Nach. Gesell. Wiss. Göttingen
1916, pp. 66–91

Ueber Interpolation.

Von

Leopold Fejér in Budapest.

Vorgelegt in der Sitzung am 15. Januar 1916 durch Herrn Landau.

§ 1. Die Lagrangesche Parabel und die Treppenparabel.

1. Es seien $x_1, x_2, \dots x_n$ voneinander verschiedene reelle Abszissen, und $y_1, y_2, \dots y_n$ reelle Ordinaten. Durch die n Punkte mit den rechtwinkligen Koordinaten (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\dots (x_n, y_n)$ geht eine bestimmte Parabel $(n-1)$-ter Ordnung, die s. g. Lagrangesche Parabel, die zu diesen Punkten gehört. Die ganze rationale Funktion $(n-1)$-ten Grades von x, welche diese Parabel darstellt, wird durch die Lagrangesche Formel

$$(1) \qquad L(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}$$

gegeben. Hier bedeutet

$$(2) \qquad \omega(x) = C(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n),$$

und C eine willkürliche, von Null verschiedene Konstante.

Durch die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\dots (x_n, y_n)$ *geht eine bestimmte Parabel* $(2n-1)$*-ter Ordnung, deren zu diesen Punkten gehörigen Tangenten zur Abszissenaxe parallel laufen. Diese Parabel nenne ich die Treppenparabel, die durch die Punkte mit den Koordinaten* (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\dots (x_n, y_n)$ *geht.* Sie wird durch die ganze rationale Funktion $(2n-1)$-ten Grades von x

$$(3) \qquad H(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right)\left(\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}\right)^2$$

dargestellt[1]), wo wieder $\omega(x) = \text{const.}\,(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$.

---

1) Diejenige ganze rationale Funktion $(2n-1)$-ten Grades, welche an den Stellen $x_1, x_2, \dots x_n$ die Werte $y_1, y_2, \dots y_n$, und deren Ableitung an diesen Stellen

[Die Formel (3) stellt also diejenige ganze rationale Funktion $(2n-1)$-ten Grades von x dar, die an den Stellen $x_1, x_2, \ldots x_n$, der Reihe nach, die Werte $y_1, y_2, \ldots y_n$ annimmt, und deren Ableitung an diesen Stellen verschwindet, d. h. die an den Stellen $x_1, x_2 \ldots x_n$ die Werte $y_1, y_2, \ldots y_n$ doppelt annimmt].

In dieser Arbeit werde ich mich hauptsächlich mit den Treppenparabeln beschäftigen. Die Verteilung der Abszissen $x_1, x_2, \ldots x_n$ werde ich hier nicht beliebig, sondern verschiedenartig spezialisiert wählen.

Die Theorie der Interpolation wurde in neuerer Zeit durch die bedeutenden Arbeiten von Runge, Borel, de la Vallée-Poussin und Faber sehr wesentlich gefördert [1]).

Vorliegende Arbeit liefert einen weiteren Beitrag zu dieser Theorie.

Zum Verständnis dieser Arbeit reichen die elementarsten Vorkenntnisse der Analysis aus.

2. Nach (1) ist

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k l_k(x), \tag{1}$$

wo

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}, \qquad (k = 1, 2, \ldots n). \tag{1'}$$

Die Polynome $l_1(x), l_2(x), \ldots l_n(x)$, die ausschließlich von den gewählten Abszissen $x_1, x_2, \ldots x_n$ abhängen, nenne ich die *„Grundpolynome" der Interpolation* (1). Da für $y_1 = y_2 \ldots = y_n = 1$ das Polynom $L(x)$ identisch gleich 1 ist, also ist

$$l_1(x) + l_2(x) + \cdots + l_n(x) \equiv 1, \tag{4}$$

---

die Werte $y'_1, y'_2, \ldots y'_n$ annimmt wird durch die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} y_k\left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right)\left(\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} y'_k\left(\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}\right)^2,$$

$$\omega(x) = C(x-x_1)\ldots(x-x_n),$$

dargestellt. S. Ch. Hermite: Sur la formule d'interpolation de Lagrange, Journal für die reine und angewandte Mathematik; Bd. 84, 1878. — In vorliegender Arbeit setze ich stets $y'_1 = y'_2 \ldots = y'_n = 0$, und gedenke später andere spezielle Fälle zu behandeln.

1) Über die Literatur im Allg. S. Encyclopédie des sciences mathématiques etc. Tome I, volume 4, fascicule 1: D. Selivanow, J. Bauschinger, H. Andoyer: Calcul des différences et interpolation, 1906, und den soeben erschienenen Artikel in der Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II 3, Heft 2, von C. Runge und Fr. A. Willers: Numerische und graphische Quadratur etc., 1915.

d. h. *die Summe der Grundpolynome der Interpolation* (1) *ist identisch gleich* 1.

Nach (3) ist

$$H(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k h_k(x), \tag{3}$$

wo

$$h_k(x) = \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right)\left(\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)}\right)^2, \tag{3'}$$

$$(k = 1, 2, \dots n).$$

Die Polynome $h_1(x), h_2(x), \dots h_n(x)$, die ausschließlich durch $x_1, x_2, \dots x_n$ bestimmt sind, nenne ich die *Grundpolynome der Interpolation* (3). Da für $y_1 = y_2 \dots = y_n = 1$ das Polynom $H(x)$ identisch gleich 1 wird, also ist

$$h_1(x) + h_2(x) + \dots + h_n(x) \equiv 1, \tag{5}$$

d. h. *die Summe der Grundpolynome der Interpolation* (3) *ist identisch gleich* 1.

§ 2. Die Treppenparabeln für vier spezielle Abszissenverteilungen.

3. Erster spezieller Fall. Es seien $x_1, x_2, \dots x_n$ die Nullstellen des n-ten Legendreschen Polynoms $P_n(x)$. Diesen Fall werde ich auch den Gaußschen Fall nennen. Das Intervall, in welchem ich die Treppenparabel beobachte, ist das Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$.

Jetzt ist $\omega(x) = P_n(x)$. Also, bekanntlich,

$$(1 - x^2)\,\omega'' - 2x\,\omega' + n(n+1)\,\omega = 0. \tag{6}$$

Bezeichnet nun x_k eine Wurzel von $\omega(x) = P_n(x) = 0$, so ist, auf Grund der Differentialgleichung (6),

$$(1 - x_k^2)\,\omega''(x_k) - 2x_k\,\omega'(x_k) = 0,$$

also

$$\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = \frac{2x_k}{1 - x_k^2},$$

und

$$1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k) = \frac{1 - 2x\,x_k + x_k^2}{1 - x_k^2}.$$

Im Gaußschen Falle ist also, mit Rücksicht auf (3'),

$$h_k(x) = \frac{1-2xx_k+x_k^2}{1-x_k^2}\left(\frac{P_n(x)}{P_n'(x_k)(x-x_k)}\right)^2, \quad (k = 1, 2, \dots n). \tag{7}$$

Nun ist aber, für $|x| \leqq 1$,

$$1-2xx_k+x_k^2 \geqq 1-2|x_k|+|x_k|^2 = (1-|x_k|)^2 > 0,$$

also ist

$$h_k(x) \geqq 0, \quad -1 \leqq x \leqq +1, \quad k = 1, 2, \dots n. \tag{8}$$

Ich habe also erhalten

Theorem I. *Sind $x_1, x_2, \dots x_n$ die Nullstellen des n-ten Legendreschen Polynoms $P_n(x)$, so lautet die Formel der durch die Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots (x_n, y_n)$ gehenden Treppenparabel*

$$H(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k h_k(x), \tag{9}$$

wo

$$h_k(x) = \frac{1-2xx_k+x_k^2}{1-x_k^2}\left(\frac{P_n(x)}{P_n'(x_k)(x-x_k)}\right)^2, \quad k = 1, 2, \dots n. \tag{10}$$

Die Grundpolynome $h_1(x), h_2(x), \dots h_n(x)$ sind im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ alle nichtnegativ, d. h.

$$h_k(x) \geqq 0, \quad -1 \leqq x \leqq +1, \quad k = 1, 2, \dots n, \tag{11}$$

und da doch

$$h_1(x) + h_2(x) + \dots + h_n(x) = 1, \tag{12}$$

also ist [1])

$$0 \leqq h_k(x) \leqq 1, \quad -1 \leqq x \leqq +1, \quad k = 1, 2, \dots n. \tag{13}$$

4. Zweiter spezieller Fall. Es seien $x_1, x_2, \dots x_n$ die Nullstellen des n-ten Tschebyscheffschen Polynoms $T_n(x) = \cos n(\arccos x)$, d. h.

---

1) Interessant ist auch die Radausche Verteilung der Abszissen $x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x$ [S. R. Radau: Étude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3ième série, Tome 6., 1880. S. pag. 303]. Bei Radau ist $x_1 = 1$, $x_n = -1$, und $x_2, x_3, \dots x_{n-1}$ sind die Wurzeln der Gleichung $P'_{n-1}(x) = 0$, wo $P_{n-1}(x)$ das $(n-1)$-te Legendresche Polynom bedeutet. In diesem Falle ist also $\omega(x) = \text{const.}\,(1-x^2)\,P'_{n-1}(x)$. *Die Grundpolynome der Treppenparabeln sind auch für die Radausche Abszissenverteilung im Intervalle*

$$-1 \leqq x \leqq +1$$

alle nichtnegativ.

$$(14) \qquad x_k = \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}, \qquad k = 1, 2, \dots n.$$

Jetzt ist $\omega(x) = T_n(x)$, (gleich $\cos n\theta$, genommen als Polynom n-ten Grades von $x = \cos\theta$), und also

$$(15) \qquad (1-x^2)\omega'' - x\omega' + n^2\omega = 0.$$

Setze ich hier $x = x_k$, so erhalte ich

$$\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = \frac{x_k}{1-x_k^2}.$$

Also ist

$$1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k) = \frac{1-xx_k}{1-x_k^2},$$

und, mit Rücksicht auf (3'),

$$h_k(x) = \frac{1-xx_k}{1-x_k^2}\left(\frac{T_n(x)}{T_n'(x_k)(x-x_k)}\right)^2.$$

Da, für $|x| \leqq 1$,

$$1 - xx_k \geqq 1 - |x_k| > 0,$$

also ist auch jetzt

$$h_k(x) \geqq 0, \quad -1 \leqq x \leqq +1, \qquad k = 1, 2, \dots n.$$

Übrigens ist

$$(T_n'(x_k))^2 = \frac{n^2}{1-x_k^2},$$

so daß also

$$h_k(x) = \frac{1}{n^2}(1-xx_k)\left(\frac{T_n(x)}{x-x_k}\right)^2.$$

Ich habe also erhalten das

Theorem II. *Sind $x_1, x_2, \dots x_n$ die Nullstellen des n-ten Tschebyscheffschen Polynoms $T_n(x) = \cos n(\arccos x)$, d. h.*

$$x_k = \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}, \qquad k = 1, 2, \dots n,$$

so lautet die Formel der durch die Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_n, y_n)$ gehenden Treppenparabel

$$(17) \qquad H(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k h_k(x),$$

wo

$$(18) \qquad h_k(x) = \frac{1}{n^2}(1-xx_k)\left(\frac{T_n(x)}{x-x_k}\right)^2, \qquad (k = 1, 2, \dots n).$$

Es ist weiter

(19) $$\sum_{k=1}^{n} h_k(x) \equiv 1,$$

und

(20) $$0 \leqq h_k(x) \leqq 1, \quad -1 \leqq x \leqq +1, \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

5. Dritter spezieller Fall (Newtonscher Fall). Die Punkte $x_1, x_2, \ldots x_n$ seien äquidistant, und es sei namentlich

(21) $$x_k = -1 + k\frac{2}{n+1}, \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Wenn überhaupt

$$\omega(x) = C(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n),$$

und die Werte $x_1, x_2, \ldots x_n$ voneinander verschieden sind, so ist

(22) $$\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = 2\left[\frac{1}{x_k - x_1} + \frac{1}{x_k - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_k - x_{k-1}} + \frac{1}{x_k - x_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{x_k - x_n}\right].$$

Es sei nun $k < \frac{n+1}{2}$. Dann ist, mit Rücksicht auf (21) und (22),

$$\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = -(n+1)\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n-k}\right).$$

Also hat der lineare Faktor im Grundpolynome $h_k(x)$

$$1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)$$

an der Stelle $x = -1$ den Wert

$$1 + (n+1)\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n-k}\right)\cdot\frac{-2k}{n+1}$$
$$= 1 - 2k\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n-k}\right) < 0,$$

und an der Stelle $x = 1$ den Wert

$$1 + 2(n+1-k)\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n-k}\right) > 0.$$

Der Linearfaktor in $h_k(x)$ ist also für $x = -1$ negativ, für $x = +1$ positiv. Das Grundpolynom $h_k(x)$ wechselt also einmal sein Vorzeichen im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$.

Dasselbe ist gültig wenn $k > \frac{n+1}{2}$.

Im Falle der Newtonschen Abszissen (21) *wechseln also alle Grundpolynome in den Formeln der Treppenpolynome einmal ihr Vorzeichen im Intervalle* $-1 \leqq x \leqq +1$. Eine *Ausnahme* bilden nur diejenigen Grundpolynome, welche, bei ungeradem n, dem Werte $k = \frac{n+1}{2}$ entsprechen, d. h. diejenigen Grundpolynome, welche, bei ungeradem n, der Interpolationsstelle $x_{\frac{n+1}{2}} = 0$ entsprechen. Für diese ist der Linearfaktor (weil $\omega''(0) = 0$ bei ungeradem n) identisch gleich 1, und daher sind diese Grundpolynome nichtnegativ.

6. Vierter spezieller Fall. Es sei

$$x_k = \cos k \frac{\pi}{n+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots n.$$

Dann ist $\omega(x)$ gleich $C \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$, genommen als Polynom n-ten Grades von $x = \cos\theta$. (Es ist dann übrigens $\omega(x) = \text{const.}\ T'_{n+1}(x)$). Da

$$(1-x^2)\omega'' - 3x\omega' + [(n+1)^2 - 1]\omega = 0,$$

also ist

$$h_k(x) = \frac{1 - 3xx_k + 2x_k^2}{1 - x_k^2}\left(\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}\right)^2,$$
$$k = 1, 2, \ldots n.$$

Man sieht leicht, daß auch in diesem Falle ein Teil der Grundpolynome im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ *sein Vorzeichen wechselt* [1]).

---

1) Es sei hier auf das folgende allgemeine Problem hingewiesen: Wie müssen die Abszissen $x_1, x_2, \ldots x_n$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ verteilt sein, daß die Grundpolynome der Treppenparabel

$$h_k(x) = \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}\right)\left(\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}\right)^2, \qquad (k = 1, 2, \ldots n),$$

im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ nichtnegativ ausfallen? D. h. wie müssen die Zahlen $-1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$ gewählt werden, daß, wenn $\omega(x) = x - x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$,

$$1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k) \geqq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots n,$$

für $-1 \leqq x \leqq +1$? — Man ersieht aus dieser Arbeit, daß gerade in den Fällen, wo die Grundpolynome nichtnegativ ausfallen, die Treppenparabeln merkwürdige Eigenschaften besitzen, die man äußerst einfach herleiten kann. Natürlich glaube ich aber *nicht*, daß für das Bestehen gewisser *Konvergenzeigenschaften* das Nichtnegativsein der Grundpolynome *notwendig* wäre.

§ 3. Eigenschaften der Treppenparabeln bei Gaussscher und Tschebyscheffscher Abszissenverteilung.

7. Wir haben gesehen, daß im Gaußschen und Tschebyscheffschen Falle die Grundpolynome der Treppenparabeln im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ nichtnegativ sind. Daraus folgt:

Theorem III. *Bezeichnen $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Nullstellen des n-ten Legendreschen Polynoms, und ist $H(x)$ das Polynom der durch die Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ gehenden Treppenparabel, so ist*

$$y \leqq H(x) \leqq Y, \tag{24}$$

für

$$-1 \leqq x \leqq +1.$$

Hier bedeutet y diejenige unter den Ordinaten $y_1, y_2, \ldots y_n$, die nicht größer ist als die übrigen, und Y diejenige, die nicht kleiner ist als die übrigen.

Dasselbe ist auch im Tschebyscheffschen Falle gültig[1].

---

1) Die Ordinaten $H(x)$ der Treppenparabel liegen also für $-1 \leqq x \leqq +1$ zwischen der kleinsten und größten der gegebenen Ordinaten $y_1, y_2, \ldots y_n$, welchen Wert auch die Anzahl n der Interpolationsstellen habe. Für die Lagrangesche Parabel trifft dies im allgemeinen nicht zu. Ich zeige dies im Falle Tschebyscheffscher Abszissen einfach so:

Es sei also

$$x = \cos\theta, \quad T_n(x) = \cos n\theta, \quad x_k = \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n},$$
$$(k = 1, 2, \ldots n).$$

Das Lagrangesche Polynom für die Abszissen $x_1, x_2, \ldots x_n$ und die Ordinaten $y_1, y_2, \ldots y_n$ lautet

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{T_n(x)}{T_n'(x_k)(x-x_k)}.$$

Es sei n gerade. Dann ist $x_k \neq 0$, $(k = 1, 2, \ldots n)$. Also ist für $x = 0$, d. h. für $\theta = \frac{\pi}{2}$, da immer $T_n'(x) = \frac{n \sin n\theta}{\sin\theta}$,

$$L(0) = \sum_{k=1} y_k \frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{\dfrac{n\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2n}} \cdot \left(-\cos(2k-1)\frac{\pi}{2n}\right)} =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n} \sum_{k=1}^{n} y \cdot (-1)^k \cdot \operatorname{tg}(2k-1)\frac{\pi}{2n},$$

und für $n = 4\nu$, $(\nu = 1, 2, 3, \ldots \infty)$, einfach

Beweis. Es ist

$$H(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k h_k(x).$$

Da aber $h_k(x) \geqq 0$, für $-1 \leqq x \leqq +1$, also ist

$$y \sum_{k=1}^{n} h_k(x) \leqq H(x) \leqq Y \sum_{k=1}^{n} h_k(x), \quad -1 \leqq x \leqq +1.$$

Nun ist aber, (laut Gl. (5)), $\sum_{k=1}^{n} h_k(x) \equiv 1$, also

$$y \leqq H(x) \leqq Y, \quad -1 \leqq x \leqq +1, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Ich bemerke noch, daß der *Beitrag*, den ein *Glied* $y_k h_k(x)$ zu $H(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k h_k(x)$ liefert, das Vorzeichen von y_k hat, und daß die Größe dieses Beitrages absolut genommen kleiner als $|y_k|$ ist, im ganzen Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$. Dies folgt aus $0 \leqq h_k(x) \leqq 1$, für $-1 \leqq x \leqq +1$, $k = 1, 2, \ldots n$.

Theorem IV. *Gehört die Treppenparabel* $H(x)$ *zu den Ordinaten* $y_1, y_2, \ldots y_n$, *und die Treppenparabel* $\bar{H}(x)$ *zu den Ordinaten* $y_1 + \delta_1$, $y_2 + \delta_2, \ldots y_n + \delta_n$, *so ist*

$$|H(x) - \bar{H}(x)| \leqq \delta, \qquad -1 \leqq x \leqq +1, \tag{25}$$

$$L(0) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot (-1)^k \cdot \operatorname{tg}(2k-1)\frac{\pi}{2n}.$$

Wähle ich also

$$y_k = (-1)^k, \text{ für } k = 1, 2, \ldots \frac{n}{2},$$

und

$$y_k = -(-1)^k, \text{ für } k = \frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + 2, \ldots n,$$

so ist

$$L(0) = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \operatorname{tg}(2k-1)\frac{\pi}{2n} > \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}} \operatorname{tg} x \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\log \cos\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right]\right) = \frac{2}{\pi} \log \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}} > \frac{2}{\pi} \log \frac{2n}{\pi}.$$

Also trotzdem, daß $|y_1| = |y_2| = \cdots = |y_n| = 1$, ist die Ordinate $L(0)$ der Lagrangeschen Parabel $> \frac{2}{\pi} \log \frac{2n}{\pi}$. Diese Zahl ist aber beliebig groß, wenn n gehörig groß gewählt ist.

wenn

$$|\delta_1|, |\delta_2|, \ldots |\delta_n| \leqq \delta.$$

Die Abszissen $x_1, x_2, \ldots x_n$ sollen nach Gauß oder nach Tschebyscheff gewählt werden (oder überhaupt so, daß die Grundpolynome in (3) für das betrachtete Intervall alle nichtnegativ ausfallen).

Beweis. Da

$$H(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k h_k(x), \quad \bar{H}(x) = \sum_{k=1}^{n} (y_k + \delta_k) h_k(x),$$

also ist

$$\bar{H}(x) - H(x) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k h_k(x),$$

und da $h_k(x) \geqq 0$, und $\sum_{k=1}^{n} h_k(x) = 1$ für $-1 \leqq x \leqq +1$, also ist, für $-1 \leqq x \leqq +1$,

$$|\bar{H}(x) - H(x)| \leqq \delta \sum_{k=1}^{n} h_k(x) = \delta, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Aus Theorem III folgt unmittelbar

Theorem V. *Es sei $f(x)$ eine im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ definierte reelle Funktion der reellen Variabeln x. Es sei m ihre Weierstraßsche untere, und M ihre obere Grenze für dieses Intervall. Es sei weiter*

$$H_1(x), H_2(x), \ldots H_n(x), \ldots \tag{26}$$

die unendliche Folge der zur Funktion $f(x)$ gehörigen Treppenparabeln. (Hier bedeutet $H_n(x)$ diejenige ganze rationale Funktion $(2n-1)$-ten Grades, die an den Stellen $x_1, x_2, \ldots x_n$, der Reihe nach, die Funktionswerte $f(x_1), f(x_2), \ldots f(x_n)$ annimmt und deren Ableitung an den Stellen $x_1, x_2, \ldots x_n$ verschwindet.)

Dann ist

$$m \leqq H_n(x) \leqq M, \tag{27}$$

für

$$-1 \leqq x \leqq +1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \infty.$$

Die Abszissen sind hier immer nach Gauß, oder nach Tschebyscheff gewählt.

Aus Theorem IV folgt unmittelbar

Theorem VI. *Ist für $f(x)$ die Folge der Treppenparabeln*

$$H_1(x), H_2(x), \ldots H_n(x), \ldots,$$

für $f(x) + \delta(x)$

$$\overline{H}_1(x),\ \overline{H}_2(x),\ \ldots\ \overline{H}_n(x),\ \ldots,$$

so ist

$$|H_n(x) - \overline{H}_n(x)| \leqq \delta, \quad -1 \leqq x \leqq +1, \quad n = 1, 2, \ldots \infty,$$

wenn

$$|\delta(x)| \leqq \delta, \quad -1 \leqq x \leqq +1.$$

Als Interpolationsabszissen sind wieder die Gaußschen oder Tschebyscheffschen gewählt.

In diesem Satze ist festgestellt, daß die Gesamtheit der Treppenparabeln $H_1(x), H_2(x) \ldots H_n(x), \ldots$ der Kurve $f(x)$, wie ich mich ausdrücken möchte, in *stabiler* Weise von $f(x)$ abhängt, wenn die Interpolationsabszissen nach Gauß oder nach Tschebyscheff gewählt werden. In der Tat, wenn ich $f(x)$ zu $f(x) + \delta(x)$ modifiziere, wo die Abweichung $|\delta(x)| \leqq \delta$ ist für $-1 \leqq x \leqq +1$, so ist auch die Abweichung $\overline{H}_n(x) - H_n(x)$ irgendeiner Treppenparabel $\overline{H}_n(x)$ der modifizierten Kurve $f(x) + \delta(x)$ von der entsprechenden Treppenparabel $H_n(x)$ der Kurve $f(x)$ absolut genommen $\leqq \delta$ im ganzen Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$.

Die Lagrangeschen Parabeln

$$L_1(x),\ L_2(x),\ \ldots\ L_n(x),\ \ldots$$

sind *instabil* in Bezug auf $f(x)$. ($L_n(x)$ bedeutet diejenige ganze rationale Funktion $(n-1)$-ten Grades, die an den Stellen $x_1, x_2, \ldots x_n$, der Reihe nach, die Funktionswerte $f(x_1), f(x_2), \ldots f(x_n)$ annimmt. $x_1, x_2, \ldots x_n$ bedeuten Gaußsche oder Tschebyscheffsche Abszissen.) Weiß man nämlich, daß für $-1 \leqq x \leqq +1$ die Funktion $f(x)$ absolut beschränkt ist, so folgt daraus noch *nicht*, daß die Gesamtheit der Lagrangeschen Polynome $L_1(x), L_2(x), \ldots L_n(x), \ldots$ von $f(x)$ für $-1 \leqq x \leqq +1$ beschränkt ist. (S. die Fußnote zu Theorem III.) Das ist in einem allgemeinen Theoreme des Herrn G. Faber enthalten[1]).

§ 4. Die Konvergenz der unendlichen Folge der Treppenparabeln einer Funktion bei Gaussschen Abszissen.

8. **Theorem VII.** *Die reelle Funktion $f(x)$ der reellen Variabeln x sei im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ beschränkt, und sei an einer innern Stelle x dieses Intervalles stetig. Dann ist die Folge der Treppenparabeln*

1) G. Faber: Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 23, 1914.

$$H_1(x),\ H_2(x),\ \ldots\ H_n(x),\ \ldots,$$

gebildet für die Gaußschen Abszissen, an der Stelle x konvergent, und hat den Grenzwert $f(x)$. D. h.

(29) $$\lim_{n=\infty} H_n(x) = f(x).$$

Beweis. Es ist

(30) $$H_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k h_k(x), \quad f_k = f(x_k), \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Nun ist aber nach (12)

$$\sum_{k=1}^{n} h_k(x) = 1,$$

also

(31) $$H_n(x) - f(x) = \sum_{k=1}^{n} (f_k - f(x))\, h_k(x).$$

Da $f(x)$ an der innern Stelle des Intervalles $-1 \leqq x \leqq +1$ stetig ist, kann man zur beliebig kleinen positiven Zahl δ eine positive Zahl ε ordnen, daß

(32) $$|f(\xi) - f(x)| \leqq \delta,$$

wenn

$$|\xi - x| \leqq \varepsilon,$$

und so, daß

$$-1 < x - \varepsilon < x < x + \varepsilon < +1.$$

(x, δ, ε sind nun fixiert).

Die n-gliedrige Summe (31) teile ich nun in zwei Teile:

(33) $$H_n(x) - f(x) = \sum{}' + \sum{}''.$$

Die Summe $\sum'$ enthält diejenigen Summanden der Summe (31), (wenn solche überhaupt vorhanden sind), die zu solchen Stellen x_k gehören, welche dem Intervalle $x - \varepsilon \leqq \xi \leqq x + \varepsilon$ angehören, d. h.

(34) $$x - \varepsilon \leqq x_k \leqq x + \varepsilon.$$

Die Summe $\sum''$ enthält alle übrigen Glieder der Summe (31), (wenn solche überhaupt vorhanden sind).

Nun ist, auf Grund von (32), (11), (12)

(35) $$\left|\sum{}'\right| \leqq \delta \sum{}' h_k(x) \leqq \delta \sum_{k=1}^{n} h_k(x) = \delta.$$

Weiter ist

(36) $$\left|\sum{}''\right| \leqq 2M \sum{}'' h_k(x),$$

wenn $|f(\xi)| \leqq M$, für $-1 \leqq \xi \leqq +1$.

Nun ist aber, mit Rücksicht auf (10), stets

$$0 \leqq h_k(x) \leqq 4 \frac{(P_n(x))^2}{(1-x_k^2)(P_n'(x_k))^2} \frac{1}{(x-x_k)^2}.$$

Wenn also x_k außerhalb des Intervalles $x-\varepsilon \leqq \xi \leqq x+\varepsilon$ liegt, so ist

$$(37) \qquad 0 \leqq h_k(x) \leqq 4 \frac{(P_n(x))^2}{\varepsilon^2} \frac{1}{(1-x_k^2)(P_n'(x_k))^2}.$$

Also ist, auf Grund von (36) und (37),

$$(38) \qquad \begin{aligned} |\Sigma''| &\leqq \frac{8M}{\varepsilon^2} (P_n(x))^2 \Sigma'' \frac{1}{(1-x_k^2)(P_n'(x_k))^2} \\ &\leqq \frac{8M}{\varepsilon^2} (P_n(x))^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1-x_k^2)(P_n'(x_k))^2}. \end{aligned}$$

Setze ich aber in die Identität (12) $x = 1$, so erhalte ich, mit Rücksicht auf (10),

$$(39) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(1-x_k^2)(P_n'(x_k))^2} = 1,$$

also ist, laut (38),

$$(40) \qquad |\Sigma''| \leqq \frac{8M}{\varepsilon^2} (P_n(x))^2.$$

33), (35) und (40) liefern

$$(41) \qquad |H_n(x) - f(x)| \leqq \delta + \frac{8M}{\varepsilon^2} (P_n(x))^2.$$

Nun ist aber bekanntlich $\lim\limits_{n=\infty} P_n(x) = 0$ für $-1 < x < +1$, ja es existiert sogar eine numerische Konstante c, daß

$$(42) \qquad |P_n(x)| < \frac{c}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}, \quad -1 < x < +1, \qquad n = 1, 2, \ldots \infty.$$

Also ist

$$(43) \qquad |H_n(x) - f(x)| \leqq \delta + \frac{8Mc^2}{\varepsilon^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{n}.$$

Ist also n gehörig groß, so ist

$$(44) \qquad |H_n(x) - f(x)| \leqq 2\delta,$$

und daher

$$\lim_{n=\infty} H_n(x) = f(x), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Es ist bemerkenswert, wie wenig bei diesem Konvergenzbeweise von den Eigenschaften der Legendreschen Polynome und ihrer Wurzeln benutzt wurde.

Auf Grund der Abschätzung (43) kann ich zu Theorem VII hinzufügen

Theorem VIII. *Ist die für* $-1 \leqq x \leqq +1$ *beschränkte Funktion* $f(x)$ *im Intervalle* $a \leqq x \leqq b$ *überall stetig, (wo* $-1 \leqq a < b \leqq +1$*), so konvergiert die mit Gaußschen Abszissen gebildete Folge von Treppenparabeln*

$$H_1(x),\ H_2(x),\ \ldots\ H_n(x),\ \ldots$$

im Intervalle $a+\sigma \leqq x \leqq b-\sigma$ *gleichmäßig zu* $f(x)$, *wie klein auch die positive Zahl* σ *sei. Ist also speziell* $f(x)$ *im ganzen Intervalle* $-1 \leqq x \leqq +1$ *stetig, so konvergiert die Folge der Treppenparabeln im Intervalle* $-1+\sigma \leqq x \leqq 1-\sigma$ *gleichmäßig zu* $f(x)$, *wie klein auch die positive Zahl* σ *sei.*

§ 5. Die Treppenparabel an den Endstellen $x = \pm 1$ bei Gaussschen Abszissen. Anwendung auf die Gausssche mechanische Quadratur.

9. Interessant ist, im Gaußschen Falle, das Verhalten der einzelnen Treppenparabel, und dann der unendlichen Folge der Treppenparabeln an den Stellen $x = \pm 1$.

Es sei $H(x)$ das Polynom $(2n-1)$-ten Grades der durch die Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ gehenden Treppenparabel.

Nach Voraussetzung verschwindet $H'(x)$ an den Nullstellen $x_1, x_2, \ldots x_n$ des Legendreschen Polynoms $P_n(x)$. Also ist

$$H'(x) = K(x)\,P_n(x), \tag{45}$$

wo $K(x)$ ein Polynom $(n-2)$-ten Grades bezeichnet. Aus (45) folgt nun durch Integration

$$\int_{-1}^{+1} H'(x)\,dx = H(+1) - H(-1) = \int_{-1}^{+1} K(x)\,P_n(x)\,dx = 0, \tag{46}$$

(nach der Grundeigenschaft des Legendreschen Polynoms:

$$\int_{-1}^{+1} p(x)\,P_n(x)\,dx = 0,$$

wenn $p(x)$ ein beliebiges Polynom $(n-1)$-ten Grades bedeutet).

Nach (46) ist also

$$H(+1) = H(-1), \tag{47}$$

d. h., im Gaußschen Falle, hat das Treppenpolynom für $+1$ und -1 *denselben* Wert.

10. Die Gleichung (45) liefert aber noch

$$\int_{-1}^{+1} x H'(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} x K(x) P_n(x)\,dx = 0, \tag{48}$$

ebenfalls in Folge der Grundeigenschaft der Legendreschen Polynome. Aus (48) folgt, durch partielle Integration, und mit Rücksicht auf (47)

$$\int_{-1}^{+1} x H'(x)\,dx = 2H(+1) - \int_{-1}^{+1} H(x)\,dx = 0,$$

also

$$H(\pm 1) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} H(x)\,dx. \tag{49}$$

Die miteinander gleichen Endordinaten $H(+1)$ und $H(-1)$ der Treppenparabel haben also den Wert $\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} H(x)\,dx$.

Was bedeutet $\int_{-1}^{+1} H(x)\,dx$?

Es seien $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Nullstellen des n-ten Legendreschen Polynoms, (die man sich etwa der Größe nach geordnet denken kann). Es seien $y_1, y_2, \ldots y_n$ beliebige gegebene reelle Ordinaten. Durch die Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ geht eine n-fach unendliche Schaar von Parabeln $(2n-1)$-ten Grades, die ich die „Gaußsche Schaar" von Parabeln $(2n-1)$-ten Grades nennen möchte, (weil die Abszissen $x_1, x_2, \ldots x_n$ der gegebenen Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$, durch welche alle Parabeln der Schaar hindurchgehen, eben die Gaußschen Abszissen sind.)

Der berühmte Gaußsche Satz besagt, daß sämtliche Parabeln der n-fach unendlichen Gaußschen Schaar für das Intervall $(-1, +1)$ *gemeinsamen Flächeninhalt*[1]) haben, d. h. $\int_{-1}^{+1} G(x)\,dx$ hängt

[1]) Jacobi beweist dieses Gaußsche Theorem bekanntlich in folgender Weise. Es sei $y = G(x)$ eine beliebige Parabel der Gaußschen Schaar, die

nur von $y_1, y_2, \ldots y_n$ ab, wenn $G(x)$ ein beliebiges Polynom $(2n-1)$-ten Grades bedeutet, und $y_1, y_2, \ldots y_n$ die Werte von $G(x)$ für $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnen. Dieser für die Parabeln der Gaußschen Schaar gemeinsame Wert des Flächeninhaltes heißt der „Wert der Gaußschen mechanischen Quadratur".

Zur Gaußschen Schaar gehört nun (außer der Lagrangeschen) auch die, durch die Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ gehende Treppenparabel $y = H(x)$.

Also bedeutet $\int_{-1}^{+1} H(x)\,dx$ den Wert der Gaußschen mechanischen Quadratur.

Ich habe also das folgende Theorem erhalten:

Theorem IX. *Im Falle Gaußscher Abszissen $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind die Endordinaten $H(+1)$ und $H(-1)$ der durch die Punkte (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ gehenden Treppenparabel einander gleich, und gleich dem Mittelwerte $\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} H(x)\,dx$ des Treppenpolynoms $H(x)$ für das ganze Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$, d. h. gleich der Hälfte des Wertes der Gaußschen mechanischen Quadratur.*

11. Theorem IX über die Treppenparabel gestattet eine interessante Anwendung auf die Ableitung des expliziten Ausdruckes für den Wert der Gaußschen mechanischen Quadratur. Nach Theorem IX, (s. Gl. (49)), ist dieser Wert

$$\int_{-1}^{+1} H(x)\,dx = 2H(\pm 1). \tag{50}$$

Da aber, laut Gl. (9), (10),

---

durch die Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ geht, und es sei $y = L(x)$ die durch diese Punkte gehende Lagrangesche Parabel. Dann ist

$$G(x) - L(x) = K(x)P_n(x),$$

wo $K(x)$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades bezeichnet. Also ist, in Folge der Grundeigenschaft der Legendreschen Polynome,

$$\int_{-1}^{+1} (G(x) - L(x))\,dx = 0,$$

d. h.

$$\int_{-1}^{+1} G(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} L(x)\,dx,$$

w. z. b. w.

$$H(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{1-2xx_k+x_k^2}{1-x_k^2}\left(\frac{P_n(x)}{P_n'(x_k)(x-x_k)}\right)^2,$$

also ist

$$(51) \qquad H(+1) = H(-1) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{1}{(1-x_k^2)(P_n'(x_k))^2},$$

und Gl. (50) liefert

$$(52) \qquad \int_{-1}^{+1} H(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{2}{(1-x_k^2)(P_n'(x_k))^2}.$$

Der Wert der Gaußschen mechanischen Quadratur, für die gegebenen Ordinaten $y_1, y_2, \ldots y_n$, *ist also gleich*

$$(53) \qquad y_1 g_1 + y_2 g_2 + \cdots + y_n g_n,$$

wo

$$(54) \qquad g_k = \frac{2}{(1-x_k^2)(P_n'(x_k))^2}, \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

Die positiven „Gaußschen Konstanten" $g_1, g_2, \ldots g_n$ *(deren Summe gleich* 2 *ist) wurden in der Form* (54) *durch Christoffel*[1] *bestimmt.*

Hier wurde das Christoffelsche Resultat mit Hilfe de[r] Treppenparabel gewonnen[2]).

§ 6. Konvergenz der Folge der Treppenparabeln für $x = \pm 1$ bei Gaussschen Abszissen. Der Satz von Stieltjes übe[r] die Konvergenz der Gaussschen Quadratur für $\lim n = \infty$

12. **Theorem X.** *Es sei* $f(x)$ *für* $-1 \leqq x \leqq +1$ *beschrän[kt] und im Riemannschen Sinne integrabel. Es sei*

$$H_1(x),\ H_2(x),\ \ldots\ H_n(x),\ \ldots$$

die Folge der Treppenparabeln, für Gaußsche Abszissen. Dann [...]

1) E. B. Christoffel: „Über die Gaußische Quadratur" und eine Vera[ll]gemeinerung derselben", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. [...] Seite 69, (1858) und: Gesammelte Mathematische Abhandlungen, Bd. I. S. 65, 19[..]

2) Ich habe zur Herleitung der Christoffelschen Form der Gaußsch[en] Konstanten die Relation $\int_{-1}^{+1} H(x)\,dx = 2H(\pm 1)$ benützt. Man kann aber a[uch] durch Auswertung von $\int_{-1}^{+1} H(x)\,dx$ kurz zum Ziele gelangen, wie mir H[err] Karl Jordan freundlichst mitgeteilt hatte.

(55)
$$H_n(+1) = H_n(-1),$$
und

(56)
$$\lim_{n=\infty} H_n(\pm 1) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx.$$

D. h. die Folge der Treppenparabeln ist an den Endstellen $x = \pm 1$ konvergent, und konvergiert zum Mittelwerte von $f(x)$ für das ganze Intervall $(-1, +1)$.

Beweis. Da, nach Theorem IX,

$$H_n(\pm 1) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} H_n(x)\,dx,$$

also ist die Behauptung (56) äquivalent mit der folgenden:

(57)
$$\lim_{n=\infty}\int_{-1}^{+1} H_n(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx.$$

Nun ist aber, nach Theorem IX, $\int_{-1}^{+1} H_n(x)\,dx$ der Wert der Gaußschen mechanischen Quadratur für die Funktion $f(x)$ beim n-tem Schritte, also ist die Behauptung (56) mit folgendem Theoreme äquivalent:

Der Wert der Gaußschen mechanischen Quadratur beim n-tem Schritte für eine im Intervalle $(-1, +1)$ beschränkte und im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion $f(x)$ konvergiert für $\lim n = \infty$ *zum Integrale der Funktion:* $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx.$

Diesen Satz hat Stieltjes[1]) gefunden, und ihn mit Hilfe einer schönen Methode bewiesen. Berufe ich mich also auf den Satz von Stieltjes, so habe ich die Gl. (57), d. h. Theorem X, bewiesen.

13. Ich habe mich beim Beweise des Theorems X auf den Beweis von Stieltjes gestützt, den er für sein Theorem über die Konvergenz der Gaußschen Quadratur für $\lim n = \infty$ mit seiner Methode gegeben hat.

Ich möchte nun in dieser Nummer andeuten, wie man den Stieltjesschen Satz auch mit Hilfe der Treppenparabeln recht

1) Th. J. Stieltjes: Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques. Annales de l'École Normale Supérieure, sér. 3, Tome 1, 1884 und Oeuvres complètes, Tome I, pag. 317, (Groningen, 1914).

intuitiv beweisen kann. Der Stieltjessche Satz besagt, daß die Folge

$$\int_{-1}^{+1} H_1(x)\,dx, \quad \int_{-1}^{+1} H_2(x)\,dx, \; \ldots \; \int_{-1}^{+1} H_n(x)\,dx, \; \ldots$$

zu $\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$ konvergiert, wenn $f(x)$ für $-1 \leqq x \leqq +1$ beschränkt und im Riemannschen Sinne integrabel ist. Für solches $f(x)$ ist aber die Folge der Treppenparabeln

$$H_1(x),\; H_2(x),\; \ldots\; H_n(x),\; \ldots$$

für $-1 \leqq x \leqq +1$ beschränkt, und sie konvergiert zu $f(x)$ an jeder Stelle x, an welcher $f(x)$ stetig ist. Daraus kann man, nach einem Satz von Lebesgue, sofort schließen, daß

$$\lim_{n=\infty} \int_{-1}^{+1} H_n(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx.$$

Man kann aber hier auch ein Raisonnement von Hurwitz[1]) anwenden.

Wenn $f(x)$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ überall stetig ist, so folgt $\lim\limits_{n=\infty} \int_{-1}^{+1} H_n(x) = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx$ einfach aus dem Umstande, daß $H_n(x)$ für $\lim n = \infty$ im Intervalle $-1+\sigma \leqq x \leqq 1-\sigma$, wo $\sigma > 0$, gleichmäßig zu $f(x)$ konvergiert, und daß die unendliche Folge $H_n(x)$ beschränkt ist im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$.

14. Den Satz von Stieltjes kann man übrigens auch mit Hilfe des Weierstraßschen Satzes über die Approximation einer Funktion durch Polynome leicht beweisen.

Ich betrachte hier nur den speziellen Fall, wo $f(x)$ im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ stetig ist.

Es bezeichne $Q_n[\varphi(x)]$ den Wert der Gaußschen mechanischen Quadratur beim n-tem Schritte für eine beliebige, im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ beschränkte Funktion $\varphi(x)$. (Es ist allgemein $Q_n[\varphi(x)+\psi(x)] = Q_n[\varphi(x)] + Q_n[\psi(x)]$.)

Nach dem Satze von Weierstraß kann ich, wenn ε eine beliebig kleine positive Zahl bedeutet,

$$f(x) = F(x) + \varepsilon(x) \tag{58}$$

---

1) A. Hurwitz: Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Funktionen: Math. Annalen, Bd. 57, 1903, pag. 433.

setzen, wo $F(x)$ ein Polynom von x bedeutet, und $|\varepsilon(x)| \leqq \varepsilon$ für $-1 \leqq x \leqq +1$. Es ist nun

(59) $$Q_n[f(x)] = Q_n[F(x)] + Q_n[\varepsilon(x)],$$

und wenn $n > \left[\frac{\nu}{2}\right]$, (wo ν den Grad des Polynoms $F(x)$ bedeutet), so ist, (nach dem Gaußschen Satze),

$$Q_n[F(x)] = \int_{-1}^{+1} F(x)\,dx,$$

so daß also

(60) $$Q_n[f(x)] = \int_{-1}^{+1} F(x)\,dx + Q_n[\varepsilon(x)].$$

Nun ist aber einerseits nach (60), (mit Rücksicht auf das Theorem in No. 11),

(61) $$\left| Q_n[f(x)] - \int_{-1}^{+1} F(x)\,dx \right| \leqq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} g_k = 2\varepsilon,$$

andererseits, auf Grund von (58),

(62) $$\left| \int_{-1}^{+1} F(x)\,dx - \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{-1}^{+1} \varepsilon(x)\,dx \right| \leqq 2\varepsilon,$$

also ist, mit Rücksicht auf (61) und (62),

(63) $$\left| Q_n[f(x)] - \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx \right| \leqq 4\varepsilon,$$

wenn nur n gehörig groß ist. Das besagt

(64) $$\lim_{n=\infty} Q_n[f(x)] = \int_{-1}^{+1} f(x)\,dx,$$ w. z. b. w.

§ 7. Konvergenz der Treppenparabeln bei Tschebyscheffschen Abszissen. Eine Bemerkung.

15. **Theorem XI.** *Die Funktion $f(x)$ sei im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ beschränkt. Dann konvergiert die für die Tschebyscheffschen Abszissen gebildete Folge der Treppenpolynome*

(65) $$H_1(x),\ H_2(x),\ \ldots\ H_n(x),\ \ldots$$

der Funktion $f(x)$ an jeder Stelle x des Intervalles $-1 \leqq x \leqq +1$, *wo die Funktion $f(x)$ stetig ist, zum Grenzwerte $f(x)$, und sie konvergiert gleichmäßig im Intervallv $a+\sigma \leqq x \leqq b-\sigma$, wenn $f(x)$ im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ stetig ist. (Hier ist $-1 \leqq a < b \leqq +1$, $\sigma > 0$)*

Ist die Funktion $f(x)$ im ganzen Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ stetig, so konvergiert die Folge (65) *der Treppenpolynome im ganzen Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ gleichmäßig.*

Der Beweis dieses Theorems ist auf Grund des Theorems II äußerst einfach, und ich möchte ihn also hier nicht auseinandersetzen. Es sei aber darauf hingewiesen, daß im Falle Tschebyscheffscher Abszissen die Endstellen -1 und $+1$ des Intervalles *keine* Ausnahmestellung haben, wie im Falle der Gaußschen Abszissen.

16. **Bemerkung.** Sind $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Gaußschen Abszissen, und $G(x)$ eine Parabel $(2n-1)$-ten Grades der durch die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots (x_n, y_n)$ gehenden Gaußschen Schaar, so hat $\int_{-1}^{+1} G(x)\,dx$ *denselben* Wert für *jede* Parabel $G(x)$ dieser Schaar. (Gaußscher Satz.) Diesem Satze ist der folgende analog: bedeuten $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Tschebyscheffschen Abszissen, und $M(x)$ eine Parabel $(2n-1)$-ten Grades der durch die Punkte (x_1, y_1), $x_2, y_2)$, $\ldots (x_n, y_n)$ gehenden „Tschebyscheffschen Schaar" von Parabeln $(2n-1)$-ten Grades, so hat

$$\int_{-1}^{+1} \frac{M(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \tag{66}$$

denselben Wert für *jede* Parabel der Schaar. (Mehlerscher[1]) Satz.)

Beweis. Es sei $L(x)$ die Lagrangesche Parabel, welche durch die Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots (x_n, y_n)$ geht. Dann ist

$$M(x) - L(x) = N(x)\,T_n(x), \tag{67}$$

wo $T_n(x)$ das Tschebyscheffsche Polynom, $N(x)$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades bezeichnet. Aus (67) folgt:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{M(x)-L(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{N(x)\,T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \int_0^{\pi} N(\cos\theta)\cos n\theta\,d\theta = 0,$$

1) F. G, Mehler: Bemerkungen zur Theorie der mechanischen Quadraturen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 63, Seite 156, 1864, und E. Heine, Theorie der Kugelfunctionen, (zweite Aufl.), 1878, Bd. I, S. 22.

(weil $N(\cos\theta)$ die Form $\alpha_0 + \alpha_1 \cos\theta + \cdots + \alpha_{n-1}\cos(n-1)\theta$ hat), d. h.

(68) $$\int_{-1}^{+1} \frac{M(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^{+1} \frac{L(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Anhang. Über trigonometrische Interpolation.

17. Es sei $f(\theta)$ eine im Intervalle $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ beschränkte und im Riemannschen Sinne integrierbare Funktion. Es sei

(69) $$s(\theta) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\theta + b_1\sin\theta + \cdots + a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta$$

die Summe der ersten $(n+1)$ Glieder ihrer Fourierschen Reihe, also

(70) $$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\,dt, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\,dt, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n). \end{aligned}$$

Ersetzen wir in den Formeln (70) die *Integrale* durch *Summen* in folgender Weise:

(71) $$\begin{aligned} A_k &= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{\nu=0}^{2n} f(\theta_\nu)\cos k\theta_\nu\right\} = \frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=0}^{2n} f_\nu \cos k\theta_\nu, \\ B_k &= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{\nu=0}^{2n} f(\theta_\nu)\sin k\theta_\nu\right\} = \frac{2}{2n+1}\sum_{\nu=0}^{2n} f_\nu \sin k\theta_\nu, \\ &(k = 0, 1, 2, \ldots n), \end{aligned}$$

wo

(72) $$\theta_\nu = \nu\frac{2\pi}{2n+1}, \quad f_\nu = f(\theta_\nu), \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots 2n).$$

Dann erhalten wir statt der Partialsumme (69) das trigonometrische Polynom

(73) $$S(\theta) = \frac{A_0}{2} + A_1\cos\theta + B_1\sin\theta + \cdots + A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta.$$

Es ist leicht einzusehen, daß $S(\theta)$ dasjenige trigonometrische Polynom n-ter Ordnung ist, welches an den $(2n+1)$ Stellen

74) $$\theta_0,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \ldots\ \theta_{2n}$$

lie Werte

$$f_0, f_1, f_2, \dots f_{2n}$$

annimmt. Denn nach Dirichlet ist

$$(76)\qquad s(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{t-\theta}{2}}{\sin\frac{t-\theta}{2}}\,dt,$$

also erhalte ich, das Integral nach den Stellen $\theta_0, \theta_1, \dots \theta_{2n}$ durch eine Summe ersetzend, für das trigonometrische Polynom $S(\theta)$ noch die folgende Form:

$$(77)\qquad \begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{\nu=0}^{2n} f(\theta_\nu)\frac{\sin(2n+1)\frac{\theta_\nu-\theta}{2}}{\sin\frac{\theta_\nu-\theta}{2}} = \\ &= \sum_{\nu=0}^{2n} f(\theta_\nu)\frac{\sin(2n+1)\frac{\theta_\nu-\theta}{2}}{(2n+1)\sin\frac{\theta_\nu-\theta}{2}}. \end{aligned}$$

Aus dieser Form von $S(\theta)$ ist nun ersichtlich, daß

$$(78)\qquad S(\theta_\nu) = f_\nu, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots 2n).$$

$S(\theta)$ ist also in der Tat das Lagrangesche trigonometrische Polynom n-ter Ordnung, das an den $(2n+1)$ äquidistanten Stellen $\theta_0, \theta_1, \dots \theta_{2n}$, $\left(\theta_\nu = \nu\frac{2\pi}{2n+1},\ \nu = 0, 1, \dots 2n\right)$, die Werte f_0, $f_1, \dots f_{2n}$ annimmt.

18. Ich betrachte nun

$$(79)\qquad m(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{n+1}(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta),$$

das *arithmetische Mittel* der Partialsummen $s_0(\theta), s_1(\theta), \dots s_n(\theta)$ der Fourierreihe. Die Koeffizienten seien wieder durch Summen ersetzt, jetzt aber nach $(n+1)$ äquidistanten Stellen

$$(80)\qquad \theta_\nu = \nu\frac{2\pi}{n+1}, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots n).$$

Ich erhalte so das trigonometrische Polynom

$$(81)\qquad M(\theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1\cos\theta + \beta_1\sin\theta + \dots + \alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta,$$

wo

$$(82)\quad \begin{aligned} \alpha_k &= \frac{2((n+1)-k)}{(n+1)^2} \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu \cos k\,\theta_\nu, \\ \beta_k &= \frac{2((n+1)-k)}{(n+1)^2} \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu \sin k\,\theta_\nu \end{aligned} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n),$$

$$\theta_\nu = \nu \frac{2\pi}{n+1}, \quad f(\theta_\nu) = f_\nu. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n).$$

Für $M(\theta)$ kann ich aber auch eine andere Form erhalten, indem ich aus der Formel für das arithmetische Mittel[1]) der Fourierreihe

$$(83)\qquad m(\theta) = \frac{1}{2(n+1)\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left(\frac{\sin (n+1) \frac{t-\theta}{2}}{\sin \frac{t-\theta}{2}} \right)^2 dt$$

ausgehe. Dieses Integral durch eine Summe nach den Stellen θ_0, $\theta_1, \ldots \theta_n$ ersetzt liefert:

$$M(\theta) = \frac{1}{2(n+1)\pi} \cdot \frac{2\pi}{n+1} \cdot \sum_{\nu=0}^{n} f(\theta_\nu) \left(\frac{\sin (n+1) \frac{\theta_\nu - \theta}{2}}{\sin \frac{\theta_\nu - \theta}{2}} \right)^2,$$

oder

$$(84)\qquad M(\theta) = \sum_{\nu=0}^{n} f_\nu \left(\frac{\sin (n+1) \frac{\theta_\nu - \theta}{2}}{(n+1) \sin \frac{\theta_\nu - \theta}{2}} \right)^2.$$

Aus diesem Ausdrucke für $M(\theta)$ ersieht man sofort, daß

$$M(\theta_\nu) = f_\nu, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n).$$

Das trigonometrische Polynom n-ter Ordnung $M(\theta)$ nimmt also an den $(n+1)$ äquidistanten Stellen

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = \frac{2\pi}{n+1}, \quad \theta_2 = 2\frac{2\pi}{n+1}, \quad \ldots \quad \theta_n = n\frac{2\pi}{n+1},$$

der Reihe nach, die Werte

$$f_0, f_1, f_2, \ldots f_n$$

an.

---

1) L. Fejér: Sur les fonctions bornées et intégrables, Comptes-Rendus, 10 décembre, 1900, und Untersuchungen über Fouriersche Reihen, Math. Annalen Bd. 58, 1904.

Die merkwürdige Interpolationsformel (84) hat, auf Grund meiner Formel (83) für das arithmetische Mittel der Fourierreihe und auf dem eben mitgeteilten Wege, Herr Dunham Jackson[1]) aufgestellt. Herr Jackson beweist auch, daß, gerade so wie die arithmetischen Mittel der Fourierreihe von $f(\theta)$

$$m_0(\theta),\ m_1(\theta),\ \ldots\ m_n(\theta),\ \ldots,$$

so auch die Interpolationspolynome von $f(\theta)$

$$M_0(\theta),\ M_1(\theta),\ \ldots\ M_n(\theta),\ \ldots$$

gleichmäßig zu $f(\theta)$ konvergieren, wenn die nach 2π periodische Funktion $f(\theta)$ im Intervalle $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ stetig ist.

19. Das trigonometrische Polynom n-ter Ordnung $M(\theta)$ nimmt, wie wir gesehen haben, an den Stellen $\theta_0, \theta_1, \ldots \theta_n$ die Werte $f_0, f_1, \ldots f_n$ an.

Ein trigonometrisches Polynom n-ter Ordnung ist durch seine Werte für den $(n+1)$ Stellen $\theta_0, \theta_1, \ldots \theta_n$ natürlich nicht bestimmt; es gibt vielmehr eine n-fach unendliche Schaar von trigonometrischen Kurven n-ter Ordnung, die durch die Punkte $(\theta_0, f_0), (\theta_1, f_1), \ldots (\theta_n, f_n)$ der (θ, f)-Ebene gehen. Die Jacksonsche Formel greift nun eine ganz bestimmte trigonometrische Kurve n-ter Ordnung aus dieser n-fach unendlichen Schaar heraus. Wie kann man diese ganz bestimmte Kurve der Schaar *unabhängig von der Formel* (84) *charakterisieren?*

Die Formel (84) *zeigt, daß*

$$\frac{dM(\theta)}{d\theta} = 0, \quad \text{für} \quad \theta = \theta_0, \theta_1, \ldots \theta_n. \tag{85}$$

D. h. $M(\theta)$ ist dasjenige trigonometrische Polynom n-ter Ordnung, welches an den Stellen $\theta_\nu = \nu \frac{2\pi}{n+1}$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$, die Werte $f_0, f_1, f_2, \ldots f_n$ annimmt, und dessen Ableitung an diesen Stellen verschwindet[2]).

---

1) Dunham Jackson: A formula of trigonometric interpolation, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Anno 1914, 1° semestre, Tomo XXXVII, Seite 371, Adunanza del 24 Agosto 1913. — Vgl. auch im Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 22, 1913, Mitteilungen und Nachrichten, Seite 206: Göttinger Mathematische Gesellschaft, Sitzung vom 28. Oktober 1913. Hier hat Herr Georg Pólya freundlichst referiert über meine Untersuchungen bezüglich der Formel (84).

2) Es gibt nur ein einziges trigonometrisches Polynom n-ter Ordnung für diese Daten, dasjenige, welches durch die Formel (84) geliefert wird. Gäbe es

Die Jacksonsche Kurve (84) ist also die durch die Punkte $(\theta_0, f_0), (\theta_1, f_1), \ldots (\theta_n, f_n)$ gehende *„trigonometrische Treppenkurve n-ter Ordnung"*[1]).

Ich bemerke nur noch, daß die Abszissenverteilung

$$(86) \qquad \theta_0, \theta_1, \ldots \theta_n, \qquad \theta_\nu - \theta_{\nu-1} = \frac{2\pi}{n+1}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots n,$$

in gewissen Sinne genau der Gaußschen Verteilung entspricht.

Betrachtet man nämlich die n-fach unendliche Schaar der trigonometrischen Kurven n-ter Ordnung, die durch die Punkte $(\theta_0, f_0), (\theta_1, f_1) \ldots (\theta_n, f_n)$ geht, so haben diese, für das Intervall $(0, 2\pi)$, alle *denselben Flächeninhalt* (der gleich $2\pi \frac{f_0 + f_1 + \ldots + f_n}{n+1}$ ist). Die Abszissenverteilung (86) ist durch diese Eigenschaft charakterisiert.

---

nämlich noch ein zweites $M_1(\theta)$, so müßte $M_1(\theta) - M(\theta)$ für $\theta_0, \theta_1, \ldots \theta_n$ doppelt verschwinden, also $M_1(\theta) - M(\theta) \equiv 0$, $M_1(\theta) \equiv M(\theta)$. — Ich bemerke noch, daß ein solches $M(\theta)$ für den ersten Augenblick sogar als überbestimmt erscheint; und doch an das trigonometrische Polynom n-ter Ordnung $(2n+2)$ Forderungen: $M(\theta_0) = f_0$, $M(\theta_1) = f_1, \ldots M(\theta_n) = f_n$, $M'(\theta_0) = M'(\theta_1) = \ldots = M'(\theta_n) = 0$ gestellt. Sind aber die ersten $(2n+1)$ Forderungen befriedigt, so ist die letzte: $M'(\theta_n) = 0$ von selbst befriedigt, weil für ein beliebiges trigonometrisches Polynom n-ter Ordnung $T(\theta)$ die Relation $T'(\theta_0) + T'(\theta_1) + \cdots + T'(\theta_n) = 0$ besteht.

1) Am Schlusse seiner Arbeit gibt Herr Jackson auch interessante parabolische Interpolationskurven an, die er durch die Substitution $x = \cos\theta$ erhält. Diese Kurven sind, für gerades n, Treppenparabeln, im Sinne dieser Arbeit.