BIZONYOS POLINOMOK MAXIMUMÁNAK ALSÓ KORLÁTJÁRÓL.

Bevezetés.

Ismeretes A. MARKOFF[1] következő tétele:

Legyen $f(z)$ tetszőleges n-edfokú polinom, melyre a $-1 \leqq z \leqq 1$ számközben

$$|f(z)| \leqq 1; \tag{1}$$

akkor ugyanitt

$$|f'(z)| \leqq n^2, \tag{2}$$

s az egyenlőség csak a $z = \pm 1$ helyeken állhat fenn. A szélső értéket szolgáltató polinom $\pm \cos(n \arc \cos z)$.

A fenti tétel más alakban: ha $f(z)$ n-edfokú polinom, akkor

$$\frac{\max\limits_{-1 \leqq z \leqq 1} |f'(z)|}{\max\limits_{-1 \leqq z \leqq 1} |f(z)|} \leqq n^2. \tag{3}$$

Az intervallum belső pontjaiban S. BERNSTEIN[2] becsülte meg a differenciálhányados értékét: *ha a $-1 \leqq z \leqq 1$ számközben* (1) *érvényes, akkor ugyanott:*

$$|f'(z)| \leqq \frac{n}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{4}$$

A fentiekhez hasonlóan kereshetjük a polinomok differenciálhányadosának korlátját, ha az (1) egyenlőtlenség a komplex

---

[1] *Über ein Problem von* D. J. MENDELEJEFF. (Oroszul, német kivonattal.) A szt.-pétervári Akadémia kiadványa. **62** (1889); 1—24.

[2] *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné.* Mém. publ. par la Cl. des Sc. de l'Acad. de Belgique. **4** (1912).

számsík egy tetszőleges ponthalmazára érvényes. Az első eredmény e téren RIESZ M.[3] nevéhez fűződik:

Ha a $|z| \leqq 1$ *kör kerületén* (1) *érvényes, akkor e tartományban*

$$|f'(z)| \leqq n, \tag{5}$$

s az egyenlőség csak az $a.z^n$ *polinomokra áll fenn, hol* $|a|=1$. Vagyis n-edfokú polinomra

$$\frac{\max\limits_{|z|\leqq 1} |f'(z)|}{\max\limits_{|z|\leqq 1} |f(z)|} \leqq n. \tag{6}$$

W. E. SEWELL[4] ellipszisalakú tartományokra általánosította RIESZ tételét: *Ha a* $(-1, 1)$ *és* $(-ai, ai)$ *tengelyű* $(0 \leqq a \leqq 1)$ *ellipszis kerületén* (1) *érvényes, akkor ott*

$$|f'(z)| \leqq \frac{n}{\sqrt{1+a^2-|z|^2}}. \tag{7}$$

SZEGŐ G.[5] korlátos, zárt, JORDAN ívvel határolt M tartományokra terjesztette ki MARKOFF tételét. Szerinte *n-edfokú $f(z)$ polinomokra* (c_1 és c_2 az n-től független állandók, $\delta > 0$ és tetszőleges)

$$\frac{|f'(z_0)|}{\max\limits_{z\varepsilon M} |f(z)|} \leqq c_1(M, z_0).n^{\alpha}, \tag{8}$$

ha z_0 *M-nek határpontja, és M pontjai a* z_0*-ból húzott két olyan félegyenes közé esnek, melyek egymással* $\alpha.\pi$ *szöget zárnak be* $(0 < \alpha \leqq 2)$. *Továbbá*

$$\frac{|f'(z_0)|}{\max\limits_{z\varepsilon M} |f(z)|} \leqq c_2(M, z_0, \delta).(1+\delta)^n, \tag{9}$$

---

[3] *Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome.* Jahresber. d. deutschen Math. Vereinigung. **23** (1914); 354—368.

[4] *On the polynomial derivate constant for an ellipse.* Amer. Math. Monthly. **44** (1937); 577—578.

[5] *Über einen Satz von* A. MARKOFF. Math. Zeitschrift. **23** (1925); 45—61.

ahol z_0 a sík tetszőleges pontja. Szegő tétele nagyságrendileg pontos.

Fekete M.[6] kimutatta, hogy azoknak a polinomoknak a gyökei, melyek miatt (9) nem javítható, az M halmazon fekszenek. Turán Pál felvetette azt a kérdést, hogy fordítva mit lehet kimondani azoknak az n-edfokú $f(z)$ polinomoknak a differenciálhányadosáról, melyeknek gyökei az M halmazon fekszenek, s amelyek az M halmaz egy pontjában az 1 értéket felveszik. Ezt a feltételt kielégítő polinomosztályt $E(M)$-mel jelöljük. A kérdés így is megfogalmazható: *létezik-e $E(M)$ polinomjait tekintve*

$$\frac{\max\limits_{z\varepsilon M}|f'(z)|}{\max\limits_{z\varepsilon M}|f(z)|}$$

számára alsó korlát?

Turán bebizonyította, hogy ha M_1 a $(-1, +1)$ intervallum, akkor $E(M_1)$ minden n-edfokú $f(z)$ polinomjára van M_1-ben olyan ζ pont, melyben

$$|f'(\zeta)| \geqq \tfrac{1}{6}\sqrt{n}, \tag{10}$$

és ha M_2 halmaz az egységkör, akkor $E(M_2)$ minden $f(z)$ polinomjára van olyan $\zeta\varepsilon M_2$ pont, hogy

$$|f'(\zeta)| \geqq \frac{n}{2}, \tag{11}$$

mely utóbbi nem javítható. Azaz

$$\frac{\max\limits_{-1\leqq z\leqq 1}|f'(z)|}{\max\limits_{-1\leqq z\leqq 1}|f(z)|} \geqq \frac{1}{6}\sqrt{n}, \tag{12}$$

ha $f(z)\varepsilon E(M_1)$, és

$$\frac{\max\limits_{|z|\leqq 1}|f'(z)|}{\max\limits_{|z|\leqq 1}|f(z)|} \geqq \frac{n}{2}, \tag{13}$$

ha $f(z)\varepsilon E(M_2)$.

---

[6] *Über den absoluten Betrag von Polynomen, welche auf einer Punktmenge gleichmässig beschränkt sind.* Math. Zeitschrift. **26** (1927); 324—344.

Az 1. §-ban TURÁN (10) alatti eredményét és annak szigorítását találjuk. Bebizonyitjuk, hogy *van olyan*

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$$

zérus-sorozat, hogy $f(z) \varepsilon E(M_1)$ *esetén bizonyos* $-1 \leqq \zeta \leqq 1$ *pontban*

$$|f'(\zeta)| \geqq \sqrt{\frac{n}{e+\varepsilon_n}}. \tag{14}$$

(14) nem javitható.

A 2. §-ban (10) és (11) általánosítását tárgyaljuk. *Legyen* M_3 *tartomány a* SEWELL *tételében szereplő ellipszis. Ha* $f(z) \varepsilon E(M_3)$, *akkor van olyan* $\zeta \varepsilon M_3$, *hogy*

$$|f'(\zeta)| \geqq \max\left(\frac{n.a}{2}, \frac{1}{7}\sqrt{n}\right). \tag{15}$$

A 3. §-ban megvizsgáljuk, hogy a 2. § módszereivel mely tartományokra találhatjuk meg TURÁN problémájának megoldását.

Végül a 4. §-ban az 1. § tételének alkalmazását találjuk ERDŐS PÁL egy problémájával kapcsolatban. Legyen $f(z) \varepsilon E(M_1)$ és legyen $f(z)$ két gyöke közt alulról nézve mindenütt konvex (vagy konkáv), és ez a két gyök α és β. Akkor

$$|\alpha-\beta| \leqq \frac{c_n}{\sqrt{n}}, \tag{16}$$

hol ERDŐS *és* TURÁN *bizonyítása szerint*

$$c_n \leqq 16, \tag{17}$$

míg az itt talált pontos érték szerint

$$\lim_{n=\infty} c_n = \sqrt{2}. \tag{18}$$

1. §.

a) TURÁN PÁL bebizonyította a következő tételt: *Ha az n-edfokú* $f(z)$ *polinom összes gyökei a* $(-1, 1)$ *számközben fekszenek és ennek az intervallumnak valamely* a *pontjában*

$$|f(a)| = 1, \tag{19}$$

akkor van olyan $-1 \leqq \zeta \leqq 1$ *pont, ahol*

$$|f'(\zeta)| \geqq \frac{1}{6}\sqrt{n}. \tag{20}$$

Legyenek u. i. az $f(z)$ polinom gyökei $z_1, z_2, \ldots, z_n$, és

$$-1 \leqq z_1 \leqq z_2 \leqq \cdots \leqq z_n \leqq 1. \tag{21}$$

Valós z értékek mellett feltehetjük, hogy $f(z)$ és deriváltjai valósak.

Legyen először $a < z_1$, vagy $a > z_n$, azaz legyen $a - z_i$ előjele minden i-re ugyanaz. Akkor

$$\begin{aligned} |f'(a)| = |f(a)| \cdot \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a-z_i} \right| = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|a-z_i|} \geqq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} = \\ = \frac{n}{2} > \frac{\sqrt{n}}{6}. \end{aligned} \tag{22}$$

Legyen másodszor

$$z_i < a < z_{i+1}. \tag{23}$$

A (z_i, z_{i+1}) számközben legyen $|f(z)|$ maximumának helye a, akkor $|f(a)| \geqq 1$, s így vele osztva a differenciálhányados abszolút értéke mindenütt kisebbedik. Feltehetjük tehát, hogy a (z_i, z_{i+1}) számközben

$$|f(z)| \leqq 1. \tag{24}$$

Feltehetjük azt is, hogy az $\left(a - \frac{2}{\sqrt{n}}, a\right)$ számközben

$$|f(z)| \geqq \frac{2}{3}, \tag{25}$$

különben ez intervallum egy β pontjában

$$|f'(\beta)| = \frac{|f(a) - f(z)|}{|a-z|} \geqq \frac{1 - \frac{2}{3}}{\frac{2}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{6}\sqrt{n}. \tag{26}$$

(23) és (25) alapján látjuk, hogy $z_i < a - \frac{2}{\sqrt{n}} < a < z_{i+1}$.

Feltehetjük, hogy az $\left(a-\frac{2}{\sqrt{n}}, a\right)$ számköz ζ pontjában

$$|f''(\zeta)| \leqq \frac{1}{12} n, \tag{27}$$

különben $|f''(z)|$ e közben állandó előjelű, a maximumhely, tehát

$$f'(a) = 0 \tag{28}$$

és

$$\begin{aligned} \left|f'\left(a-\frac{2}{\sqrt{n}}\right)\right| &= \left|\int_{a-\frac{2}{\sqrt{n}}}^{a} f''(z)dz\right| = \int_{a-\frac{2}{\sqrt{n}}}^{a} \left|f''(z)\right| dz \geqq \\ &\geqq \frac{1}{12} \cdot n \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{1}{6}\sqrt{n}. \end{aligned} \tag{29}$$

Ismeretes, hogy

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-z_i}.$$

Ezt z szerint differenciáljuk a $z=\zeta$ helyen, ahol ζ-t (27) definiálja:

$$\frac{|f(\zeta)f''(\zeta)-f'(\zeta)^2|}{f(\zeta)^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\zeta-z_i)^2} \geqq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^2} = \frac{n}{4}. \tag{30}$$

(30)-ból (25), (24) és (27) alapján:

$$f'(\zeta)^2 \geqq \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{n}{4} - 1\frac{n}{12} = \frac{n}{36},$$

$$|f'(\zeta)| \geqq \frac{1}{6}. \tag{31}$$

Hasonlóan kimutathatjuk, hogy van olyan $a < \eta \leqq a + \frac{2}{\sqrt{n}}$ pont, melyre $|f'(\eta)| \geqq \frac{1}{6}\sqrt{n}$.

Turán bizonyítását befejeztük. Eredményét a 4. §-ban a következő fogalmazásban használjuk fel: *Essenek az n-edfokú $f(z)$ polinom gyökei a $(-1, +1)$ számközbe és legyen $f'(a)=0$. Akkor vannak olyan ζ és η pontok, hogy*

$$a-\frac{2}{\sqrt{n}} \leqq \zeta < a < \eta \leqq a+\frac{2}{\sqrt{n}};$$

$$\left|f'(\zeta)\right| \geqq \frac{1}{6}\sqrt{n}.\left|f(a)\right| \quad \text{és} \quad \left|f'(\eta)\right| \geqq \frac{1}{6}\sqrt{n}.\left|f(a)\right|.$$

b) TURÁN tétele nagyságrendileg pontos, de a következőkép javitható:

I. tétel. *Essenek az n-edfokú $f(z)$ polinom gyökei a $(-1, +1)$ számközbe és legyen egy $-1 \leqq a \leqq +1$ pontban $|f(a)| = 1$. Akkor létezik olyan $-1 \leqq \zeta \leqq +1$ pont, hogy*

$n = 2, 3$ esetén:

$$|f'(\zeta)| \geqq \frac{n}{2}, \tag{32 a}$$

páros $n \geqq 4$ esetén ($n = 4, 6, 8,\ldots$):

$$|f'(\zeta)| \geqq \frac{n}{\sqrt{n-1}}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n-2}{2}} = \sqrt{\frac{n}{e}} + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{32 b}$$

páratlan $n \geqq 5$ esetén ($n = 5, 7, 9,\ldots$):

$$|f'(\zeta)| \geqq \frac{n^2}{(n-1)\sqrt{n+1}}\left(1-\frac{\sqrt{n+1}}{n-1}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^{\frac{n-1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{n}{e}} + O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{32 c}$$

Tételünk nem javítható.

Bizonyitás. Keressük azt a polinomot, mely a tétel feltételeinek megfelel és differenciálhányadosának maximuma a $(-1, +1)$ számközben a lehető legkisebb. Legyen egy tetszőleges n-edfokú polinom, mely a teltételeknek megfelel, $f(z)$. Legyen

$$H_n = \max_{-1 \leqq z \leqq 1} |f'(z)|. \tag{33}$$

Keressük

$$h_n = \min_{f} H_n \tag{34}$$

értékét. Tételünket nyilván igazoltuk, ha bebizonyitjuk, hogy h_n a (32 *a*, *b*, *c*) alatt adott értékekkel egyenlő.

Vizsgáljuk meg, hogy H_n minek a függvénye! Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$f(a) = 1. \tag{35}$$

Legyenek $f(z) = 0$ egyenlet gyökei $z_1, z_2, \ldots, z_n$, ahol

$$-1 \leqq z_1 \leqq z_2 \leqq \cdots \leqq z_n \leqq +1. \tag{36}$$

A polinom alakja tehát

$$f(z) = \frac{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)}{(a-z_1)(a-z_2)\ldots(a-z_n)}. \tag{37}$$

Keressük tehát

$$h_n = \min H_n(a;\, z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

értékét, hol H_n-t (33) határozza meg. A minimum létezése WEIERSTRASS tételéből következik.

Először be fogjuk bizonyítani, hogy H_n kisebbíthető, kivéve azokat az eseteket, mikor mindegyik gyök abszolút értéke 1, azaz a h_n minimumot szolgáltató polinom esetén

$$|z_i| = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{38}$$

Azután a megmaradt véges számú polinom közül kiválasztjuk azt, amelyik a minimumot szolgáltatja.

Feltehetjük, hogy $|f(a)|$ az $|f(z)|$ maximuma a $(-1, 1)$ számközben, különben ezzel osztva H_n értéke kisebbedik. TURÁN bizonyításához hasonlóan különválasztjuk az $|a| = 1$ és $|a| \neq 1$ esetet.

Legyen először $|a| = 1$. Ekkor (22) alapján $|f'(a)| \geqq \frac{n}{2}$. Viszont az $\left(\frac{1+z}{2}\right)^n$ polinom a feltételeket kielégíti és erre H_n értéke $\frac{n}{2}$. Ezt az esetet tehát képviselheti a fenti polinom, mely (38)-nak is megfelel.

Azzal az esettel kell tehát foglalkoznunk, amikor létezik olyan $i \geqq 2$, melyre

$$z_{i-1} < a < z_i.$$

Az $|f(a)|$ abszolút maximum ilyenkor helyi maximum is, tehát

$$f'(a) = 0. \tag{39}$$

TURÁN tételének a bizonyitásánál láttuk, hogy $|f'(z)|$ az a hely környezetében nagy értéket vesz fel, mig az a helyen (39) szerint értéke zérus. Tehát a-tól jobbra és balra $|f'(z)|$ a $(-1, 1)$ intervallumban bizonyos maximumig növekszik. Legyen a-tól pl. balra ζ ennek a maximumnak a helye $(-1 \leqq \zeta < 1)$. Változtassuk meg az $f(z)$ polinomot $f_1(z)$-re úgy, hogy valamelyik belső z_k gyök helyett z'_k-t, a helyett a'-t irunk és $f_1(a')$-vel osztunk. Itt a' az $|f_1(z)|$ maximumának helye a (z_{i-1}, z_i) számközben, s ezáltal egyértelműen meg van határozva. U. i. (39) fennáll: $f'_1(a') = 0$ s ROLLE tételével egyszerűen beláthatjuk, hogy ha a polinom gyökei valósak, bármely két gyöke közt a differenciálhányados egyszer és csak egyszer tűnik el. Legyen $|f'_1(z)|$-nek az a' helytől balra eső első maximuma a $(-1, 1)$ közben $|f'_1(\zeta')|$. Be fogjuk bizonyitani, hogy, amennyiben egyáltalán van $f(z)$-nek belső gyöke, létezik olyan k, melyre

$$|f'_1(\zeta')| < |f'(\zeta)|, \text{ ha } |z'_k - a| > |z_k - a|, \tag{40}$$

azaz, ha z_k az a helytől távolodik. Tegyük fel egy pillanatra, hogy (40) már igazolva van. Távolítsuk el az a helytől balra és jobbra a lehető legmesszebb az összes gyököket, azaz vigyük a -1 és $+1$ pontokba, miáltal az $f_m(z)$ polinomot kapjuk. Ez a (38) alatti tulajdonsággal és a tétel feltételeivel rendelkezik és (40) alapján

$$|f'_m(\zeta^{(m)})| < |f'(\zeta)|. \tag{41}$$

$|f'_m(\zeta^{(m)})|$ pedig $|f'_m(z)|$ maximuma a $(-1, a^{(m)})$ számközben, amit könnyű belátni. Ha a balra szó helyett jobbra szót irunk, a fenti gondolatmenet érvényben marad, ismét $f_m(z)$ polinomhoz jutunk, de most az $(a^{(m)}, 1)$ számköz fog szerepelni. Így $|f'_m(z)|$ maximuma a $(-1, 1)$ számközben kisebb $|f'(z)|$ maximumánál, (40)-nel tehát (38)-at is igazoljuk. (40)-et pedig bebizonyitottuk, ha megmutatjuk, hogy amennyiben van belső gyök, akkor van köztük olyan, melyre

$$\frac{d|f'(\zeta)|}{dz_k} \begin{cases} > 0 & \text{ha } z_k < a \\ < 0 & \text{ha } z_k > a \end{cases} \tag{42}$$

egyenlőtlenség érvényes. E célból kiszámítjuk a $\frac{d\,|f'(\zeta)|}{dz}$ értéket, mely létezik, mert $f'(\zeta) \neq 0$. Ha a polinom z_k gyökét megváltoztatom, az a és a ζ pont helye is változik, tehát

$$\frac{d\,|f'(\zeta)|}{dz_k} = \frac{\partial\,|f'(\zeta)|}{\partial z_k} + \frac{\partial\,|f'(\zeta)|}{\partial a} \cdot \frac{da}{dz_k} + \frac{\partial f'(\zeta)}{\partial \zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz_k}. \tag{43}$$

A két utolsó tagról kimutatjuk, hogy zérus. $\frac{da}{dz_k}$ véges érték, mert a polinom gyökével deriváltjának a gyöke differenciálhatóan változik. Továbbá

$$f'(\zeta) = \frac{(\zeta-z_1)(\zeta-z_2)\ldots(\zeta-z_n)}{(a-z_1)(a-z_2)\ldots(a-z_n)} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\zeta-z_i}, \tag{44}$$

és így

$$\left|\frac{\partial\,|f'(\zeta)|}{\partial a}\right| = |f'(\zeta)| \cdot |f'(a)| = 0 \tag{45}$$

a (39) egyenlet felhasználásával.

Ha $-1 < \zeta < 1$, $|f'(\zeta)|$ helyi maximum, tehát

$$f''(\zeta) = 0. \tag{46}$$

$\frac{d\zeta}{dz_k}$ a fentiekhez hasonlóan létezik és

$$\left|\frac{\partial\,|f'(\zeta)|}{\partial \zeta}\right| = |f''(\zeta)| = 0. \tag{47}$$

Ha $|\zeta| = 1$, akkor $d\zeta = 0$ $f''(z)$ gyökeinek azonos elrendeződése folytán, amit könnyű igazolni. Ha pedig $d\zeta = 0$, akkor (43)-ban az utolsó tag nem szerepel.

Hátra van $\frac{\partial\,|f'(\zeta)|}{\partial z_k}$ kiszámítása. Tekintve, hogy $f'(\zeta) \neq 0$ esetén

$$\frac{1}{|f'(\zeta)|} \cdot \frac{\partial\,|f'(\zeta)|}{\partial z_k} = \frac{1}{f'(\zeta)} \cdot \frac{\partial f'(\zeta)}{\partial z_k},$$

tehát

$$\frac{d\,|f'(\zeta)|}{dz_k} = \frac{\partial\,|f'(\zeta)|}{\partial z_k} =$$

$$= |f'(\zeta)| \left[\frac{1}{a-z_k} - \frac{1}{\zeta-z_k} + \frac{f'(\zeta)}{(\zeta-z_k)^2 f'(\zeta)}\right]. \tag{48}$$

Ezeknek a számításoknak a birtokában (42)-t röviden igazolhatjuk. Legyen

$$h(z_k)=\frac{1}{a-z_k}-\frac{1}{\zeta-z_k}+\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_k)^2f'(\zeta)}. \tag{49}$$

Erről kell kimutatnunk, hogy megfelelő előjelű. Legyen $z_k < a$.

Ha a (49) alatti kifejezést z_k függvényeként fogjuk fel, látjuk, hogy a $z_k=a$ helyen előjelet vált, mert ott az $\frac{1}{a-z_k}$ tag dominál. Kérdés, hogy hol vált még $h(z_k)$ előjelet? Rövid átalakítással

$$h(z_k)=\frac{1}{(\zeta-z_k)^2}\left(\frac{f(\zeta)}{f'(\zeta)}+(\zeta-a)\frac{\zeta-z_k}{a-z_k}\right). \tag{50}$$

Innen látjuk, hogy $h(z_k)$ az a helyen kívül csak egy pontban, az x_0-sal jelzett pontban változtat előjelet. Ha $x_0>a$, $h(z_k)$ nem változtat előjelet a $(-1, a)$ közben, tehát mindenütt pozitív, mert az a pont közelében az intervallum szélén pozitív. Ilyenkor az összes $z_i<a$ gyökre igaz (40). Ha pedig $x_0<a$, akkor minden az (x_0, a) intervallumba eső gyök megfelel (40)-nek. Az összes többi gyökre $h(z_k)<0$. Ha tehát az (x_0, a) közbe nem esne gyöke $f(z)$-nek, akkor minden k-ra $h(z_k)<0$ lenne, tehát

$$0<\sum_{k=1}^{n}h(z_k)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a-z_k}-\frac{1}{\zeta-z_k}+\frac{f(\zeta)}{f'(\zeta)}\cdot\frac{1}{(\zeta-z_k)^2}\right)=$$

$$=\frac{f'(a)}{f(a)}-\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}+\frac{f(\zeta)}{f'(\zeta)}\cdot\frac{f'(\zeta)^2-f(\zeta)f''(\zeta)}{f(\zeta)^2}=0,$$

ha $|\zeta|\neq 1$, (39) és (43) alapján. Ez ellenmondás. $|\zeta|\neq 1$ esetén tehát van olyan gyök, mely a-nál kisebb és (40)-nek megfelel. Ha $|\zeta|=1$, lineáris helyettesítéssel elérhetjük, hogy $z_1=-1$, $z_n=+1$ legyen, s közben a differenciálhányados kisebbedik. Feltehetjük tehát, hogy ilyenkor $f(\zeta)=0$, viszont $f'(\zeta)\neq 0$, tehát azt kell igazolnunk, hogy $a>z_k$ esetén:

$$\frac{1}{a-z_k}-\frac{1}{\zeta-z_k}>0,$$

ami $\zeta = -1 < z_k$ esetén evidens, $\zeta = +1$ esetén könnyen igazolható, mert $a - z_k < 1 - z_k$.

$z_k > a$ esetén a bizonyítás analog. Ilyenkor azt kell igazolnunk, hogy van olyan $1 > z_k > a$, melyre $h(z_k) < 0$.

(40)-et és vele (38)-at tehát igazoltuk. Azok a polinomok tehát, amelyek h_n értéket szolgáltathatják, (38), (37) és (39) alapján:

$$f_k(z) = \frac{n^n}{2^n k^k (n-k)^{n-k}} (1-z)^k (1+z)^{n-k}. \qquad (51)$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\dots,\ n)$$

Az $f_k(z)$ és $f_{n-k}(z)$ polinomok egymás tükörképei, elégséges, tehát a $k \leqq \frac{n}{2}$ esetekkel foglalkoznunk. Jelöljük az (51)-ből (33) alapján adódó értéket $H_n(k)$-val, akkor $H_n(0) = \frac{n}{2}$, s $H_n(1) \geqq \geqq \frac{n}{2}$, tehát $n = 2, 3$ esetén $h_n = \frac{n}{2}$, ami éppen (32 a).

$k \geqq 2$ esetén $|f_k'(z)|$ két maximumot vesz fel a $(-1, 1)$ számközben, jelöljük ezeket $H_n'(k)$ és $H_n''(k)$-val. De $H_n'(k) = H_n''(n-k)$ és

$$H_n'(k) =$$
$$= \frac{n^2}{2\sqrt{(n-1)k(n-k)}} \left(1 - \sqrt{\frac{n-k}{k(n-1)}}\right)^{k-1} \left(1 + \sqrt{\frac{k}{(n-k)(n-1)}}\right)^{n-k-1}.$$

Páros n esetén eljárásunk a következő: nyilván

$$H_n(k) \geqq \sqrt{H_n'(k) H_n''(k)} =$$
$$= \frac{n}{2} \sqrt{\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{1}{k(n-k)} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n-k}\right)^{n-k-1}}.$$

De

$$\frac{1}{k(n-k)} \geqq \frac{4}{n^2},$$

és ha vizsgáljuk a $g(k) = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n-k}\right)^{n-k-1}$ függvényt a $\left(2, \frac{n}{2}\right)$ intervallumban, ott $g'(k) < 0$, tehát

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{1}{n-k}\right)^{n-k-1} \geqq \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-2}.$$

Vagyis

$$H_n(k) \geqq \sqrt{\frac{n^n(n-2)^{n-2}}{(n-1)^{n-1}n^{n-2}}} = \frac{n}{\sqrt{n-1}}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n-2}{2}} =$$
$$= H_n\left(\frac{n}{2}\right).$$

(32 *b*) tehát be van bizonyitva, ha $n \geqq 4$ esetén

$$H_n(0) \geqq H_n\left(\frac{n}{2}\right),$$

vagyis ha

$$\frac{n}{2} \geqq \frac{n}{\sqrt{n-1}}\left(1-\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n-2}{2}},$$

ami igaz.

(32 *c*) igazolása hasonlóan, de jóval bonyolultabb számítás alapján történhet. Be lehet bizonyitani, hogy $\frac{dH_n'(k)}{dk} < 0$, ha $k \geqq 2$, és hogy $H_n'\left(\frac{n-1}{2}\right) > H_n''\left(\frac{n-1}{2}\right)$. Ezek igazolása nem szükséges, így az I. tétel bizonyítását befejeztük.

2. §.

a) Tekintsük a komplex számsík azon ellipszisét, melynek nagytengelye a $(-1, +1)$, kistengelye a $(-ai, ai)$ intervallum $(0 \leqq a \leqq 1)$. Legyen ezen ellipszis belső és határpontjainak összessége: $\mathcal{E}$ és kerületének egy pontja z_0. Akkor érvényes a következő

II. tétel. *Ha $f(z)$ n-edfokú polinom gyökei $\mathcal{E}$ zárt tartományba esnek, akkor*

$$|f'(z_0)| \geqq \frac{n.a}{2\sqrt{1+a^2-|z_0|^2}}|f(z_0)| \geqq \frac{n.a}{2}|f(z_0)|. \tag{52}$$

A bizonyításban az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$f(z_0) = 1.$$

Két bizonyítást is adunk.

Vizsgáljuk a

$$z(\zeta) = e^{i\varphi}\left(\frac{1+a}{2}\zeta + \frac{1-a}{2}\cdot\frac{1}{\zeta}\right) \tag{53}$$

függvényt. Ez a $|\zeta|=1$ egységkört $\mathcal{E}$ kerületére képezi le és ott

$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|=\sqrt{1+a^2-|z|^2}, \tag{54}$$

amiket egyszerű számítással igazolhatunk. A $g(\zeta)=f(z(\zeta))$ függvényt fogjuk az egységkörön vizsgálni. (52) és (54) alapján azt kell bebizonyítanunk, hogy

$$|g'(\zeta_0)|\geqq\frac{n.a}{2},$$

hol ζ_0 az egységkörön a z_0-nak megfelelő pont. (53)-ban válaszszuk meg φ-t úgy, hogy $\zeta_0=1$ legyen. (53) alapján

$$g(\zeta)=\frac{c_{-n}}{\zeta^n}+\cdots+\frac{c_{-1}}{\zeta}+c_0+c_1\zeta+\cdots+c_n\zeta^n,$$

tehát $g(\zeta)\zeta^n$ egy $2n$-edfokú polinom. Gyökei páronként adódnak a

$$z_k=e^{i\varphi}\left(\frac{1+a}{2}\zeta+\frac{1-a}{2}\cdot\frac{1}{\zeta}\right) \tag{55}$$
$$(k=1,2,\ldots,n)$$

másodfokú egyenletből, hol z_k az $f(z)=0$ egyenlet gyöke. Jelöljük $f(\zeta)=0$ gyökeit páronként ζ_k' és ζ_k''-val, akkor

$$\zeta_k'+\zeta_k''=\frac{2z_k}{e^{i\varphi}(1+a)};\quad \zeta_k'\zeta_k''=\frac{1-a}{1+a}, \tag{56}$$

tehát

$$(g(\zeta)\zeta^n)'_{\zeta=1}=g'(1)+n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1-\zeta_k'}+\frac{1}{1-\zeta_k''}\right)=$$
$$=n+a\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1-e^{-i\varphi}z_k},$$

vagyis

$$|g'(1)|\geqq a\cdot\sum_{k=1}^{n}R\left(\frac{1}{1-e^{-i\varphi}z_k}\right)\geqq a\cdot\frac{n}{2},\text{[7]}$$

mert $z_k\varepsilon\mathcal{E}$, és igy $|z_k|\leq 1$, $R\left(\dfrac{1}{1-e^{-i\varphi}z_k}\right)\geqq\dfrac{1}{2}$.

---

[7] $R(z)$ jelenti z valós részét.

Ezzel a II. tétel igazolását befejeztük. $a=1$, vagyis kör esetén TURÁN (10) alatti eredménye következik tételünkből. TURÁN bizonyítása inkább a következő második bizonyításhoz hasonlít.

b) $f(z_0)=1$ esetén:

$$\left|f'(z_0)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_0-z_k}\right| \geqq \frac{n.a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+a^2-|z_0|^2}},$$

ha megfelelően választott φ mellett $k=1,2,\ldots,n$-re:

$$R\left(\frac{e^{i\varphi}}{z_0-z_k}\right) \geqq \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+a^2-|z_0|^2}}\cdot \tag{57}$$

Legyen φ a z_0 pontban $\mathcal{E}$-hez húzott normális és a valós tengely pozitív iránya által bezárt szög. Ez esetben (57) baloldala nem negatív, tehát kisebbedik, ha z_k a z_k-z_0 vektor irányában mozog, elégséges tehát arra az esetre szorítkoznunk, amikor z_k az $\mathcal{E}$ kerületére esik. Így feltehetjük, hogy

$$z_0=\cos\alpha+ia\sin\alpha,\quad z_k=\cos\beta+ia\sin\beta. \tag{58}$$

Az ellipszis paraméteres előállításából viszont következik, hogy a z_0 pontban húzott normális iránytangense:

$$tg\varphi=\frac{tg\alpha}{a}\cdot \tag{59}$$

Így $R\left(\frac{a+ib}{c+id}\right)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$ alapján (58) és (59)-cel:

$$R\left(\frac{e^{i\varphi}}{z_0-z_k}\right)=\frac{\cos\varphi(\cos\alpha-\cos\beta)+a\sin\varphi(\sin\alpha-\sin\beta)}{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+a^2(\sin\alpha-\sin\beta)^2}=$$

$$=\frac{\cos\varphi}{2\cos\alpha\left(a^2+(1-a^2)\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\geqq\frac{\cos\varphi}{2\cos\alpha}\cdot$$

Viszont (59) alapján $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+tg^2\alpha}}$, tehát

$$R\left(\frac{e^{i\varphi}}{z_0-z_k}\right)\geqq\frac{a}{2\sqrt{a^2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}=\frac{a}{2\sqrt{1+a^2-|z_0|^2}},$$

s ez éppen (57).

c) Végezetül be fogjuk bizonyitani, hogy a II. tétel $a \geqq \frac{2}{7\sqrt{n}}$ esetekben nagyságrendileg pontos. Ha $a \leqq \frac{2}{7\sqrt{n}}$, az 1. § bizonyitásaihoz hasonlóan kimutathatjuk, hogy, ha $f(z) \varepsilon E(\mathcal{E})$,

$$\frac{\max\limits_{z\varepsilon\mathcal{E}} |f'(z)|}{\max\limits_{z\varepsilon\mathcal{E}} |f(z)|} \geqq \frac{1}{7}\sqrt{n},$$

s ez nagyságrendileg szintén pontos. Ezt tartalmazza a III. tétel:

III. tétel. *Ha $f(z)$ n-edfokú polinom gyökei $\mathcal{E}$ belsejébe esnek és $\mathcal{E}$ egy z_0 pontjában $|f(z_0)| = 1$, akkor $\mathcal{E}$ kerületén van egy olyan ζ pont, hogy*

$$|f'(\zeta)| \geqq \max\left(\frac{n.a}{2}, \frac{1}{7}\sqrt{n}\right) \geqq \frac{n.a}{4} + \frac{1}{14}\sqrt{n}; \tag{60}$$

viszont van olyan $f_1(z)$ polinom, melyre a fenti feltételek teljesülnek és $\mathcal{E}$ pontjaira

$$|f'(z)| \leqq \frac{3}{\sqrt{(1+a^2)^3}}(na + \sqrt{n}), \tag{61}$$

ami a (60) *alatt adott érték 42-szeresénél kisebb.*

(60) bizonyitása az előzők alapján történhet, felhasználva azt, hogy reguláris függvény a komplex tartomány szélén veszi fel abszolút értékének maximumát. z_0-ról tehát feltehetjük, hogy $\mathcal{E}$ kerületére esik.

(61) igazolásánál is elégséges $|f'(z)|$-ét $\mathcal{E}$ kerületén vizsgálni. Legyen először $n=2m$ páros és $m \geqq 2$. Ha $n=2$, 3, akkor $\left(\frac{1+z}{2}\right)^n$ is megfelel. Legyen

$$f_1(z) = \frac{(1-z^2)^m}{(1+a^2)^m}, \tag{62}$$

mely a feltételeket kielégiti. $\mathcal{E}$ kerületén

$$|f_1'(z)| < \frac{na}{1+a^2} + \sqrt{\frac{2}{e}}\,\frac{\sqrt{n}}{1+a^2} < \frac{na}{1+a^2} + \frac{\sqrt{n}}{1+a^2}, \tag{63}$$

ami (61)-nél többet mond ki.

Páratlan $n=2m+1$ esetén pedig legyen

$$f_2(z)=\frac{(1-z^2)^m(1+z)}{(1+a^2)^m\sqrt{1+a^2}}= \\ =\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\left(\frac{(1-z^2)^m}{(1+a^2)^m}+\frac{z(1-z^2)^m}{(1+a^2)^m}\right). \tag{64}$$

Ilyenkor

$$|f_2'(z)|<\frac{3}{\sqrt{(1+a^2)^3}}(na+\sqrt{n}).$$

3. §.

Megvizsgáljuk TURÁN problémájával kapcsolatban azt a kérdést, hogy a 2. § *b)*-ben használt módszert milyen M tartományokra alkalmazhatjuk.

Vizsgáljuk meg e célból, hogy mi a 2. § *b)*-nek a gondolatmenete. Legyen adva valamely tetszőleges zárt M tartomány és egy n-edfokú $f(z)$ polinom, melynek gyökei az M tartományba esnek és ennek bizonyos z_0 kerületi pontjában legyen $|f(z_0)|=1$. Akkor

$$\left|f'(z_0)\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i-z_0}\right|.$$

Az $\frac{1}{z_i-z_0}$ komplex számokat vektoroknak is tekinthetjük. A 2. §. *b)* leglényegesebb gondolata, hogy van egy olyan irány, hogy a fenti vektoroknak ebbe az irányba eső vetületei egyirányúak és egy c_1 pozitiv állandónál nagyobbak. Ha ezt igazoljuk, bebizonyítottuk, hogy

$$|f'(z_0)|\geqq c_1.n, \tag{65}$$

hol $c_1>0$ csak az M tartománytól függ.

Ahhoz, hogy a fenti értelmű irány M minden kerületi pontjában létezzék, szükséges, hogy M konvex tartomány vagy konvex görbe legyen. Ez az irány a z_0 pontban húzott normális vagy csúcs esetén bármely a csúcson és a tartományon áthaladó egyenes. Ha ezzel az iránnyal $z_0 - z$ az α szöget zárja be, $\frac{1}{z-z_0}$ vetülete $\frac{\cos\alpha}{|z-z_0|}$. Keressük tehát z_0 kerületi pontokra

$$\min_{z_0,\, z \varepsilon M} \frac{\cos\alpha}{|z-z_0|} = c_2$$

értéket. Azt kell igazolnunk, hogy $c_2 > 0$. Konvex tartományokra $c_2 \geqq 0$. A $c_2 = 0$ esetben $\cos\alpha = 0$, azaz z a z_0 pontban húzott érintő egy pontja. Tegyük fel, hogy M határvonala sehol sem egyenes, akkor $\cos\alpha = 0$ esetén $z \to z_0$ az M határgörbéjén. Ha ϱ a z_0 pontbeli görbületi kör sugara, ϱ értelmezése alapján $\frac{|z_0 - z|}{\frac{\pi}{2} - \alpha} \to \varrho$, tehát $\frac{\cos\alpha}{|z_0 - z|} \to \frac{1}{\varrho}$. Ha tehát M konvex tartomány határgörbéjén a csúcsoktól eltekintve a görbületi sugár létezik és korlátos, érvényes rá (65).

A fenti feltételeket szűkíthetjük. Tegyük fel, hogy M konvex tartományra (65) nem érvényes, azaz van $E(M)$-nek n-edfokú polinomja, melyre $z \varepsilon M$ esetén

$$|f'(z)| \leqq c.n,$$

hol $c > 0$ tetszőleges, $n > N(c)$.

Tegyük fel, hogy M tartományban $|f(z)|$ maximumát a z_0 pontban veszi fel. Ha z_0 pontban a görbületi sugár létezik, és véges, vagy a z_0 pont olyan csúcs, hogy az érintők hajlásszögének különbsége π-nél kisebb, akkor az előzők szerint van olyan n-től független c' szám, hogy

$$|f'(z_0)| \geqq c'.n.$$

Legyen z_0 pontban M határa egyenes és

$$f(z) = a \prod_{i=1}^{n} (z - z_i),$$

akkor $|f(z_0)|$ maximum volta miatt $z \varepsilon M$-re:

$$\prod_{i=1}^{n} |z_0 - z_i| \geqq \prod_{i=1}^{n} |z - z_i|. \qquad (66)$$

Az M tartományról feltételezzük, hogy van olyan z pontja, melyre $|z-z_0|>1$, viszont minden z pontjára $|z-z_0|<1+$ $+\delta_1$, hol $\delta_1>0$-ról később diszponálunk. Ezt az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, mert ha egy tartományra (65) érvényes, akkor ez megfelelően változtatott c-vel a hozzá hasonlókra is igaz, amit lineáris transzformációval igazolhatunk.

Legyen a nagyobb, mint a z_0 pontban M-et határoló egyenesdarab hossza. Ha (65) M-re nem érvényes, akkor legalább $\frac{n}{\delta_2}$ gyök a $|z_0-z|\leqq a$ kör belsejébe esik, különben $n\left(1-\frac{1}{\delta_2}\right)$ gyökre a fentebb tárgyalt $\frac{\cos\alpha}{|z-z_0|}>c''$ és így

$$|f'(z_0)|\geqq c''\left(1-\frac{1}{\delta_2}\right)n.$$

$\delta_2>1$ értékről is később határozunk.

Az $\frac{n}{\delta_2}$ gyökre $|z_0-z_i|<a$, a többire $|z_0-z_i|<1+\delta_1$, tehát

$$\prod_{i=1}^{n}|z_0-z_i|<a^{\frac{n}{\delta_2}}(1+\delta_1)^{\frac{n}{\delta_2}(\delta_2-1)}. \tag{67}$$

Ismeretes Csebisev[8] következő tétele:

Legyen $g(z)$ n-edfokú polinom, melyben z^n együtthatója 1. Akkor a függvény abszolút értékének maximuma a $-1\leqq z\leqq 1$ intervallumban legalább is $\frac{1}{2^{n-1}}$, azaz

$$\max_{-1\leqq z\leqq 1}|g(z)|\geqq\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Az egyenlőség csak a Csebisev polinomra áll fenn.

A $|z_0-z|=1$ kör sugarai közt van olyan, mely M-ben fekszik, ennek tehát van olyan z_0-tól különböző z pontja, hogy

$$\prod_{i=1}^{n}|z-z_i|\geqq 4^{1-n}. \tag{68}$$

---

[8] G. Faber: *Über Tschebyscheffsche Polynome.* Journal für die reine und angew. Math. **150** (1919); 79—106.

(66), (67) és (68) alapján

$$a^{\frac{n}{\delta_2}}(1+\delta_1)^{\frac{n}{\delta_2}(\delta_2-1)} \geqq 4^{1-n},$$

vagy

$$a \geqq \frac{\sqrt[n]{4^{\delta_2}}}{4^{\delta_2}(1+\delta_1)^{\delta_2-1}} = A. \tag{69}$$

Ha $a > 4^{-\left(1-\frac{1}{n}\right)}$, megválasztható hozzá $\delta_1 > 0$ és $\delta_2 > 1$ úgy, hogy $a < A$ legyen. Ez (69)-cel ellenmondás. Tehát a fentieket összefoglalva, mivel itt csak azt használtuk fel, hogy van 1-nél hosszabb köz a halmazban, érvényes a következő:

IV. tétel. *Legyen adva egy korlátos, zárt* JORDAN-*ívekkel határolt konvex M ponthalmaz, mely*

vagy egy olyan görbével azonos, melynek görbülete létezik és sehol sem zérus,

vagy egy olyan tartománnyal, melynek határa sehol sem olyan egyenesdarab, melynek hossza az átmérő negyedrésze lenne, vagy annál is hosszabb.

Essenek az $f(z)$ n-edfokú polinom gyökei M tartományba és vegye fel ott $|f(z)|$ maximumát a z_0 pontban.

Akkor létezik olyan $c > 0$ csupán M-től függő állandó, hogy

$$|f'(z_0)| > c.n.|f(z_0)|.$$

Ezt az eredményt FABER[8] tételével tehetjük pontosabbá. Ha $z = \psi(x)$ az $|x| = r$ kört M határgörbéjébe viszi át, $x = \infty$-t pedig nyujtás nélkül a kezdőpontba, előfordulhat olyan egyenesdarab, melynek hossza: $a < \frac{1}{r}$.

4. §.

a) ERDŐS PÁL a következő kérdést vizsgálta:

Legyenek $f(z)$ n-edfokú polinom gyökei $z_1, z_2, \ldots, z_n$, és

$$-1 \leqq z_1 \leqq z_2 \leqq \cdots \leqq z_n \leqq 1.$$

Legyen a polinom a (z_{i-1}, z_i) közben mindenütt alulról nézve konvex (konkáv). Kérdés, hogy mit tudunk akkor a két gyök távolságáról kimondani.

ERDŐS és tőle függetlenül TURÁN kimutatta, hogy a fenti feltételek mellett

$$z_i - z_{i-1} \leqq \frac{16}{\sqrt{n}}. \tag{70}$$

Bizonyításunk a következő: Legyen $f'(z) = 0$ egyenletnek a (z_{i-1}, z_i) közbe eső gyöke a. Akkor TURÁN tétele szerint (1. § a.) van olyan ζ pont, hogy

$$0 < a - \zeta \leqq \frac{2}{\sqrt{n}} \quad \text{és} \quad |f'(\zeta)| \geqq \frac{1}{6}\sqrt{n}\,|f(a)|. \tag{71}$$

Viszont a konvexitás azt jelenti, hogy $|f'(z)|$ monoton csökken z_{i-1} és a közt, tehát ha $z_{i-1} \leqq z \leqq \zeta$:

$$|f'(z)| \geqq \frac{1}{6}\sqrt{n}\,.\,|f(a)|.$$

De

$$|f(\zeta) - f(z_{i-1})| = |f(\zeta)| = \left|\int_{z_{i-1}}^{\zeta} f'(z)\,dz\right| = \int_{z_{i-1}}^{\zeta} |f'(z)|\,dz \geqq$$

$$\geqq (\zeta - z_{i-1}) \cdot \frac{1}{6}\sqrt{n}\,.\,|f(a)|,$$

másrészt $|f(\zeta)| \leqq |f(a)|$, tehát

$$\zeta - z_{i-1} \leqq \frac{6}{\sqrt{n}}. \tag{72}$$

(71) és (72) alapján

$$a - z_{i-1} \leqq \frac{8}{\sqrt{n}},$$

hasonlóan $z_i - a \leqq \frac{8}{\sqrt{n}}$, tehát

$$z_i - z_{i-1} \leqq \frac{16}{\sqrt{n}}. \qquad \text{Q. e. d.}$$

b) Az előbbi tétel javítható. Ebben az irányban elért pontos eredmény a következő:

V. tétel. *Az előző feltételek mellett*

a) páros n esetén

$$z_i - z_{i-1} \leqq \frac{2}{\sqrt{2n-3}}, \tag{73 a}$$

b) páratlan $n \geqq 3$ esetén

$$z_i - z_{i-1} \leqq \frac{2}{\sqrt{2n-3}} \cdot \frac{\sqrt{n^2-2n}}{n-1}. \tag{73 b}$$

A tétel nem javítható.

Bizonyításunk előtt egy segédtétel helyességét mutatjuk ki.

Segédtétel. Legyenek $f(z)=0$ n-edfokú egyenlet gyökei: $z_1 \leqq z_2 \leqq \cdots \leqq z_n$, $f''(z)=0$ gyökei pedig $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_{n-2}$. Ezek nyilván $z_1, z_2, \ldots z_n$ függvényei, azaz

$$x_i = x_i(z_1, z_2, \ldots, z_n). \tag{74}$$

Kimutatjuk, hogy

$$\frac{n-2}{n} \geqq \frac{dx_i}{dz_k} \geqq 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n-2 \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{75}$$

és

$$\frac{dx_i}{dz_k} = \frac{2}{(x_1 - z_k)^2 f'''(x_i)} \left(\frac{f(x_i)}{x_i - z_k} - f'(x_i) \right). \tag{76}$$

Bizonyítás. Először (75)-öt igazoljuk. Ha bebizonyítjuk, hogy

$$\frac{dx_i}{dz_k} \geqq 0, \tag{77}$$

akkor (75) igaz, mert a polinomok együtthatói és gyökei közt fennálló összefüggés alapján

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = \frac{n}{n-2}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2}),$$

honnan

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i}{dz_k} = \frac{n-2}{n}. \tag{78}$$

(78) baloldalán csupa nem-negatív tag áll, tehát bármelyik tag kisebb az összegnél.

(77) pedig azt mondja ki, hogy ha a polinom egyik gyökét megváltoztatom, a második differenciálhányados bármelyik gyöke szintén abba az irányba mozdul el. Nyilván elég ezt azzal a változtatással igazolni, hogy a második differenciálhányados helyett az elsőt vesszük. Az első differenciálhányados gyökeit

a $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-z_i} = 0$ egyenlet szolgáltatja. Ebben egy z_i megváltozik. De $\frac{1}{z-z_i}$ a z_i változót tekintve monoton növekvő függvény, s ebből már következik, hogy $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z-z_i} = 0$ gyöke z_i elmozdulásának irányába mozdul el. Természetes, hogy ez a gondolatmenet csak akkor érvényes, ha minden gyök valós.

(76) igazolása egyszerű számítás alapján történhet.

Ezek után áttérünk tételünk bizonyítására. Keresni fogjuk azt az n-edfokú polinomot, mely a feltételeknek megfelel és a lehető leghosszabb olyan (z_{i-1}, z_i) közzel rendelkezik, hol a polinom alulról nézve konvex, vagyis $f''(z) \geqq 0$.

Először azt bizonyítjuk be, hogy abba az intervallumba nem eshet a polinomnak gyöke, ahol konvex alulról nézve. Legyen u. i. az intervallum (z_i, z_k), akkor azt állítjuk, hogy $f''(z) > 0$, ha $z_i < z < z_k$. Ha u. i. egy helyen $f''(\zeta) = 0$, ott kétszeres gyök van legalább. Viszont $f(z)$ minden gyöke valós, tehát $f'(z)$-nek bármely két gyöke közé esik $f(z)$-nek gyöke, k-szoros gyök helyén $f(z)$-nek $k+1$-szeres gyöke van. Így ha ζ az $f''(z)$ legkisebb gyöke a (z_i, z_k) köz belsejében, $f(\zeta) = 0$ lesz és $f'(\zeta) = 0$. De $f(z_i) = f(\zeta) = 0$ miatt Rolle tételével $f'(z)$ eltűnik a $z_i < \eta < \zeta$ helyen, $f'(\eta) = f'(\zeta) = 0$ miatt pedig $f''(\xi) = 0$, hol $\eta < \xi < \zeta$. De ez ellenmondásban van azzal, hogy $f''(z)$-nek nincs gyöke a (z_i, ζ) közben. E miatt z_i és z_k közé nem esik $f''(z)$-nek és így $f(z)$-nek sem gyöke, maguk a z_i és z_k helyek nem lehetnek többszörös gyökök, mert különben Rolle tétele alapján $f''(z)$-nek is volna gyöke z_i és z_k között. i és k egymás után következő két szám, jelöljük $i-1$, i-vel.

Tegyük fel, hogy $f(z)$ alulról nézve konvex a (z_{i-1}, z_i) közben és vizsgáljuk meg, hogy ez az intervallum mikor nagyítható. Nyilván, ha $f(z)$ gyökeit úgy tudjuk változtatni, hogy $z_i - z_{i-1}$ nagyobbodik és $f''(z) \neq 0$, ha $z_{i-1} < z < z_i$. Kimutathatjuk először, hogy fenti értelmű változás létezik, kivéve azt az esetet, mikor minden gyök z_{i-1}, z_i kivételével a -1 és $+1$

pontokba esik, továbbá $f''(z_{i-1})=0$ (kivéve ha $i=2$, mikor $z_1=-1$) és $f''(z_i)=0$ (kivéve, ha $i=n$, amikor $z_n=1$).

Legyen először $i=2$. Lineáris transzformációval elérhetjük, hogy $z_1=-1$, $z_n=1$ legyen, s közben (z_1, z_2) nem kisebbedik a konvexitás is megmarad, tehát $z_2 \leqq x_1$. Vigyük az összes gyököket: $z_3, z_4, \ldots, z_n$-t a $+1$ pontba, (77) alapján x_1 növekedni fog, a konvexitás megmarad, $z_2 \leqq x_1$ lesz. Ezután z_2-t addig növeljük, míg $z_2=x_1$ nem lesz, miáltal (z_1, z_2) nyilván nagyobbodik. Polinomunk most már megfelel az előző bekezdésben kitűzött célnak. $i=n$ esetén az eljárás analóg.

Ezután tegyük fel, hogy $3 \leqq i \leqq n-1$. Be fogjuk először bizonyitani, hogy a

$$z_{i-1}=x_{i-2}, \quad z_i=x_{i-1} \tag{79}$$

esetet kivéve az intervallum növelhető. Az intervallumba nem esik gyök, s így feltehetjük Rolle tételének segitségével, hogy

$$x_{i-2} \leqq z_{i-1} < z_i \leqq x_{i-1}.$$

Ha mindkét oldalon az egyenlőtlenség áll fenn, akkor z_{i-1}-et kisebbithetjük, míg valahol az egyenlőség be nem következik. Ha pedig pl.

$$x_{i-2}=z_{i-1}<z_i<x_{i-1}, \tag{80}$$

akkor a z_{i+1} gyököt kisebbitjük, ezáltal (77) miatt x_{i-2} is kisebbedik, tehát az előbbi eset fog bekövetkezni és az intervallum növelhető.

Tegyük fel, hogy legalább két különböző olyan hely van z_{i-1} és z_i-t kivéve $(-1, +1)$ belsejében, hol $f(z)$ eltűnik. Akkor ezeknek a gyököknek megfelelő eltolásával elérhetjük, hogy (80) fennálljon, azaz a (z_{i-1}, z_i) közt növelhetjük. Jelöljük u. i. a és b-vel $f(z)$ két ilyen gyökét. Ezeket a gyököket mindkét irányban mozgathatjuk. Végezzünk az a gyökkel c-szer akkora elmozdulást, mint a b-vel, hol c-ről később diszponálunk, akkor (76)-tal

$$\frac{dx_{i-2}}{da}=-\frac{2f'(x_{i-2})}{f'''(x_{i-2})}\left\{\frac{c}{(x_{i-2}-a)^2}+\frac{1}{(x_{i-2}-b)^2}\right\}$$

$$\frac{dx_{i-1}}{da}=-\frac{2f'(x_{i-1})}{f'''(x_{i-1})}\left\{\frac{c}{(x_{i-1}-a)^2}+\frac{1}{(x_{i-1}-b)^2}\right\}$$

Nyilván megválasztható c értéke úgy, hogy $\frac{dx_{i-2}}{da}$ és $\frac{dx_{i-1}}{da}$ különböző előjelű legyen. U. i. $\frac{dx_{i-2}}{dz_k} > 0$ miatt $-\frac{2f'(x_{i-2})}{f'''(x_{i-2})} > 0$, ugyanigy $-\frac{2f'(x_{i-1})}{f'''(x_{i-1})} > 0$. Így ha c a $\left(-\frac{(x_{i-1}-a)^2}{(x_{i-1}-b)^2}, -\frac{(x_{i-2}-a)^2}{(x_{i-2}-b)^2}\right)$ számközbe esik, a két kifejezés ellenkező előjelű. Ez az intervallum nem zérus hosszúságú. a-t megfelelő irányba mozgatva tehát (80) esetre jutnánk. Azaz a (z_{i-1}, z_i) számköz növelhető lenne.

Feltehetjük tehát, hogy a polinom a $(-1, +1)$ számköz belsejében legfeljebb három helyen tűnik el. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ezek a helyek: $z_{i-1} < z_i < z_{i+1}$. Ha $i+1=n$, ismét elérhetjük a lineáris transzformáció felhasználásával, hogy $z_n = +1$ legyen, s közben (z_{i-1}, z_i) növekszik. Részcélunkat tehát ekkor elértük. $i \leqq n-2$ esetén pedig eljárásunk az előbbihez analóg.

Tehát bebizonyitottuk, hogy feladatunkkal kapcsolatban elégséges azokat a polinomokat vizsgálni, melyek alakja:

$$\left.\begin{aligned} &f'(z) = (z+1)(z-a)(z-1)^{n-2}, \\ \text{ahol}\quad &f''(a) = 0;\ -1 \leqq a \leqq 1, \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

és

$$\left.\begin{aligned} &f(z) = (z+1)^{k-1}(z-a)(z-b)(z+1)^{n-k-1}; \\ &\qquad (k=2, 3, \ldots, n-2), \\ \text{ahol}\quad &f''(a) = f''(b) = 0;\ -1 < a < b < 1. \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

(81)-ben a konvex intervallum hossza:

$$1 + a = \frac{2}{n-1},$$

(82)-ben pedig

$$(b-a)^2 = \frac{4}{2n-3} - \frac{4(2k-n)^2}{(n-1)^2(2n-3)}.$$

Utóbbi akkor a legnagyobb, ha $(2k-n)^2$ a legkisebb. Innen a tétel már egyszerűen kiolvasható.

Erőd János.

ÜBER DIE UNTERE GRENZE DES MAXIMUMS VON GEWISSEN POLYNOMEN.

Sei $f(z)$ ein Polynom vom Grade n, das alle Wurzeln in dem Gebiete M hat. Als Umkehrung bekannter Fragestellungen von A. Markoff,[1] M. Riesz,[3] Szegő[5] stellte Turán das Problem auf: was können wir über

$$\min \frac{\max\limits_{z\varepsilon M} |f'(z)|}{\max\limits_{z\varepsilon M} |f(z)|} = h_n(M)$$

aussagen?

Vorliegende Arbeit enthält den Beweis folgender Sätze.

§ 1. Ist M_1 das Intervall $(-1, 1)$, so ist

$$h_n(M_1) = \sqrt{\frac{n}{e}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

§ 2. Ist M_2 die Ellipse mit den Achsen $(-1, 1)$; $(-ai, ai)$, so gilt:

$$h_n(M_2) \geqq \frac{na}{2} \text{ und } h_n(M_2) \geqq \frac{1}{7}\sqrt{n}.$$

§ 3. Ist M ein beliebiges konvexes Gebiet, dessen Grenze keine gerade Strecke enthält, so ist

$$h_n(M) \geqq c \, . \, n,$$

wo c eine positive Konstante bedeutet, die nur von M, nicht aber von n abhängt.

§ 4. Sei $f(z)$ ein Polynom vom Grade n, das alle Wurzeln in dem Intervall $(-1, 1)$ hat. Ist $f(z)$ zwischen den beiden Nullstellen a und b konvex, so gilt für gerades n:

$$|a-b| \leqq \frac{2}{\sqrt{2n-3}},$$

und für ungerades n:

$$|a-b| \leqq \frac{2}{\sqrt{2n-3}} \cdot \frac{\sqrt{n^2-2n}}{n-1}.$$

Dieser Satz spricht die Verschärfung eines Resultates von Erdős und Turán aus.

Johann Eröd.