

On voit donc que dans le cas général f est déterminée, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle par la connaissance des nombres $c_k = \int_0^1 f(t)\, t^k dt$, et nous savons définir une suite de polynomes tendant vers $f(t)$ partout où elle est déterminée.

On peut encore dire que $\int_0^t f\,dt$ est déterminée.

Lorsque les $g_m(x)$ sont quelconques, on raisonnera évidemment de même toutes les fois qu'on aura pu mettre $\varphi(t-x, n)$ sous la forme

$$\varphi(t-x, n) = A_0^n g_0(t) + A_1^n g_1(t) + A_2^n g_2(t) + \ldots,$$

la suite du second membre étant limitée ou intégrable terme à terme dans (a, b) après la multiplication par $f(t)$ (²).

(¹) Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel (*Acta mathématica*, t. XXVII, 1903). M. Lerch annonce là qu'il avait donné antérieurement son résultat en 1892 dans une note de l'Académie de Prague.

(²) Un artifice analogue est utilisé par M. Ch. N. Moore : *On certain constants analogous of Fourier's constants* (Bulletin of the Am. Mat. Soc., 1908).

En particulier, on peut étudier le cas où les $g_m(x)$ sont les cos et sin des multiples entiers de x. Il sera alors commode de prendre pour $\varphi(\alpha, n)$ une suite finie de Fourier en α. On aura alors

$$\begin{aligned}\varphi(t-x, n) = \mathrm{A}_0^n + \mathrm{A}_1^n \cos t + \mathrm{A}_2^n \cos 2t + \ldots + \mathrm{A}_{p_n}^n \cos p_n t \\ + \mathrm{B}_1^n \sin t + \mathrm{B}_2^n \sin 2t + \ldots + \mathrm{B}_{p_n}^n \sin p_n t,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n = \mathrm{A}_0^n a_0 + \mathrm{A}_1^n a_1 + \mathrm{A}_2^n a_2 + \ldots + \mathrm{A}_p^n a_{p_n} \\ + \mathrm{B}_1^n b_1 + \mathrm{B}_2^n b_2 + \ldots + \mathrm{B}_p^n b_{p_n},\end{aligned}$$

les a_k et b_k étant les constantes c_m données. I_n sera ainsi une suite finie de Fourier qui tendra vers f, si f est continue, et, si f n'est pas continue et que le noyau ait été bien choisi, qui tendra vers f partout, sauf au plus pour un ensemble de valeurs de x de mesure nulle. Donc *une fonction est déterminée, sauf au plus aux points d'un ensemble de mesure nulle, par ses constantes de Fourier, et nous savons calculer cette fonction là où elle est déterminée*. En d'autres termes, *nous savons sommer une série trigonométrique divergente;* ce sont les suites finies I_n que nous venons de former qui jouent dans cette sommation le rôle que jouent les sommes de termes dans la recherche de la somme d'une série convergente. Si l'on prend l'intégrale F_n, on retrouve naturellement le procédé de sommation de M. Fejér; si l'on prend P_n, on a le procédé de Poisson (¹); si l'on prend V_n, on a un nouveau procédé qui a été signalé par M. de la Vallée-Poussin.

Quant au problème des moments de Stieltjes, il se différencie de ceux qui précèdent en ce que les fonctions $g_m(x)$ ne sont plus sommables dans l'intervalle considéré. On ne peut donc plus espérer raisonner comme précédemment et cela est bien d'accord avec cette remarque de Stieltjes : le problème des moments, s'il est possible, est indéterminé. Il faudra donc faire une hypothèse sur $f(x)$; si l'on désire utiliser les résultats obtenus au n° 40, ce qui est facile, on sera amené à faire une hypothèse sur la croissance de $f(x)$. La méthode que je vais indiquer sur un exemple conduit à faire une hypothèse de même nature; il est à remarquer, d'ailleurs, que les travaux de Stieltjes conduisent aussi à choisir une hypothèse analogue pour déterminer d'une façon unique la solution du problème des moments. M. Borel a insisté sur ce point dans son *Mémoire* et dans ses *Leçons sur les Séries divergentes* en introduisant la dénomination de *fonction de Stieltjes*.

Prenons l'intégrale W_n; l'élément d'intégration est :

$$\frac{n}{\sqrt{\pi}} f(t)\,dt\left[1 - \frac{n^2(t-x)^2}{1!} + \frac{n^4(t-x)^4}{2!} - \frac{n^6(t-x)^6}{6!} + \ldots\right].$$

(¹) Voir, par exemple, mes *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 89, et surtout la thèse de M. Fatou, *Séries trigonométriques et séries de Taylor* (Acta mathématica, t. XXX).

S'il s'agissait d'une intégration relative à un intervalle fini quelconque, on pourrait effectuer cette intégration terme à terme, mais cela n'est plus légitime quand il s'agit d'intégrer de o à $+\infty$. Cependant cela redeviendra légitime si la croissance de $f(t)$ est assujettie à certaines conditions.

Remarquons que les termes de la série précédente, pris en valeurs absolues, ont pour somme $\frac{n}{\sqrt{\pi}}\,|f(t)|\,e^{n^2(t-x)^2}dt$ et cette série de valeurs absolues est elle-même majorée, pour t assez grand, x étant fixe par la série $\frac{n}{\sqrt{\pi}}\,|f(t)|\,e^{n^2t^2}dt$.

Il nous suffit donc que, quel que soit n, $\int_0^\infty |f(t)|\,e^{n^2t^2}dt$ existe, pour que l'intégration terme à terme soit légitime (n° 11). Concluons en particulier que si l'on a, pour x assez grand,

$$|f(x)| < \mathrm{A}e^{-mx^{2+\lambda}},$$

A, m, λ étant des constantes positives, la fonction $f(x)$ est uniquement déterminée par la connaissance de ses moments, en entendant par là que la valeur de $f(t)$ est déterminée d'une façon unique, sauf tout au plus aux points d'un ensemble de mesure nulle. Quant à ces valeurs de $f(x)$, elles se présentent comme limite, pour $n=\infty$, des expressions

$$\mathfrak{J}_n = \frac{n}{\sqrt{\pi}}\left[c_0 - \frac{n^2}{1!}[c_2 - 2c_1x + c_0x^2] + \frac{n^4}{2!}[c_4 - 4c_3x + 6c_2x^2 - 4c_1x^3 + c_0x^4]\ldots\right].$$

Le terme général est $(-1)^p\frac{n^{2p}}{p!}(c-x)^{(2p)}$, le développement de la puissance symbolique $2p$ doit être fait suivant la règle ordinaire, puis les exposants de c doivent être remplacés par des indices; il faut tenir compte de la puissance c^0; $c_0, c_1, c_2, \ldots$ désignent bien entendu les moments donnés.

Si le problème admet une solution continue, les $\mathfrak{J}_n$ convergent uniformément vers cette solution dans tout intervalle intérieur à $(0, +\infty)$.

Les méthodes de Stieltjes fournissent, on le sait, des résultats bien plus étendus que celui que je viens de citer, en particulier elles prouvent la détermination du problème des moments pour les fonctions satisfaisant à l'inégalité

$$|f(t)| < \mathrm{A}e^{-mx^{0+\lambda}},$$

mais j'ai voulu, en indiquant ce résultat, montrer que le problème des moments pouvait être abordé sans l'emploi des fractions continues. Il est peut-être possible, par exemple, de retrouver les résultats concernant les fonctions de Stieltjes par des raisonnements analogues à ceux qui précèdent.

[**44**] *Représentation approchée de* $\int_\alpha^\beta f(x)\,g(x)\,dx$. — Je suppose que $\varphi(\alpha, n)$ est propre à la représentation de toutes les fonctions d'une des classes $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_3$ en leurs points de continuité, qu'il ne soit jamais négatif et qu'il satisfasse aux conditions des n^{os} 30 ou 31. Alors

$$I_n[f(t), x] = \int_0^l f(t)\,\varphi(t-x, n)\,dt$$

tend vers $f(x)$, quand n augmente indéfiniment, pour toute valeur de x sauf au plus pour un ensemble de mesure nulle de telles valeurs. De plus, si f est bornée, I_n est aussi borné uniformément quel que soit n. Alors (théorème α', n° 11), on a :

$$\int_\alpha^\beta g(x)f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_\alpha^\beta g(x)\left(\int_0^l f(t)\,\varphi(t-x, n)\,dt\right)dx,$$

$g(x)$ étant une fonction sommable dans (α, β) non extérieur à (o, l). Cette formule suppose f *bornée*. Définissons $g(x)$ à l'extérieur de (α, β) en lui donnant alors la valeur o, notre formule s'écrira :

$$\int_0^l f(x)\,g(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_0^l \int_0^l f(x)\,g(y)\,\varphi(x-y, n)\,dx\,dy;$$

sous cette forme elle suppose que l'une des deux fonctions f ou g soit bornée, l'autre étant seulement sommable.

Passons au cas où f et g sont seulement supposés sommables; il faut alors énoncer cette nouvelle hypothèse que $f(x)g(x)$ est sommable pour que le premier membre ait un sens; quant au second, il a un sens si φ est bornée pour n fixe, ce que nous admettons. Soient f_p et g_p des fonctions bornées tendant, en croissant en valeur absolue avec p, vers f et g, nous avons alors (n° 11) :

$$\int_0^l f(x)\,g(x)\,dx = \lim_{p=\infty} \int_0^l f_p(x)\,g_p(x)\,dx,$$

$$\int_0^l \int_0^l f(x)\,g(y)\,\varphi(x-y, n)\,dx\,dy = \lim_{p=\infty} \int_0^l \int_0^l f_p(x)\,g_p(y)\,\varphi(x-y, n)\,dx\,dy.$$

Mais cela ne nous permet pas d'intervertir les deux signes lim dans le second membre de

$$\int_0^l f(x)\,g(x)\,dx = \lim_{p=\infty} \lim_{n=\infty} \int_0^l \int_0^l f_p(x)\,g_p(y)\,\varphi(x-y, n)\,dx\,dy,$$

ce qu'il faudrait faire pour généraliser l'égalité précédemment établie.

La question à étudier est donc celle de l'interversion des deux signes *lim* placés devant l'intégrale double $a_{n,p}$ du second membre.

Parmi les cas où l'on a le droit de faire l'interversion, l'un des plus simples est celui où $a_{n,p}$ est une fonction croissante et de n et de p. Ici, φ ayant été supposé positif, $a_{n,p}$ croît avec p si les fonctions f_p et g_p ne sont pas négatives. Or on peut supposer qu'il en est ainsi, car si f et g n'étaient pas positifs, il suffirait de poser

$$f = f' - f'', \qquad g = g' - g'',$$

f', f'', g', g'' n'étant jamais négatives, et l'on remplacerait l'intégrale $\int_0^1 fg\,dx$ à calculer par la somme de quatre intégrales analogues [1].

Quant à la croissance de $a_{n,p}$ avec n, quelles que soient les fonctions non négatives f et g, elle ne peut être réalisée. On voit facilement, en effet, que cela entraînerait que, quels que soient a, b, c, d dans $(0, l)$, $(a < b,\ c < d)$, l'intégrale

$$\int_a^b \int_c^d \varphi(x-y, n)\,dx\,dy$$

soit une fonction croissante de n; or, quand le rectangle d'intégration ne contient pas de points de $x - y = 0$, $\varphi(x-y, n)$ tend uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$, d'après nos hypothèses.

Mais on verra que la croissance de $a_{n,p}$ avec n, pour $f \equiv g$, n'est pas contradictoire avec nos hypothèses.

Lorsque $a_{n,p}$ croît avec n quelle que soit $f \equiv g$; alors, en supposant f^2 et g^2 sommables, les identités évidentes

$$4\int_0^l f(x)\,g(x)\,dx = \int_0^l [f(x) + g(x)]^2\,dx - \int_0^l [f(x) - g(x)]^2\,dx,$$

$$\begin{aligned}
4\int_0^l \int_0^l & f(x)\,g(y)\,\varphi(x-y, n)\,dx\,dy \\
&= 4\int_0^l \int_0^l f(y)\,g(x)\,\varphi(x-y, n)\,dx\,dy \\
&= \int_0^l \int_0^l [f(x) + g(x)][f(y) + g(y)]\,\varphi(x-y, n)\,dx\,dy \\
&\quad - \int_0^l \int_0^l [f(x) - g(x)][f(y) - g(y)]\,\varphi(x-y, n)\,dx\,dy
\end{aligned}$$

nous permettent de conclure comme précédemment

$$\int_0^l f(x)\,g(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_0^l \int_0^l f(x)\,g(y)\,\varphi(x-y, n)\,dx\,dy,$$

---

[1] Il résulte de là que, sous la seule condition nouvelle $f(x)g(y) \geqslant 0$, on a :

$$\int_0^l f(x)\,g(x)\,dx \geqslant \lim_{n=\infty} \int_0^l \int_0^l f(x)\,g(y)\,\varphi(x-y, n)\,dx\,dy.$$

Cette inégalité peut être considérée comme la généralisation de la célèbre inégalité d'Harnack, laquelle s'obtient en prenant pour φ le noyau de l'intégrale de M. Fejér comme on va le voir.

égalité qui suppose, je le rappelle, que f^2 et g^2 sont sommables, que φ vérifie les conditions des nos 30 ou 31, et que, quelle que soit $F(x)$ sommable et de carré sommable, l'intégrale

$$\int_0^l \int_0^l F(x)\,F(y)\,\varphi(x-y,\,n)\,dx\,dy$$

croisse avec n.

Pour opérer comme nous l'avons fait jusqu'ici, il faudrait maintenant remplacer cette dernière condition par d'autres ne contenant plus la fonction indéterminée F; cela ne présente pas de difficultés sérieuses, bien que le résultat ne paraisse pas susceptible d'être très simplement exprimé à cause de la présence du produit $F(x)\,F(y)$. Mais pour l'application que j'ai en vue cette transformation est inutile.

Prenons pour $\varphi(\alpha,\,n)$ le noyau de l'intégrale F_n, n° 35, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} & f(x)\,\varphi(x-y,\,n)\,dx \\ &= \frac{1}{2}a_0 + (a_1\cos y + b_1 \sin y)\left(1-\frac{1}{n}\right) + (a_2\cos 2y + b_2\sin 2y)\left(1-\frac{2}{n}\right) \\ &\quad + \ldots + \big(a_{n-1}\cos(n-1)y + b_{n-1}\sin(n-1)y\big)\left(1-\frac{n-1}{n}\right),\end{aligned}$$

les a_k et b_k étant les coefficients de la série de Fourier de f; d'où, en multipliant par $f(y)$ et intégrant,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,f(y)\,\varphi(x-y,\,n)\,dx\,dy = \pi\left[\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{k=n-1}(a_k^2+b_k^2)\left(1-\frac{k}{n}\right)\right].$$

Cette expression montre que $a_{n,p}$ croît avec n, donc notre théorème est vrai; la suite du second membre a évidemment pour limite $\sum (a_k^2+b_k^2)$, d'où l'égalité

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_1^\infty (a_k^2+b_k^2)$$

qui constitue le théorème de Parseval. Pour le cas de f et g différents, on a :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx = \frac{1}{2}a_0\alpha_0 + \sum_1^\infty (a_p\alpha_p + b_p\beta_p),$$

les a_k, b_k; α_k, β_k étant les coefficients des séries de Fourier de f et g.

La démonstration de ces égalités de Parseval suppose seulement que f^2 et g^2 sont sommables. Dans sa Thèse, M. Fatou a le premier légitimé le théorème pour ce cas très étendu. J'ai dans ce qui précède procédé comme dans mes Leçons sur les séries trigonométriques pour le cas des fonctions bornées et, pour le cas des fonctions non bornées, j'ai utilisé des raisonnements qui ne diffèrent que par la forme de ceux qu'avait employés M. Fatou.

[45] *Interpolation.* — Les résultats du n° 24 nous ont appris que si $\varphi(\alpha, n)$ satisfait aux conditions du n° 22 relatives à l'une des familles $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_5$, $f(x)$ était en tout point de continuité la limite de

$$j_n = \int_0^l f_n(t)\,\varphi(t-x, n)\,dt,$$

les $f_n(t)$ étant des fonctions telles que $[f(t) - f_n(t)]$ tende uniformément vers zéro, quand n croît.

Supposons en particulier que f soit continue partout dans un intervalle (a, b) intérieur à $(0, l)$ et définissons f à l'extérieur de (a, b) par

$$f(t) = f(a) \quad \text{pour} \quad t < a, \qquad f(t) = f(b) \quad \text{pour} \quad t > b.$$

Prenons arbitrairement des points

$$0 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots, \qquad < a_N \leqslant b,$$

N étant fonction de n. Les valeurs correspondantes de la fonction nous permettront de définir des fonctions f_n remplissant les conditions indiquées, pourvu que la grandeur maximum des intervalles partiels en lesquels on divise (a, b) tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$. On pourra prendre par exemple :

$$\begin{array}{lll} f_n(t) = f(a_1) & \text{pour} & t < a_1, \\ f_n(t) = f(a_1) & \text{pour} & a_1 \leqslant t < a_2, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ f_n(t) = f(b) & \text{pour} & a_N \leqslant t, \end{array}$$

ou encore prendre pour f_n la fonction continue constante pour $t < a_1$ et $t > a_N$ et représentée entre a_1 et a_N par la ligne polygonale dont les sommets sont les points de coordonnées a_i, $f(a_i)$.

Ce choix des f_n peut être varié à l'infini, il faut seulement que les fonctions f_n tendent uniformément vers f quand n augmente indéfiniment. On a ainsi des formules permettant l'interpolation avec une approximation indéfinie, ce qui n'est pas le cas pour la formule d'interpolation de Lagrange (1).

Ces fonctions d'interpolation sont naturellement des polynomes ou des suites finies de Fourier, en même temps que $\varphi(\alpha, n)$.

---

(1) Voir sur ce point : MÉRAY, *Nouveaux exemples d'interpolations illusoires* (Bull. des Sc. math., 1896); — RUNGE, *Ueber empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten* (Zeitsc. f. Math. u. Phys., 1901); — BOREL, *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en série de polynomes*.

Si l'on fait l'un ou l'autre des deux choix indiqués pour $f_n(t)$, le calcul de ces fonctions est particulièrement simple, car elles se présentent sous la forme

$$j_n = \alpha_1 f(a_1) + \alpha_2 f(a_2) + \dots + \alpha_N f(a_n),$$

les α_i étant des fonctions qu'on peut calculer une fois pour toutes, car elles ne dépendent pas de f mais seulement de n, de $\varphi(\alpha, n)$ et des points a_i.

La forme précédente est celle sous laquelle M. Borel donne une formule d'interpolation permettant l'approximation indéfinie. Seulement, pour compléter l'indication de M. Borel, il faudrait calculer les polynomes α_i jouissant des propriétés qu'il indique; les méthodes indiquées ici permettraient de le faire, et ainsi à chaque noyau $\varphi(\alpha, n)$ on ferait correspondre, autrement que je ne l'ai fait, une formule d'interpolation permettant l'approximation.

Qu'on définisse les α_i comme je l'ai fait, ou indirectement par l'emploi de la méthode de M. Borel, le calcul sera simple dans le cas des noyaux de L_n et V_n si les a_i sont les points divisant $(0, l)$ en n parties égales.

[**46**] *De la meilleure approximation qu'on peut obtenir avec des polynomes de degré n.* — Les intégrales singulières que nous avons considérées permettent d'aborder des questions concernant le degré d'approximation auquel on peut prétendre en utilisant des polynomes de degré n parce qu'elles fournissent des expressions simples de polynomes approchés. Pour fixer le langage, convenons de dire que ε est l'approximation relative à un polynome $P(x)$, expression approchée de $f(x)$ dans (a, b), si ε est la limite supérieure de $|P(x) - f(x)|$ dans (a, b).

Si $P(x)$ est un polynome quelconque de degré n, ε est une fonction des coefficients qui admet une limite inférieure ε_n; ε_n est appelé la limite d'approximation relative aux polynomes de degré n.

On sait que cette limite est l'approximation relative à un certain polynome de degré n au plus, le polynome de Tchebicheff de degré n au plus.

Du théorème de Weierstrass il résulte que ε_n tend vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$; on pourra donc dire que l'approximation qu'on peut obtenir avec des polynomes de degré n est de l'ordre de $\varphi(n)$ si on a démontré que ε_n et $\varphi(n)$ sont deux infiniment petits de même ordre.

Je vais étudier la limite d'approximation relative aux polynomes de degré n pour une classe de fonctions continues, celles des fonctions f satisfaisant à une inégalité de Lipschitz

$$|f(x+h) - f(x)| < kh.$$

Mais auparavant je veux prouver qu'une restriction analogue à celle de Lipschitz est nécessaire pour qu'on puisse dire quelque chose de la limite d'approximation; d'une façon plus précise, je vais démontrer que : *si l'on considère la famille des fonctions*

$f(x)$ continues dans un intervalle (a, b) et telles que $|f(x)|$ ne surpasse pas M, *quel que soit le degré n des polynomes d'approximation, la limite supérieure de la limite d'approximation correspondante est égale à* M.

Bien entendu, quand f est déterminée, la limite d'approximation tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, mais, *dans les conditions indiquées, une limite inférieure de l'ordre de cette limite ne peut être assignée.*

Pour démontrer le premier point, je vais faire voir qu'un nombre ε, positif et plus petit que M, étant donné on peut, pour chaque valeur de n, construire un polynome $f(x)$, satisfaisant aux conditions indiquées, et différant de plus de ε de tout polynome P_n de degré n.

Les seuls polynomes P_n qu'il nous suffit de considérer sont évidemment ceux qui restent en valeur absolue inférieurs à $M + \eta$ dans (a, b), η étant un nombre compris entre ε et M. D'un raisonnement connu (¹) on déduit une limite supérieure pour les modules des coefficients; soit L cette limite. Soient α le plus grand des nombres $|a|$, $|b|$, $|a^n|$, $|b^n|$ et P un entier tel que l'on ait $\frac{P(\eta - \varepsilon)}{(n+1)\alpha} > L$. Considérons les polynomes π qui sont de degré n au plus et dont les coefficients font partie de la suite

$$\frac{-P(\eta - \varepsilon)}{(n+1)\alpha}, \quad \frac{(-P+1)(\eta - \varepsilon)}{(n+1)\alpha}, \quad \ldots, \quad \frac{(P-1)(\eta - \varepsilon)}{(n+1)\alpha}, \quad \frac{P(\eta - \varepsilon)}{(n+1)\alpha}.$$

Soient $\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_N$ ces polynomes, en nombre N. Divisons (a, b) en N parties et prenons pour $f(x)$ une fonction continue dans (a, b) comprise entre $-M$ et $+M$ et, quel que soit $i \leqslant N$, différant de π_i de plus de η en un point au moins de la $i^{\text{ième}}$ partie de (a, b); ce qui est possible puisque l'on a : $0 < \eta < M$.

Je dis que $f(x)$ répond à la question. En effet, $f(x)$ diffère au moins de η de tout polynome π. Or, soit un polynome P_n de degré n au plus; il a au plus $n + 1$ coefficients, en remplaçant chacun de ces coefficients par le nombre (ou l'un des nombres) le plus voisin de la forme $\frac{k(\eta - \varepsilon)}{(n+1)\alpha}$, où k est entier, on modifie chaque coefficient de moins de $\frac{\eta - \varepsilon}{(n+1)\alpha}$, donc le polynome de moins de $\eta - \varepsilon$. Or si P_n différait de f de moins de ε, le polynome ainsi obtenu serait un polynome π, car $|k|$ ne pourrait alors surpasser P, et ce polynome π différerait de f de moins de

$$\eta = \varepsilon + (\eta - \varepsilon).$$

ce qui est impossible.

Pour démontrer le second point, remarquons que si l'on savait que l'approxima-

(¹) Voir, par exemple, Borel, *Leçons sur les fonctions de variable réelle et les développements en série de polynomes*, p. 84.

tion relative aux polynomes de degré n était de l'ordre de $\varphi(n)$ il en résulterait que, pour chaque fonction $f(x)$ de la famille considérée, à partir d'une valeur de n, variable peut être avec $f(x)$, l'approximation serait inférieure à $\sqrt{\varphi(n)}$. Il suffira donc de montrer que, quelles que soient les suites, $n_1, n_2, \dots; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ la première composée d'entiers croissants, la seconde de nombres positifs tendant vers zéro, on peut trouver une fonction $f(x)$ de la famille considérée qui, pour une infinité de valeur de i, diffère de plus de ε_i de tout polynome de degré n_i. Pour construire cette fonction il nous est loisible de laisser de côté une infinité de valeurs de i et cela nous permettra de supposer que, pour celles qui sont conservées, les ε_i satisfont à des conditions de grandeur qui vont être indiquées.

Aux deux suites données associons deux suites de nombres positifs tendant vers zéro, les suites $\eta_1, \eta_2, \dots; \mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, \dots$ telles que l'on ait $\varepsilon_i < \eta_i < \mathrm{M}_i$. Le premier nombre i conservé sera celui pour lequel on a $\mathrm{M}_i < \mathrm{M}$, soit i_1. Pour le second, i_2, on devra avoir

$$\mathrm{M}_{i_1} + \mathrm{M}_{i_2} < \mathrm{M}, \qquad \eta_{i_2} - \varepsilon_{i_2} < \frac{1}{2}(\eta_{i_1} - \varepsilon_{i_1}), \qquad \mathrm{M}_2 < \frac{1}{2}(\eta_{i_1} - \varepsilon_{i_1}).$$

Pour le troisième, i_3, on doit avoir

$$\mathrm{M}_{i_1} + \mathrm{M}_{i_2} + \mathrm{M}_{i_3} < \mathrm{M}, \qquad \eta_{i_3} - \varepsilon_{i_3} < \frac{1}{2}(\eta_{i_2} - \varepsilon_{i_2}), \qquad \mathrm{M}_3 < \frac{1}{2}(\eta_{i_2} - \varepsilon_{i_2}), \quad \text{etc.}$$

Il résulte de là que, quel que soit i_p, on a

$$\eta_{i_p} - (\mathrm{M}_{i_{p+1}} + \mathrm{M}_{i_{p+2}} + \dots) > \eta_{i_p} - \left[\frac{1}{2}(\eta_{i_p} - \varepsilon_{i_p}) + \frac{1}{2}(\eta_{i_{p+1}} - \varepsilon_{i_{p+1}}) \dots\right]$$
$$> \eta_{i_p} - \left[\frac{1}{2}(\eta_{i_p} - \varepsilon_{i_p}) + \frac{1}{2^2}(\eta_{i_p} - \varepsilon_{i_p})^2 + \frac{1}{2^3}(\eta_{i_p} - \varepsilon_{i_p})^3 \dots\right] = \varepsilon_{i_p}.$$

Ceci posé, construisons comme précédemment une fonction f_1 continue telle que $|f_1|$ ne surpasse pas M_{i_1} et qui, en certains points de (a, b), diffère au moins de η_{i_1} de tout polynome de degré n_{i_1} au plus. Puis, ce qui se fait à peu près de la même manière, une fonction f_2 continue telle que $|f_2|$ ne surpasse pas M_{i_2} et que, en certains points de (a, b), $f_1 + f_2$ diffère au moins de η_{i_2} de tout polynome de degré n_{i_2}, f_3 sera telle que $|f_3|$ ne surpasse pas M_{i_3} et que, en certains points de (a, b), $f_1 + f_2 + f_3$ diffère au moins de η_{i_3} de tout polynome de degré n_{i_3}, etc.

La série $f = f_1 + f_2 + f_3 \dots$ est uniformément convergente et définit une fonction continue non supérieure à M en module. De plus, quel que soit le polynome $\mathrm{P}n_{i_p}$ de degré n_{i_p} au plus, on a :

$$|f - \mathrm{P}n_{i_p}| \geqslant |f_1 + f_2 + \dots + f_p) - \mathrm{P}n_{i_p}| - (\mathrm{M}_{i_{p+1}} + \mathrm{M}_{i_{p+2}} + \dots),$$

ce qui, pour certains points au moins de (a, b), donne

$$|f - \mathrm{P}n_{i_p}| \geqslant \eta_{i_p} - (\mathrm{M}_{i_{p+1}} + \mathrm{M}_{i_{p+2}} + \dots) > \varepsilon_{i_p}.$$

La fonction f répond donc bien à la question (1).

Ainsi on ne peut fixer aucune limite supérieure intéressante pour la limite d'approximation relative aux polynomes de degré n si l'on sait seulement que le module de la fonction f à représenter ne surpasse pas M.

Les formules

$$\alpha)\qquad |I_n - f(x)| \leqslant M[\Omega + \Omega_1] + \omega(\varepsilon)[1 \pm \Omega_1],$$

$$\beta)\qquad |I_n - f(x)| \leqslant 2M\Omega_1 + \omega(\varepsilon),$$

des nos 26 et 40 montrent au contraire qu'on peut fixer une telle limite supérieure si l'on connaît une limite supérieure M du module de la fonction et une limite supérieure $\omega(\varepsilon)$ de l'oscillation de la fonction f dans tout intervalle d'étendue 2ε, puisqu'il suffit alors de choisir un noyau polynome pour que les formules précédentes nous fournissent cette limite supérieure.

J'avais appliqué cette méthode en prenant l'intégrale L_n et des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz et j'avais obtenu ce résultat ; *on peut, avec des polynomes de degré n, représenter les fonctions considérées à moins de η et cela de manière que, quand n croit indéfiniment, $n\eta^6$ tende vers une limite finie.* M. de la Vallée-Poussin (2), qui s'était posé de son côté le même problème, obtenait, par des calculs très simples que je vais reproduire, un résultat bien meilleur puisqu'il prouvait que, *pour une fonction satisfaisant à la condition de Lipschitz, la limite d'approximation relative aux polynomes de degré n est au moins de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$.*

Soit $f(x)$ une fonction satisfaisant à l'inégalité

$$|f(x+h) - f(x)| < k|h|,$$

quels que soient x et $x+h$ dans $(0, 1)$. Considérons l'intégrale

$$I_n = L_n = k_n \int_0^1 f(t)[1-(t-x)^2]^n dt = k_n \int_{-x}^{1-x} f(x+\alpha)[1-\alpha^2]^n d\alpha,$$

dans laquelle on prendra pour k_n la première des deux valeurs indiquées au n° 39, c'est-à-dire celle pour laquelle $\int_{-1}^{+1} \varphi(\alpha, n)\,d\alpha = 1$ (3). x est quelconque dans un

---

(1) Ce raisonnement n'exclut pas la possibilité d'un énoncé tel que le suivant : Quelle que soit la fonction $f(x)$ continue, il existe une infinité de valeurs de n, variables avec $f(x)$, pour lesquelles l'approximation relative aux polynomes de degré n est de l'ordre de la fonction donnée $\varphi(n)$.

L'existence d'une proposition de cette nature me paraît très improbable.

(2) *Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynomes et des suites limitées de Fourier* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, classe des sciences, mars 1908, pp. 193-254).

(3) Cette supposition est essentielle pour ce qui suit. Dans mon calcul, j'avais pris au contraire $k_n = \sqrt{\frac{n}{\pi}}$, cela explique en partie la différence entre le résultat de M. de la Vallée-Poussin et le mien.

intervalle entièrement intérieur à (o, 1); prenons un nombre positif fixe ε assez petit pour que $x - \varepsilon$ et $x + \varepsilon$ soient toujours aussi dans (o, 1). Alors on a :

$$\mathrm{I}_n = k_n \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} + k_n \int_{-x}^{-\varepsilon} + \mathrm{K}_n \int_{\varepsilon}^{1-x}.$$

Pour la seconde intégrale, on a :

$$\left| k_n \int_{-x}^{-\varepsilon} f(x+\alpha)(1-\alpha^2)^n d\alpha \right| \leqslant k_n (1-\varepsilon^2)^n \int_{-x}^{-\varepsilon} |f(x+\alpha)| d\alpha \leqslant k_n (1-\varepsilon^2)^n \int_0^1 |f(x)| dt.$$

La valeur asymptotique de k_n étant $\sqrt{\frac{n}{\pi}}$, pour n assez grand on a $k_n < \sqrt{n}$ [1].

La seconde intégrale est donc au plus égale à $\mathrm{M}\sqrt{n}\,(1-\varepsilon^2)^n$, $|f(t)|$ ne surpassant pas M; la même conclusion s'applique à la troisième intégrale, donc on a :

$$\mathrm{I}_n = k_n \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x+\alpha)(1-\alpha^2)^n d\alpha + 2\theta \mathrm{M}\sqrt{n}\,(1-\varepsilon^2)^n,$$

θ étant compris entre -1 et $+1$. Faisant $f(x+\alpha) \equiv f(x)$ quel que soit α, on en tire

$$f(x) = k_n \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x)(1-\alpha^2)^n d\alpha + 2\theta_1 \mathrm{M}\sqrt{n}\,(1-\varepsilon^2)^n;$$

d'où, à moins de $4\mathrm{M}\sqrt{n}\,(1-\varepsilon^2)^n$ près,

$$|\mathrm{I}_n - f(x)| = k_n \left| \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} [f(x+\alpha) - f(x)](1-\alpha^2)^n d\alpha \right|$$

$$\leqslant 2k\,k_n \int_0^{\varepsilon} \alpha(1-\alpha^2)^n d\alpha = \frac{k\,k_n}{n+1}\left[1-(1-\varepsilon^2)^{n+1}\right].$$

Le terme négligé est de l'ordre d'une exponentielle, le dernier membre des égalités et inégalités précédentes est de l'ordre de $\frac{k_n}{n+1}$, c'est-à-dire de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, donc $\mathrm{I}_n - f(x)$ est au moins de cet ordre. Le théorème de M. de la Vallée-Poussin est démontré puisque I_n est un polynome de degré $2n$.

Pour faire une application de la première méthode indiquée, reprenons l'intégrale L_n mais supposons seulement que $f(x)$ satisfasse à la condition de Lipschitz-Dini, c'est-à-dire que, si l'on appelle $\mathrm{A}(\delta)$ le maximum de $|f(x+\delta) - f(x)|$, $x+\delta$ et x étant deux valeurs de l'intervalle (o, 1) considéré, on ait :

$$\lim_{\delta=0} \mathrm{A}(\delta) \log \delta = 0.$$

---

[1] Cela est vrai, en réalité, pour toute valeur de n.

La limite supérieure $\omega(\varepsilon)$ de l'oscillation de $f(x)$ dans un intervalle d'étendue 2ε est donc de la forme

$$\omega(\varepsilon) = \theta(\varepsilon)\frac{1}{\log\frac{1}{\varepsilon}},$$

$\theta(\varepsilon)$ étant infiniment petit avec ε.

Avec le choix fait pour k_n, nous sommes dans les conditions où l'on peut appliquer la formule β), dans laquelle on a :

$$\Omega_1 = 1 - k_n\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}(1-\alpha^2)^n d\alpha = 2k_n\int_{\varepsilon}^{1}(1-\alpha^2)^n d\alpha < 2k_n(1-\varepsilon^2)^n.$$

D'où

$$|I_n - f(x)| \leqq 4Mk_n(1-\varepsilon^2)^n + \frac{\theta(\varepsilon)}{\log\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Ici, ε n'est pas un nombre fixe, indépendant de n, ε est assujetti à la seule condition d'être assez petit pour que $x-\varepsilon$ et $x+\varepsilon$ soient toujours dans $(0, 1)$; donc, au moins pour n assez grand, on peut prendre $\varepsilon = n^{-\frac{1}{3}}$. On en déduit

$$|I_n - f(x)| \leqq 4M\sqrt{n}\left[1 - n^{-\frac{2}{3}}\right]^n + 3\frac{\theta\left(n^{-\frac{1}{3}}\right)}{\log n}.$$

Le premier terme est équivalent à $\frac{\sqrt{n}}{e^{\sqrt[3]{n}}}$, donc le produit du second membre par $\log n$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Ainsi, *pour une fonction satisfaisant à la condition de Lipschitz-Dini, la limite d'approximation relative aux polynomes de degré n est d'ordre supérieur à* $\frac{1}{\log n}$.

[**47**] *De la meilleure approximation qu'on peut obtenir avec des suites de Fourier d'ordre n.* — Tout ce qui vient d'être dit de l'approximation par des polynomes de degré n peut être redit de l'approximation pour des suites de Fourier d'ordre n, c'est-à-dire s'arrêtant aux termes en $\cos nx$ et $\sin nx$. Seulement, là où dans nos raisonnements on faisait intervenir L_n il faudra maintenant faire intervenir V_n, et, conformément à ce qui a été dit au n° 41, il faudra dans V_n donner à k_n la valeur indiquée à ce numéro et qui est telle que le noyau $\varphi(\alpha, n)$ de l'intégrale V_n satisfasse à la relation $\int_0^{2\pi}\varphi(\alpha, n)\,d\alpha = 1$.

Je me borne à vérifier, pour les suites de Fourier, les deux dernières propriétés indiquées pour les polynomes.

Nous partons de l'intégrale

$$V_n = \frac{k_n}{2}\int_0^{2\pi} f(t)\left[\cos\frac{t-x}{2}\right]^{2n} dt,$$

qui, pour la valeur choisie pour k_n, donne exactement

$$V_n - f(x) = \frac{k_n}{2}\int_{-x}^{2\pi - x}[f(x+\alpha) - f(x)]\cos^{2n}\frac{\alpha}{2}\,d\alpha.$$

On voit immédiatement que si l'on modifie les limites d'intégration $-x$, $2\pi - x$, si on les remplace par $-\pi$, $+\pi$ par exemple, on ne modifie le second membre que d'une quantité qui, quel que soit x dans un intervalle entièrement intérieur à $(0, 2\pi)$, est de l'ordre d'une exponentielle a^{-n}. Or après cette modification, si f satisfait à la condition de Lipschitz indiquée, il reste une quantité qui s'écrit

$$k\,k_n\int_0^{\pi}\alpha\cos^{2n}\frac{\alpha}{2}\,d\alpha < k\pi k_n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\alpha}{2}\cos^{2n}\frac{\alpha}{2}\,d\alpha,$$

si l'on remarque que $\dfrac{\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ atteint son maximum dans $(0, \pi)$ pour $\alpha = \pi$. Or ceci s'écrit

$$-k\pi k_n\left[\frac{\cos^{2n+1}\frac{\alpha}{2}}{(2n+1)\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{k\pi k_n}{n+\frac{1}{2}},$$

quantité qui est de l'ordre de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Le théorème analogue à celui de M. de la Vallée-Poussin est donc démontré.

Prenant la même intégrale V_n, supposons maintenant que f satisfasse à la condition de Lipschitz-Dini indiquée au numéro précédent et conservons les notations de ce numéro. Nous avons

$$\Omega_1 = 2\,\frac{k_n}{2}\int_{\varepsilon}^{\pi}\cos^{2n}\frac{\alpha}{2}\,d\alpha < k_n\pi\cos^{2n}\frac{\varepsilon}{2},$$

d'où

$$|V_n - f(x)| < 2\mathrm{M}k_n\cos^{2n}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\theta(\varepsilon)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

Faisons là dedans $\varepsilon = 2n^{-\frac{1}{3}}$, $\sin\frac{\varepsilon}{2}$ sera un infiniment petit équivalent à $n^{-\frac{1}{3}}$ et

$\cos^2 \frac{\varepsilon}{2}$ sera égal à $1 - n^{-\frac{2}{3}}$ à des infiniment petits près d'ordre supérieur à $\frac{2}{3}$. Donc le premier terme est équivalent à

$$2\,M \sqrt{\frac{n}{\pi}}\,\pi\left[1 - n^{-\frac{2}{3}}\right]^n \qquad \text{ou} \qquad \frac{2\,M\sqrt{n\pi}}{e^{\sqrt[3]{n}}},$$

et nous pouvons conclure comme précédemment qu'*à toute fonction satisfaisant à une condition de Lipschitz-Dini correspond une limite d'approximation relative aux suites de Fourier d'ordre n qui est d'ordre supérieur à celui de* $\frac{1}{\log n}$ (1).

[**48**] *Théorème sur la convergence des séries de Fourier.* — Pour faire une application du résultat précédent reprenons l'intégrale $\mathcal{D}_n$:

$$\mathcal{D}_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{\sin\,(2n+1)\,\dfrac{x-t}{2}}{\sin\dfrac{x-t}{2}}\,dt$$

qui représente la somme des $n+1$ premiers termes de la série de Fourier de $f(x)$. Nous avons déjà remarqué, n° 33, que l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\,(2n+1)\,\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right| d\alpha$$

n'est pas bornée; cherchons une limite supérieure de son ordre d'infinitude. On a :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{|\sin\,(2n+1)t\,|}{\sin t}\,dt = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}}\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,dt + \frac{4}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin\,(2n+1)t\,|}{\sin t}\,dt$$

$$< \frac{4}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}}(2n+1)dt + \frac{4}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\sin t} = 4 + \frac{4}{\pi}\log\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4n+2}$$

et cette dernière quantité est de l'ordre de $\log n$. Donc on peut trouver un nombre A tel que, quel que soit la fonction f de module au plus égal à M, la somme $\mathcal{D}_n$ des

---

(1) V_n est d'ordre pair; mais il est évident que si l'énoncé est vrai pour les valeurs paires il l'est aussi pour les valeurs impaires. Les démonstrations supposent aussi que x soit intérieur à un intervalle (a, b) intérieur à $(0, 2\pi)$ ou du moins de longueur plus petite que 2π et intérieur aussi à un intervalle où les conditions de Lipschitz ou de Lipschitz-Dini sont remplies. Si ces conditions sont remplies quel que soit x, il suffit de considérer séparément les deux intervalles $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ pour voir que la conclusion est alors exacte quel que soit x.

$(n+1)$ premiers termes de la série de Fourier de f ne surpasse pas AM $\log n$ en valeur absolue.

Ceci posé, supposons que, quel que soit n, on puisse trouver une suite finie de Fourier d'ordre n, f_n, telle que $|f - f_n|$ ne surpasse jamais η_n. f_n étant à elle-même sa série de Fourier, la somme des $n+1$ premiers termes de la série de Fourier de f diffère de f_n de moins de $A\eta_n \log n$. Et par suite cette série converge vers f si $\eta_n \log n$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Donc *si, quel que soit* n, *la limite d'approximation relative aux suites de Fourier d'ordre* n *est d'ordre supérieur à celui de* $\frac{1}{\log n}$, *la série de Fourier de* f *est uniformément convergente* (1).

En rapprochant cet énoncé de celui du numéro précédent on a une nouvelle démonstration de la convergence des séries de Fourier des fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz-Dini.

---

(1) Si la condition relative aux polynomes d'approximation n'est vérifiée que dans une partie (a, b) de $(0, 2\pi)$, d'après le n° 32, la conclusion subsistera pourvu que x soit dans un intervalle (a_1, b_1) entièrement intérieur à (a, b).