Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes.

§ 1. Quand il s'agit d'assurer la direction du mouvement rectiligne d'une pièce soumise à un effort oblique, il ne suffit pas de rendre les inégalités des guides peu sensibles à la mesure; les déviations, qui ne sont pas appréciables à l'oeil nu, se manifestent clairement par les résistances passives qui en résultent. En guidant la tige du piston de la machine à vapeur à l'aide de coulisses ou glissoires, on prend un soin particulier de les exécuter avec une perfection aussi grande que possible. En remplaçant ces guides par le parallélogramme, on est de même obligé à augmenter le plus possible la précision de son jeu, et cela d'autant plus, que même dans les circonstances les plus favorables il présente des déviations bien plus grandes que celles qu'on ne saurait jamais admettre dans le mouvement de la tige guidée par les coulisses ou glissoires. Les efforts latéraux qui résultent du défaut du jeu du parallélogramme se manifestent souvent même par la formation d'une certaine ellipticité dans la boîte à étoupes.

Or, dans l'état actuel de la Mécanique pratique, on n'a pas de régles sûres pour trouver les éléments les plus avantageux du parallélogramme. Faute d'une méthode directe, on détermine ses éléments d'après les conditions qu'on croit être nécessaires pour la précision du jeu de ce mécanisme. Ainsi l'on trouve la longueur de la tige-guide et le lieu de son axe d'oscillation, en cherchant à rendre la direction de la tige du piston tout-à-fait verticale au commencement, au milieu et à la fin de la course. D'après cela, et en supposant données les brides du parallélogramme, tout se réduit à déterminer convenablement la position normale de la tige par rapport au balancier. On trouve cette position, en cherchant à placer la tige de telle manière, que son prolongement passe par le milieu du sinus-verse de l'arc décrit par l'extrémité du balancier. Ici, ainsi que partout dans la suite, nous prenons pour l'extrémité du balancier son point d'attachement à la bielle latérale.

Si l'on trouve qu'il y ait un avantage particulier de donner à la tige du piston la direction tout-à-fait exacte au commencement, au milieu et à la fin de la course, la tige-guide qu'on trouve d'après la méthode dont nous venons de parler, est évidemment la seule qui remplisse cette condition. Mais ce cas, comme nous le verrons, n'est pas le plus favorable pour la précision du jeu du parallélogramme dans les autres points de la course du piston. Quant à la position la plus avantageuse de la tige du piston par rapport au balancier, le principe précédent ne nous la donne pas. D'après la théorie que nous proposons dans ce mémoire, on verra que la tige du piston doit être plus ou moins rapprochée du centre du balancier, selon les dimensions du parallélogramme, et, dans les cas les plus ordinaires, sa direction ne passera pas par le milieu du sinus-verse de l'arc décrit par l'extrémité du balancier. Ainsi, dans le cas où le parallélogramme de Watt est construit sur la demi-longueur du bras du balancier (comme Watt l'a fait lui même, et comme on doit le faire, si l'on est maître de disposer des dimensions du parallélogramme) on diminue notablement la limite de déviation de la tige de sa direction normale, en l'approchant du centre du balancier plus qu'on ne devrait le faire d'après le principe dont nous venons de parler, savoir: 1) si, dans le cas où l'on cherche à rendre la position de la tige tout-à-fait verticale au commencement, au milieu et à la fin de la course, on prenait pour sa direction la ligne qui divise le sinus-verse de l'arc décrit par l'extrémité du balancier dans le rapport de 2 à 1, et 2) dans le cas, où l'on ne cherche pas l'exactitude absolue dans les deux positions extrêmes de la tige, on prenait pour sa direction la ligne qui divise ce sinus-verse dans le rapport de 5 à 3.

Dans le dernier cas, la tige-guide ne sera plus déterminée par les positions limites du balancier; on doit pour cela prendre les positions qui les précèdent à peu près d'un quarantième de l'amplitude de l'oscillation. Quelque petites que soient les modifications dans la construction du parallélogramme de Watt que nous venons de mentionner, et qui ne sont que des résultats approximatifs tirés de nos formules, elles augmentent notablement la précision de son jeu. A l'aide de l'analyse on peut s'assurer facilement qu'avec ces modifications la limite de déviation de la tige par rapport à la ligne verticale diminue plus que de moitié.

Cela nous prouve clairement que le principe qui est la base de la théorie actuelle du parallélogramme est loin de réduire au *minimum* la limite de ses déviations, si nuisibles par les efforts latéraux qui en résultent sur la tige du piston, et par conséquent, que non seulement pour la théorie, mais aussi pour la pratique elle même, il est très important que, dans les recherches sur le parallélogramme, ce principe, qu'on ne cherche à vérifier qu'à l'aide des considérations inexactes, soit remplacé par une méthode directe; ce but atteint, on pourra, d'après la nature de ce mécanisme et sous les conditions qui se présentent dans la pratique, donner les éléments les plus convenables pour la précision de son jeu. C'est cette méthode que nous nous proposons de donner dans ce mémoire; elle embrasse le parallélogramme de Watt et toutes ses variétés qui sont en usage dans la pratique.

§ 2. Lorsqu'on développe une fonction fx suivant les puissances de $x - a$, la somme des premiers termes nous donne un polynome qui, parmi tous les autres du même degré, s'approche le plus près de fx dans le voisinage de $x = a$. On prend ce polynome pour la valeur approchée de fx, quand on la cherche sous la forme d'une fonction entière. Mais pour l'évaluation de fx sous cette forme, on doit préférer un autre polynome à celui-ci, si, au lieu de s'approcher le plus près possible de fx dans le voisinage de $x = a$, on cherche à augmenter la limite de précision de sa valeur approchée dans l'intervalle donné de x: ce second polynome sera déterminé par la condition que la limite de ses écarts de fx, dans l'intervalle donné, soit moindre que celle de tous les autres polynomes du même degré. A mesure que cet intervalle diminue, la seconde valeur approximative de fx s'approche de celle qu'on trouve par le développement de fx suivant les puissances de $x - a$, a étant convenablement choisi. Mais tant que cet intervalle reste fini, les coefficients de ces deux valeurs approximatives de fx diffèrent entre elles, et ces différences, même dans le cas où elles sont petites, ne peuvent être négligées dans la théorie des mécanismes dont nous nous occuperons. Nous avons déjà remarqué combien il était important de déterminer avec une approximation suffisante la position de la tige du piston par rapport au balancier, ou, ce qui revient au même, les angles du parallélogramme dans sa position moyenne. Or, ces angles ne s'écartent que bien peu de 90°, et ces écarts ne sont que le résultat de la différence entre les coefficients des deux valeurs approximatives de la fonction, dont nous venons de parler; savoir, de la valeur qui donne le *minimum* de l'erreur dans le voisinage d'une valeur de x, et de celle, dont la limite des erreurs, dans l'intervalle donné de x, est un *minimum*. Si on ne tient pas compte de ces différences, on trouve 90° pour la valeur des angles du parallélogramme dans sa position moyenne, et l'erreur qu'on commet ainsi, quoique d'un petit nombre de degrés, suffit cependant le plus souvent pour diminuer de plus de dix fois l'exactitude du jeu de ce mécanisme.

D'après ce que nous venons de dire, on voit que la théorie des parallélogrammes que nous nous proposons de donner, est impossible à l'aide des formules approximatives qui ne sont déterminées que d'après la condition de donner le *maximum* d'exactitude dans le voisinage d'une seule valeur de la variable; cette théorie démande des méthodes d'approximation, qui puissent fournir le *maximum* d'exactitude par rapport à toutes les valeurs de la variable entre deux limites données. C'est en cela que consiste la difficulté de cette théorie.

Relativement à la méthode d'approximation, dont nous venons de parler, nous n'avons que des recherches de M. Poncelet, qui a donné des formules linéaires pour l'évaluation de ces trois expressions

$$\sqrt{(x^2+y^2)},\quad \sqrt{(x^2-y^2)},\quad \sqrt{(x^2+y^2+z^2)},$$

formules d'un grand usage dans la Mécanique pratique. Dans les problèmes de M. Poncelet, les équations qui déterminent les coefficients cherchés se résolvent facilement. Mais cela n'a lieu que dans des cas très particuliers. A plus forte raison, leur solution exacte est impossible, si l'on cherche la valeur générale de ces coefficients pour l'évaluation d'une fonction quelconque; car alors ces équations, d'une forme très compliquée, contiennent une fonction arbitraire. Donc on ne peut donner des formules générales pour cette méthode d'approximation qu'à l'aide des séries. C'est ainsi que nous avons cherché à résoudre la question suivante:

«Déterminer les modifications qu'on doit apporter dans la valeur appro- «chée de fx, donnée par son développement suivant les puissances de $x-a$, «quand on cherche à rendre *minimum* la limite de ses erreurs entre $x=a-h$ «et $x=a+h$, h étant une quantité peu considérable».

La théorie des parallélogrammes que nous proposons ici, est fondée sur la solution de cette question dans le cas, où le développement de fx s'arrête au terme suivi d'un autre plus élevé d'un degré; c'est le cas qu'on rencontre le plus souvent dans l'évaluation des fonctions.

§ 3. Soit fx une fonction donnée, U un polynome du degré n avec des coefficients arbitraires. Si l'on choisit ces coefficients de manière à ce que la différence $fx-U$, depuis $x=a-h$, jusqu'à $x=a+h$, reste dans les limites les plus rapprochées de 0, la différence $fx-U$ jouira, comme on le sait, de cette propriété:

«Parmi les valeurs les plus grandes et les plus petites de la différence «$fx-U$ entre les limites $x=a-h$, $x=a+h$, on trouve au moins $n+2$ «fois la même valeur numérique».

Les valeurs que $fx-U$ prend pour $x=a-h$, $x=a+h$ sont considérées comme *maximum* ou *minimum*.

D'après cela on trouve facilement les équations que les coefficients de

U doivent vérifier. Si nous convenons de dénoter par L la valeur numérique commune des $n+2$ *maxima* ou *minima* de $fx - U$ qui doivent avoir lieu entre les limites $x = a - h$, $x = a + h$, l'équation

$$(1) \qquad (fx - U)^2 - L^2 = 0$$

doit avoir $n+2$ racines comprises entre $a-h$ et $a+h$, et toutes ces racines doivent vérifier l'équation

$$\frac{d\,(fx - U)}{dx} = 0,$$

qui est la condition du *maximum* et du *minimum*, ou bien se réduire aux valeurs $a-h$, $a+h$; en un mot, les $n+2$ racines de l'équation (1), comprises entre $a-h$, $a+h$, doivent vérifier celle-ci

$$(2) \qquad (x - a + h)\,(x - a - h)\,\frac{d\,(fx - U)}{dx} = 0.$$

Cela nous donne un nombre suffisant d'équations pour trouver les $n+1$ coefficients du polynome U et la valeur inconnue L; car chacune des $n+2$ racines communes aux équations (1) et (2) suppose une équation entre les coefficients de U et la quantité L, ce qui fait en total $n+2$ équations. La résolution de ces équations n'est évidemment possible que dans le cas, où l'on donne à la fonction fx une forme déterminée. Mais si la quantité h est assez petite, on peut laisser fx arbitraire et chercher les coefficients de U en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de cette quantité. Nous ne chercherons ici ces coefficients que pour les cas qui se présentent dans la théorie des parallélogrammes, mais notre méthode peut être étendue à tous les cas, où $f(a+z)$, dans les limites $z = -h$, $z = +h$, peut être développée d'après la série de Taylor, ce qui sera l'objet d'un autre mémoire.

Pour simplifier nos formules nous dénoterons par

$$k_0,\ k_1,\ k_2, \ldots\ldots$$

les valeurs

$$f(a),\ \frac{f'(a)}{1},\ \frac{f''(a)}{1.2}, \ldots\ldots,$$

et par conséquent le développement de fx par la série de Taylor donnera

$$fx = k_0 + k_1\,(x-a) + k_2\,(x-a)^2 + \ldots\ldots$$

De plus, nous ferons $x - a = hz$, ce qui réduira le développement de fx à la forme

$$k_0 + k_1 hz + k_2 h^2 z^2 + \ldots\ldots,$$

et les limites

$$x = a - h, \ x = a + h$$

se changeront en celles-ci:

$$z = -1, \ z = +1.$$

Cela posé, le polynome cherché U sera déterminé par la condition que dans les limites $z = -1$, $z = +1$ la différence

$$(3) \qquad k_0 + k_1 hz + k_2 h^2 z^2 + \ldots - U = Y$$

s'écarte le moins possible de zéro.

Or, si l'on ne tient compte que des quantités de l'ordre moins élévé que h^{n+1}, la valeur de Y devient

$$k_0 + k_1 hz + k_2 h^2 z^2 + \ldots + k_n h^n z^n - U,$$

et son *minimum* est évidemment zéro; car le polynome cherché U étant du degré n, on peut réduire Y à zéro, en prenaut

$$(4) \qquad U = k_0 + k_1 hz + k_2 h^2 z^2 + \ldots + k_n h^n z^n.$$

Donc la valeur de U, exacte jusqu'aux quantités de l'ordre h^{n+1}, sera égale à

$$k_0 + k_1 hz + k_2 h^2 z^2 + \ldots + k_n h^n z^n.$$

Il n'est pas difficile de s'assurer que l'ordre de précision de cette valeur de U sera encore plus élevé, si dans la série

$$k_0 + k_1 hz + k_2 h^2 z^2 + \ldots + k_n h^n z^n + k_{n+1} h^{n+1} z^{n+1} + \ldots,$$

le terme $k_n h^n z^n$ est suivi d'un certain nombre de termes égaux à 0.

En effet, s'il arrive que

$$(5) \qquad k_{n+1} = 0, \ k_{n+2} = 0, \ldots k_{n+m} = 0,$$

la valeur de cette série peut être remplacée par

$$k_0 + k_1 hz + k_2 h^2 z^2 + \ldots + k_n h^n z^n$$

même dans le cas où l'on cherche le polynome U avec une précision poussée jusqu'à l'ordre h^{n+m+1}. Donc en général, la valeur exacte de U sera de cette forme

$$U = U_0 + V h^{m+n+1}, \tag{6}$$

où

$$U_0 = k_0 + k_1 h z + k_2 h^2 z^2 + \ldots + k_n h^n z^n,$$

V étant un polynome du degré n, dont les coefficients ne deviennent pas infinis pour $h = 0$, et m le nombre des équations (5). Ce nombre ne différera de 0 que dans le cas où $k_{n+1} = 0$, ce qui n'a lieu que pour a égal à une des racines de l'équation $f^{n+1} x = 0$; car nous dénotons par k_{n+1} la valeur de $\frac{f^{n+1}(a)}{1.2...(n+1)}$. Pour que ce nombre soit 2, 3,...etc., il faut que cette racine de l'équation $f^{n+1} x = 0$ soit double, triple, ... etc.

D'après (6) on voit que la valeur exacte de U sera composée de deux parties: U_0 et $V h^{m+n+1}$. La première partie n'est évidemment que la somme des $n+1$ premiers termes du développement de $f(a + hz)$ suivant les puissances de z; quant à la seconde, elle détermine les changements qu'on doit faire dans les coefficients de cette valeur approchée, lorsque l'on cherche à rendre *minimum* la limite de ses erreurs dans l'intervalle donné de la variable. En passant à la détermination de cette partie de U, nous mettons la somme $U_0 + V h^{m+n+1}$ à la place de U dans la valeur de Y(3); d'après les équations (4) et (5), la valeur de Y devient.

$$(k_{n+m+1} z^{n+m+1} + k_{n+m+2} h z^{n+m+2} + \ldots - V) h^{n+m+1};$$

c'est cette valeur que nous devons chercher à rendre la plus proche possible de zéro entre les limites $z = -1$, $z = +1$.

Si l'on supprime ici le facteur constant h^{n+m+1} et qu'on ne tienne compte que des quantités de l'ordre moins élevé que h, la valeur de V, exacte jusqu'à ce degré, sera déterminée par la condition que V soit celui des polynomes du degré n, pour lequel la différence

$$k_{n+m+1} z^{n+m+1} - V$$

s'écarte le moins possible de zéro depuis $z = -1$ jusqu'à $z = +1$.

Or, d'après le § 3, cela se réduit à un système de $2n + 4$ équations de cette forme

$$(k_{n+m+1} z^{n+m+1} - V)^2 - L^2 = 0, \quad \frac{d(k_{n+m+1} z^{n+m+1} - V)}{dz} (z^2 - 1) = 0.$$

La résolution de ces équations à l'aide des méthodes ordinaires de l'Algèbre demande des calculs tout-à-fait impraticables par leur prolixité, tant que n, degré du polynome cherché, n'est pas un petit nombre. Nous allons montrer qu'à l'aide du calcul intégral, on peut remplacer ces équations par d'autres dont le nombre, pour toutes les valeurs de n, ne surpassera pas $2m$, et même trouver leur solution générale dans le cas de $m = 0$ et $m = 1$, chose très importante pour la méthode d'approximation dont nous nous occupons; car, d'après ce que nous avons dit plus haut par rapport au nombre m, il n'aura une valeur considérable que dans des cas exceptionnels, très rares; sa valeur ordinaire est zéro. Ce dernier cas est celui qui se présente dans la théorie des parallélogrammes.

§ 4. En faisant pour abréger

$$y = k_{n+m+1}\, z^{n+m+1} - V, \tag{7}$$

les équations qui déterminent V se présenteront sous cette forme

$$y^2 - L^2 = 0,\ (z^2 - 1)\frac{dy}{dz} = 0. \tag{8}$$

Ces équations, d'après les conditions du *minimum* que nous cherchons, doivent avoir $n+2$ racines communes, comprises entre $z = -1$ et $z = +1$. Or, y étant un polynome du degré $n+m+1$, cela suppose, comme nous allons le montrer, que la fraction

$$\frac{y^2 - L^2}{\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}$$

se réduit à celle-ci:

$$\frac{P(z^2-1)}{Q^2},$$

où P et Q sont des fonctions entières, la première du degré $2m$, la seconde du degré m.

En effet, soient

$$z_1,\ z_2, \ldots\ldots z_n,\ z_{n+1},\ z_{n+2}$$

les $n+2$ racines communes à ces deux équations; parmi ces racines il y en aura au moins n qui, étant différentes de -1 et $+1$, ne pourront vérifier l'équation

$$(z^2 - 1)\frac{dy}{dz} = 0,$$

qu'en réduisant $\frac{dy}{dz}$ à 0. Or, si $z = z_1$ est une de ces racines, la différence $z - z_1$ divisera évidemment $\frac{dy}{dz}$ et $y^2 - L^2$. De plus, il est facile de s'assurer que $y^2 - L^2$ sera divisible par le carré $(z - z_1)^2$; car l'équation $\frac{dy}{dz} = 0$, qui a lieu pour $z = z_1$, suppose la multiplicité de cette racine dans l'équation $y^2 - L^2 = 0$. Donc, si

$$z_1,\ z_2,\ \ldots\ldots\ z_n$$

sont les valeurs de z qui vérifient les équations

$$y^2 - L^2 = 0,\ (z^2 - 1)\frac{dy}{dz} = 0,$$

sans réduire $z^2 - 1$ a zéro, les fonctions $\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$, $y^2 - L^2$ sont divisibles par

$$(z - z_1)^2\,(z - z_2)^2\ \ldots\ldots\ (z - z_n)^2,$$

et par conséquent, la fraction

$$\frac{y^2 - L^2}{\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}$$

se réduit à $\frac{P_0}{Q^2}$, où P_0 est un polynome du degré $2(n + m + 1) - 2n = 2m + 2$, et Q du degré $n + m - n = m$. Il nous reste à montrer, que le polynome P_0 est réductible à la forme $P(z^2 - 1)$. Pour cela nous remarquons que les équations

$$y^2 - L^2 = 0,\ (z^2 - 1)\frac{dy}{dz} = 0$$

se vérifient encore pas deux valeurs de z, savoir:

$$z = z_{n+1},\ z = z_{n+2}.$$

Si ces valeurs ne réduisent pas $\frac{dy}{dz}$ à zéro, elles sont égales à $+1$ et -1, et par conséquent, $y^2 - L^2$ est divisible par $(z + 1)(z - 1) = z^2 - 1$. Mais $\frac{dy}{dz}$ étant différente de zéro pour $z = \pm 1$, cela suppose que dans la fraction $\frac{P_0}{Q^2}$, égale à $\frac{y^2 - L^2}{\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}$, le numérateur P_0 contient le facteur $z^2 - 1$, et par conséquent,

$$P_0 = P(z^2 - 1).$$

On peut réduire à la même forme le numérateur P_0, si une des valeurs z_{n+1}, z_{n+2}, ou toutes les deux, vérifient l'équation $\frac{dy}{dz} = 0$. En effet, si $z = z_{n+1}$ rend $\frac{dy}{dz} = 0$, d'après ce que nous avons dit plus haut, le carré $(z - z_{n+1})^2$ sera le diviseur commun des fonctions $y^2 - L^2$, $\left(\frac{dy}{dz}\right)^2$, et par conséquent de celles-ci: P_0, Q^2. Or si l'on supprime ce facteur dans la fraction $\frac{P_0}{Q^2}$, et qu'on y introduise à sa place $z + 1$ ou $z - 1$, on aura une fraction, dont les deux termes seront du même degré que ceux de $\frac{P_0}{Q^2}$, et le numérateur aura pour facteur $z + 1$ ou $z - 1$. Cela nous montre qu'on aura, dans tous les cas possibles, cette équation différentielle

$$\frac{y^2 - L^2}{\left(\frac{dy}{dz}\right)^2} = \frac{P(z^2 - 1)}{Q^2},$$

qui se réduit à la forme

$$\frac{dy}{\sqrt{(y^2 - L^2)}} = \frac{Q\,dz}{\sqrt{(z^2 - 1)P}},$$

où P et Q sont respectivement des degrés $2m$ et m.

Comme le premier membre de cette équation a pour intégrale

$$\frac{1}{2}\log\frac{y + \sqrt{(y^2 - L^2)}}{y - \sqrt{(y^2 - L^2)}},$$

nous concluons que la différentielle

$$\frac{2Q\,dz}{\sqrt{(z^2 - 1)P}}$$

sera du nombre de celles dont l'intégrale est réductible à un seul terme logarithmique de la forme $\log\frac{p + q\sqrt{R}}{p - p\sqrt{R}}$, où p, à un facteur constant près, sera la valeur de y, et par conséquent, d'après (7), la fonction p doit être du degré $n + m + 1$ et ne pourra contenir de termes avec les puissances z^{n+m}, z^{n+m-1}, ... z^{n+1}. D'après cela la méthode ingénieuse d'Abel pour l'intégration des différentielles de la forme $\frac{\rho\,dx}{\sqrt{R}}$ à l'aide d'un seul terme logarithmique nous donne $2m$ équations entre les coefficients du polynome P, ce qui est suffisant pour le déterminer; car il n'est que du degré $2m$, et un de ses coefficients peut être choisi arbitrairement. Les équations qui déterminent P sont les suivantes: 1) m conditions d'intégrabilité de $\frac{2Q}{\sqrt{(z^2 - 1)P}}\,dz$ par la formule $\log\frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}$, p étant du degré $n + m + 1$; 2) m équations qu'on trouve en égalant à zéro les coefficients de z^{n+m}, z^{n+m-1}, ... z^{n+1} dans la valeur de p. D'après la méthode d'Abel les conditions d'intégrabilité de $\frac{2Q\,dz}{\sqrt{(z^2 - 1)P}}$ par la formule $\log\frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}$, p étant d'un degré déterminé, ainsi que le polynome p sont donnés en fonctions des seuls coefficients de P; donc, pour trouver ces coefficients et la valeur de p, on n'aura qu'à résoudre un système de $2m$ équations avec $2m$ inconnues. La valeur de p qu'on trouve ainsi nous donne le polynome y, à un facteur constant près, qui sera déterminé d'après (7) par la condition que le coefficient de z^{n+m+1} soit égal à k_{n+m+1}.

De cette manière la détermination du polynome y, et par conséquent de V (7), se réduit à la solution de $2m$ équations, tandis que, d'après (8), les coefficients de ces polynomes sont donnés par un système de $2n+4$ équations. D'après les méthodes de l'illustre Jacobi, toutes ces recherches se simplifient notablement, dans certains cas, à l'aide des fonctions elliptiques. L'importance de l'équation différentielle que nous venons de trouver pour déterminer y se manifeste sur le cas de $m=0$, où cette équation s'intègre facilement et nous donne la valeur générale de y pour n quelconque. D'après cette intégrale on trouve aussi la valeur générale de y pour $m=1$.

§ 5. Les fonctions Q et P, dans l'équation différentielle

$$\frac{Q\,dz}{\sqrt{(z^2-1)P}}=\frac{dy}{\sqrt{(y^2-L^2)}},$$

sont, comme nous l'avons vu, respectivement du degré m et $2m$. Donc, si $m=0$, ces fonctions se réduisent à des constantes, et notre équation devient

$$\lambda\,\frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)}}=\frac{dy}{\sqrt{(y^2-L^2)}},$$

après quoi l'intégration donne

$$\lambda\log\frac{z+\sqrt{(z^2-1)}}{z-\sqrt{(z^2-1)}}+C=\log\frac{y+\sqrt{(y^2-L^2)}}{y-\sqrt{(y^2-L^2)}},$$

où la constante C est zéro; car pour $z=\pm 1$ on aura $y=\pm L$. Donc

$$\lambda\log\frac{z+\sqrt{(z^2-1)}}{z-\sqrt{(z^2-1)}}=\log\frac{y+\sqrt{(y^2-L^2)}}{y-\sqrt{(y^2-L^2)}},$$

et par conséquent,

$$\frac{y+\sqrt{(y^2-L^2)}}{y-\sqrt{(y^2-L^2)}}=\left(\frac{z+\sqrt{(z^2-1)}}{z-\sqrt{(z^2-1)}}\right)^{\lambda},$$

ce qui donne

$$y=\pm\frac{L}{2}\left[\left(z+\sqrt{(z^2-1)}\right)^{\lambda}+\left(z-\sqrt{(z^2-1)}\right)^{\lambda}\right].$$

Pour déterminer les quantités L et λ, nous remarquons que, d'après (7), m étant zéro, le polynome y doit être du degré $n+1$ et avoir pour premier terme $k_{n+1}\, z^{n+1}$. Mais dans le développement de la valeur trouvée de y le terme affecté de la plus haute puissance de z a cette valeur

$$\pm 2^{\lambda-1}\, L z^{\lambda},$$

qui ne peut être identique avec $k_{n+1}\, z^{n+1}$ à moins qu'on n'ait

$$(9) \qquad \lambda = n+1,\ L = \pm \frac{k_{n+1}}{2^{\lambda-1}} = \pm \frac{k_{n+1}}{2^{n}}.$$

D'après cela nous trouvons pour l'expression de y, vérifiant les équations (8), dans le cas de $m = 0$, cette valeur

$$(10) \qquad y = \frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} \left[\left(z + \sqrt{(z^2-1)}\right)^{n+1} + \left(z - \sqrt{(z^2-1)}\right)^{n+1}\right]$$

et par conséquent, d'après (7),

$$(11) \qquad V = k_{n+1} \left[z^{n+1} - \left(\frac{z+\sqrt{(z^2-1)}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{z-\sqrt{(z^2-1)}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

C'est ainsi que pour $m = 0$, et à l'ordre h près, nous trouvons la forme générale de V qui (§ 3) détermine les différences entre les coefficients de la valeur approchée de fx, trouvée par son développement suivant les puissances de $x - a$, et celle dont la limite des erreurs dans l'intervalle $x = a - h$, $x = a + h$ est *minimum*. Le cas de $m = 0$ est celui où $x = a$ ne vérifie pas l'équation $f^{n+1}(x) = 0$, n étant l'exposant de la plus haute puissance de x dans la valeur approchée de fx qu'on cherche. Dans le cas où $x = a$ est une racine simple de l'équation $f^{n+1}x = 0$, et par conséquent, $m = 1$, on trouve avec la même facilité la fonction V, exacte jusqu'aux termes de l'ordre h. En effet, pour $m = 1$ l'équation (7) nous donne

$$y = k_{n+2}\, z^{n+2} - V,$$

et comme V est du degré n, nous concluons que y, outre le terme $k_{n+2}\, z^{n+2}$, ne contiendra que des puissances de z moins élevées que z^{n+1}; parmi les polynomes de cette forme, y est celui qui s'écarte le moins de zéro dans les limites $z = -1$, $z = +1$. Or, d'après (10), on voit que parmi tous les polynomes, dont le terme affecté de la plus haute puissance de z est $k_{n+2}\, z^{n+2}$, le *minimum* des écarts a lieu pour celui-ci:

$$k_{n+2} \left[\left(\frac{z+\sqrt{(z^2-1)}}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{z-\sqrt{(z^2-1)}}{2}\right)^{n+2}\right],$$

et comme dans ce polynome le coefficient de z^{n+1} est égal à 0, nous concluons que c'est la valeur cherchée de $y = k_{n+2}\, z^{n+1} - V$. Donc, pour $m = 1$, le polynome V sera déterminé par cette équation

$$V = k_{n+2}\left[z^{n+2} - \left(\frac{z + \sqrt{(z^2-1)}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{z - \sqrt{(z^2-1)}}{2}\right)^{n+2}\right].$$

Dans le cas où m surpasse 1, la valeur de $y = k_{n+m+1}\, z^{n+m+1} - V$, et par conséquent V, peut être déterminée, comme nous l'avons vu, par un système de $2m$ équations.

C'est ainsi qu'on trouvera, dans tous les cas possibles, la fonction V exacte jusqu'aux termes de l'ordre h. Pour ce qui regarde une plus grande approximation de la valeur de V, elle ne demande que des opérations élémentaires d'Algèbre, comme nous le ferons voir dans les §§ suivants sur le cas de $m = 0$.

Avant de passer à ces recherches nous nous arrêterons un moment sur la formule (10) pour montrer le parti qu'on peut en tirer par rapport aux propriétés des fonctions entières. Nous avons trouvé cette valeur de y, en cherchant celui des polynomes du degré $n+1$ qui, ayant la forme $k_{n+1}\, z^{n+1} - V$, s'écartait le moins de zéro dans les limites $z = -1$, $z = +1$. Or, lorsque V est un polynome arbitraire du degré n, la différence $k_{n+1}\, z^{n+1} - V$ est la forme générale de tous les polynomes du degré $n+1$, où le coefficient de z^{n+1} est égal à k_{n+1}. Donc, parmi tous ces polynomes, celui qui est donné par la formule (10) s'écarte le moins possible de zéro dans les limites $z = -1$, $z = +1$, et comme L, désignant le *maximum* de ses écarts, est égal à $\pm \frac{k_{n+1}}{2^n}$ (9), nous concluons que tous les autres polynomes de cette forme, depuis $z = -1$ jusqu'à $z = +1$, présentent des écarts plus considérables, et par conséquent, leurs valeurs, comme celle de (10), ne peuvent être comprises dans des limites plus étroites que celles-ci:

$$M - \frac{k_{n+1}}{2^n}, \quad M + \frac{k_{n+1}}{2^n};$$

d'où, en remplaçant z par $\dfrac{x - \frac{b+a}{2}}{\frac{b-a}{2}}$, k_{n+1} par $A\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}$, $n+1$ par l, nous déduisons le théorème:

Théorème.

Le coefficient de la plus haute puissance de x d'une fonction entière *du degré l étant A, cette fonction, depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, ne pourra être comprise dans les limites plus étroites que celles-ci:*

$$M - 2A\left(\frac{b-a}{4}\right)^l, \quad M + 2A\left(\frac{b-a}{4}\right)^l \;{}^{*)}.$$

§ 6. Nous avons vu dans le § 3, que si l'on cherche le polynome du degré n, dont la limite des écarts de $f(x)$ depuis $x = a - h$ jusqu'à $x = a + h$ est *minimum*, et que $f^{(n+1)}(a)$ n'est pas zéro, on trouve ce polynome égal à

$$U + Vh^{n+1},$$

où U est la somme des $n + 1$ premiers termes du développement de $f(x)$ suivant les puissances de $x - a$, et V un polynome du degré n, déterminé par cette condition: pour $x - a = hz$, V devient un polynome qui, dans les limites $z = -1$, $z = +1$, s'écarte de $k_{n+1}\, z^{n+1} + k_{n+2}\, h z^{n+2} + \ldots\ldots$ moins que tous les autres du même degré. Quant aux quantités

$$k_{n+1}, \quad k_{n+2}, \ldots\ldots$$

elles sont égales respectivement à

$$\frac{f^{(n+1)}(a)}{1.2\ldots(n+1)}, \quad \frac{f^{(n+2)}(a)}{1.2\ldots(n+2)}, \ldots\ldots$$

Dans les §§ 4 et 5 nous avons cherché la valeur de V exacte jusqu'aux quantités de l'ordre h, et nous l'avons trouvée égale à

$$k_{n+1}\left[z^{n+1} - \left(\frac{z + \sqrt{(z^2-1)}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{z - \sqrt{(z^2-1)}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

Nous allons donner à présent une méthode pour trouver le polynome V avec une précision aussi grande qu'on le voudra.

---

*) Ce théorème nous conduit à plusieurs autres par rapport à la solution des équations, par exemple:

1) Si $f(x) = x^l + Bx^{l-1} + Cx^{l-2} + \ldots\ldots$, on trouvera entre les limites h et $h \pm 4\sqrt[l]{\pm \frac{1}{2} f(h)}$ au moins une racine de ces deux équations: $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$. On prendra le radical avec le signe $-$ ou $+$, selon que $f(h)$ et $f'(h)$ sont de même signe ou de signes contraires.

2) L'équation $(x^l + Bx^{l-1} + Cx^{l-2} + \ldots\ldots + Hx)^2 - K^2 = 0$ a au moins une racine entre les limites $-2\sqrt[l]{\frac{1}{2}K}$, $+2\sqrt[l]{\frac{1}{2}K}$.

3) L'équation $x^{2l+1} + Bx^{2l-1} + Cx^{2l-3} + \ldots + Hx \pm K = 0$ a au moins une racine entre les limites $-2\sqrt[2l+1]{\frac{1}{2}K}$, $+2\sqrt[2l+1]{\frac{1}{2}K}$; c'est ainsi qu'entre les limites $-\frac{a}{3} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{a^3 - \frac{9}{2}ab + \frac{27}{2}c}$, $-\frac{a}{3} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{a^3 - \frac{9}{2}ab + \frac{27}{2}c}$ se trouvera nécessairement au moins une racine de l'équation cubique $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Si l'on fait pour abréger

$$k_{n+1}\left[\left(\frac{z+\sqrt{(z^2-1)}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{z-\sqrt{(z^2-1)}}{2}\right)^{n+1}\right]=y,$$

la valeur de V, que nous venons de trouver aux quantités de l'ordre h près, peut être mise sous cette forme

$$k_{n+1}\, z^{n+1}-y,$$

et par conséquent, sa valeur exacte sera

$$\bar{V}=k_{n+1}\, z^{n+1}-y+V_0 h, \tag{12}$$

où V_0 est un polynome du degré n dont les coefficients restent finis pour $h=0$. D'après la propriété du polynome V, on trouvera ces coefficients, en cherchant à rendre *minimum* la limite des valeurs de

$$\begin{aligned} &k_{n+1}\, z^{n+1}+k_{n+2}\, h\, z^{n+2}+k_{n+3}\, h^2 z^{n+3}+\ldots-V \\ &=k_{n+2}\, h\, z^{n+2}+k_{n+3}\, h^2 z^{n+3}+\ldots+y-V_0 h \end{aligned}$$

dans l'intervalle $z=-1$, $z=+1$, ce qui suppose, comme nous l'avons vu dans le § 3, que les équations

$$\begin{gathered} [k_{n+2}\, h\, z^{n+2}+k_{n+3}\, h^2 z^{n+3}+\ldots+y-V_0 h]^2-L_1^2=0, \\ (z^2-1)\,\frac{d\,[k_{n+2}\, h\, z^{n+2}+k_{n+3}\, h^2 z^{n+3}+\ldots+y-V_0 h]}{dz}=0 \end{gathered}$$

ont $n+2$ racines communes entre les limites $z=-1$, $z=+1$.

Si l'on ne tient compte que des quantités de l'ordre moins élevé que h^2, ces équations deviennent

$$[k_{n+2}\, h\, z^{n+2}+y-V_0 h]^2-L_1^2=0, \tag{13}$$

$$(z^2-1)\,\frac{d\,[k_{n+2}\, h\, z^{n+2}+y-V_0 h]}{dz}=0. \tag{14}$$

De plus, chose très importante pour nous, on peut remplacer la dernière équation, avec le même degré de précision, par celle-ci:

$$(z^2-1)\,\frac{dy}{dz}=0.$$

En effet, comme cette équation n'a pas de racines multiples (ce qu'on voit d'après la forme de y) on n'influera sur leurs valeurs numériques que de quantités de l'ordre h, si, au premier membre de cette équation, on ajoute le terme

$$h\,(z^2-1)\,\frac{d\,[k_{n+2}\,z^{n+2}-V_0]}{dz},$$

après quoi elle deviendra identique avec l'équation (14). Donc, les racines de cette équation qui ne deviennent pas infinies pour $h=0$, et par conséquent, toutes celles qui restent comprises entre les limites -1 et $+1$ pour h fort petit, sont données par l'égalité

$$(z^2-1)\,\frac{dy}{dz}=0$$

avec une précision allant jusqu'au premier degré de h. Mais si dans les racines de l'équation (14), autres que $z=\pm 1$, on fait une faute de l'ordre h, l'erreur de la valeur de

$$[k_{n+2}\,h\,z^{n+2}+y-V_0\,h]^2-L_1^2,$$

pour ces racines, est de l'ordre h^2 ou plus élevé; car, d'après (14), sa première dérivée, pour ces valeurs de z, est zéro au moins aux quantités de l'ordre h près. Quant aux racines

$$z=-1,\quad z=+1,$$

pour lesquelles cette dérivée peut différer de zéro, elles sont exactes dans l'équation

$$(z^2-1)\,\frac{dy}{dz}=0.$$

Donc, aux quantités de l'ordre h^2 près, la valeur de $V_0\,h$ sera déterminée par la condition que $n+2$ racines de l'équation

$$(z^2-1)\,\frac{dy}{dz}=0$$

vérifient celle-ci:

$$[k_{n+2}\,h\,z^{n+2}+y-V_0\,h]^2-L_1^2=0,$$

qui se réduit à

$$y^2+2\,y\,(k_{n+2}\,z^{n+2}-V_0)\,h-L_1^2=0,$$

si l'on supprime ses termes contenant h^2, et enfin à

$$(y^2-L_1^2)\,y+2\,y^2\,(k_{n+2}\,z^{n+2}-V_0)\,h=0,$$

quand on la multiplie par y. Mais, d'après ce que nous avons trouvé dans le § 5, le polynome y, déterminé par la formule

$$y = k_{n+1}\left[\left(\frac{z + \sqrt{(z^2-1)}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{z - \sqrt{(z^2-1)}}{2}\right)^{n+1}\right],$$

vérifie l'équation $y^2 - L^2 = 0$ pour toutes les racines de l'équation

$$(z^2 - 1)\frac{dy}{dz} = 0,$$

L étant égal à $\pm\frac{k_{n+1}}{2^n}$; donc, pour ces valeurs de z, on peut dans l'équation précédente remplacer y^2 par L^2, ce qui donne

$$(L^2 - L_1^2)\, y + 2\, L^2\, (k_{n+2}\, z^{n+2} - V_0)\, h = 0.$$

Or, cette équation ne peut être vérifiée par les $n+2$ racines de l'équation

$$(z^2 - 1)\frac{dy}{dz} = 0$$

que dans le cas où ces deux équations sont identiques entre elles; car elles sont du même degré $n+2$ (ce qu'on voit en remarquant que y est du degré $n+1$, V_0 du degré n). Donc, leurs premiers membres sont égaux, à un facteur constant près, et par conséquent,

$$(L^2 - L_1^2)\, y + 2\, L^2\, (k_{n+2}\, z^{n+2} - V_0)\, h - C\,(z^2 - 1)\frac{dy}{dz} = 0,$$

où C est une constante.

Mais comme y est du degré $n+1$, manquant du terme avec la puissance z^n, et que le degré de V_0 n'est pas supérieur à n, on voit que dans cette formule le coefficient de z^{n+1} ne se réduit à 0 que dans le cas où

$$L^2 - L_1^2 = 0,$$

et par conséquent, L étant égal à $\pm\frac{k_{n+1}}{2^n}$,

(15) $$L_1 = \pm\frac{k_{n+1}}{2^n}.$$

D'après cela, l'équation précédente nous donne

$$V_0 = k_{n+2}\, z^{n+2} - \frac{C}{2h\,L^2}(z^2 - 1)\frac{dy}{dz}.$$

Nous trouvons la constante $\frac{C}{2h\,L^2}$, en observant que V_0 ne doit pas contenir de terme avec z^{n+2}. Comme dans la valeur de $(z^2-1)\frac{dy}{dz}$, où

$$y = k_{n+1}\left[\left(\frac{z+\sqrt{(z^2-1)}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{z-\sqrt{(z^2-1)}}{2}\right)^{n+1}\right],$$

nous trouvons le terme $(n+1)\,k_{n+1}\,z^{n+2}$, cela suppose

$$k_{n+2} - \frac{(n+1)\,C k_{n+1}}{2h\,L^2} = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{C}{2h\,L^2} = \frac{k_{n+2}}{(n+1)\,k_{n+1}}.$$

En mettant cette valeur de $\frac{C}{2h\,L^2}$ dans l'expression trouvée de V_0, nous obtenons

$$V_0 = k_{n+2}\left(z^{n+2} - \frac{z^2-1}{(n+1)\,k_{n+1}}\,\frac{dy}{dz}\right).$$

C'est ainsi que nous trouvons la valeur de V_0, exacte jusqu'au premier degré de h, ce qui, d'après (12), nous donne cette valeur de V, exacte jusqu'à h^2,

$$(16)\qquad V = k_{n+1}\,z^{n+1} - y + k_{n+2}\left(z^{n+2} - \frac{z^2-1}{(n+1)\,k_{n+1}}\,\frac{dy}{dz}\right)h$$

où, comme nous l'avons vu, y a cette valeur

$$y = k_{n+1}\left[\left(\frac{z+\sqrt{(z^2-1)}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{z-\sqrt{(z^2-1)}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

§ 7. Sans nous arrêter sur cette approximation de V, nous allons montrer en général comment on trouvera sa valeur exacte jusqu'au degré h^{2l}, quand on a sa valeur aux quantités de l'ordre h^l près.

Si nous dénotons par V_1 cette dernière valeur de V, sa valeur exacte peut être mise sous cette forme

$$V = V_1 + V_2\,h^l,$$

V_2 étant un polynome du degré n, dont les coefficients restent finis pour $h=0$. D'après la propriété de V (§ 5), le polynome inconnu V_2 sera déterminé par la condition que les équations

$$[k_{n+1}\,z^{n+1} + k_{n+2}\,h\,z^{n+2} + k_{n+3}\,h^2\,z^{n+3}\ldots - V_1 - V_2\,h^l]^2 - L_2{}^2 = 0,$$

$$(z^2-1)\,\frac{d\,[k_{n+1}\,z^{n+1} + k_{n+z}\,h\,z^{n+2} + k_{n+3}\,h^2\,z^{n+3} + \ldots - V_1 - V_2\,h^l]}{dz} = 0$$

aient $n+2$ racines communes comprises entre les limites $z=-1$ et $z=+1$. Mais, si l'on ne tient compte que des quantités de l'ordre moins élevé que h^{2l}, on peut supprimer dans ces équations les termes qui contiennent h^{2l}, h^{2l+1}, h^{2l+2}..... et présenter le reste sous cette forme

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} [y_1+Sh^l-V_2h^l]^2-L_2^2=0, \\ (z^2-1)\dfrac{d\,[y_1+Sh^l-V_2h^l]}{dz}=0, \end{array}\right.$$

en faisant pour abréger

$$(18)\left\{\begin{array}{l} y_1=k_{n+1}z^{n+1}+k_{n+2}hz^{n+2}+k_{n+3}h^2z^{n+3}+\ldots+k_{n+l}h^{l-1}z^{n+l}-V_1, \\ S=k_{n+l+1}z^{n+l+1}+k_{n+l+2}hz^{n+l+2}+\ldots+k_{n+2l}h^{l-1}z^{n+2l}. \end{array}\right.$$

Quant aux équations qui déterminent V_1, valeur de V exacte seulement jusqu'à h^l, nous pouvons les tirer des formules (17), en rejetant les termes qui contiennent h^l, h^{l+1}, h^{l+2},..... Ainsi, à la valeur de h^l près, nous aurons pour

$$y_1=k_{n+1}z^{n+1}+k_{n+2}hz^{n+2}+k_{n+3}h^2z^{n+3}+\ldots+k_{n+l}h^{l-1}z^{n+l}-V_1$$

les équations suivantes:

$$y_1^2-L_1^2=0,\quad (z^2-1)\frac{dy_1}{dz}=0,$$

dans lesquelles L_1 est la valeur de L_2 exacte jusqu'à h^l; ce qui suppose l'équation

$$(19)\qquad L_2=L_1+\lambda h^l.$$

En passant à la détermination de V_2, nous remarquons, comme dans le § précédent, que dans les conditions qui déterminent V_2h^l, aux quantités de l'ordre h^{2l} près, la dernière des équations (17) peut être remplacée par celle-ci:

$$(z^2-1)\frac{dy_1}{dz}=0,$$

et comme dans ces conditions il ne s'agit que des racines qui restent finies pour $h=0$, cette équation, à son tour, peut être remplacée par une autre de la forme

$$(z^2-1)W=0,$$

W étant une fonction entière choisie de manière à ce que l'équation $W=0$, à h^l près, contienne toutes les racines de l'équation $\frac{dy_1}{dz} = 0$ qui ne deviennent pas infinies quand on fait $h = 0$ *). Comme ces racines ne sont qu'au nombre n, car, pour $h = 0$, le polynome y_1, que nous considérons maintenant, devient égal à celui trouvé dans le § 5 (10) et qui n'est que du degré $n + 1$, nous concluons que le degré de l'équation $W = 0$ peut être abaissé jusqu'à n. Dans ce cas l'équation

$$(z^2 - 1)\, W = 0$$

sera du degré $n + 2$, et d'après les conditions qui déterminent V_2 et y_1, toutes ses $n + 2$ racines doivent vérifier ces deux équations

$$[y_1 + S h^l - V_2 h^l]^2 - L_2^{\,2} = 0,$$
$$y_1^{\,2} - L_1^{\,2} = 0,$$

la première avec une précision allant aux termes de l'ordre h^{2l}, et la seconde jusqu'à h^l.

En mettant dans la première de ces équations la valeur L_2 d'après (19) et en supprimant les termes qui contiennent h^{2l}, nous obtenons l'égalité

$$y_1^{\,2} + 2\, y_1 (S - V_2)\, h^l - L_1^{\,2} - 2\,\lambda\, L_1 h^l = 0$$

qui, étant multipliée par y_1, nous donne

$$(y_1^{\,2} - L_1^{\,2})\, y_1 + 2\, y_1^{\,2} (S - V_2)\, h^l - 2\,\lambda\, L_1\, h^l y_1 = 0,$$

équation qui, à h^{2l} près, sera vérifiée par toutes les $n + 2$ racines de l'équation

$$(z^2 - 1)\, W = 0.$$

Mais pour ces racines, à h^l près, nous avons aussi l'équation

$$y_1^{\,2} - L_1^{\,2} = 0$$

---

*) Voici comment on peut séparer les racines de l'équation $u + hv = 0$, qui, pour $h = 0$, ne deviennent pas infinies:

Si l'équation $u = 0$ n'a pas de racines égales, les racines de l'équation $u + hv = 0$, qui ne deviennent pas infinies pour $h = 0$, sont données par celle-ci: $u = 0$, avec une précision jusqu'au premier degré de h. Pour avoir ces racines exactes jusqu'à h^2, on prendra $u + hR = 0$, où R est le reste de la division de v par u; pour l'approximation jusqu'à h^3, on prendra $u + hR_1 = 0$, où R_1 est le reste de la division de v par $u + hR$, et ainsi de suite. Dans le cas où l'équation $u = 0$ a des racines égales, la même méthode est applicable, seulement l'approximation ne va pas si vite.

qui, étant multipliée par $2(S-V_2)h^l$ et retranchée de l'équation que nous venons de trouver, nous donne, avec une précision jusqu'à h^{2l}, l'équation suivante:

$$(y_1^2-L_1^2)y_1+2L_1^2(S-V_2)h^l-2\lambda L_1 h^l y_1=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$V_2 h^l+\frac{\lambda h^l}{L_1}y_1-Sh^l-\frac{(y_1^2-L_1^2)y_1}{2L_1^2}=0.$$

Comme cette équation, aux termes de l'ordre h^{2l} près, a lieu pour toutes les racines de l'équation

$$(z^2-1)\,W=0,$$

avec le même degré de précision, son premier membre doit être divisible par $(z^2-1)\,W$, et par conséquent, si on dénote par R_0 et R_1 les restes qu'on trouve en divisant $y_1\,h^l$ et $Sh^l+\frac{(y_1^2-L_1^2)y_1}{2L_1^2}$ par $(z^2-1)\,W$, l'expression

$$V_2 h^l+\frac{\lambda}{L_1}R_0-R_1,$$

dont les termes sont d'un degré moins élevé que $(z^2-1)\,W$, doit être identique avec zéro, aux quantités h^{2l} près. Donc, avec ce degré d'approximation, on aura

$$V_2 h^l+\frac{\lambda}{L_1}R_0-R_1=0,$$

et par conséquent

$$V_2 h^l=R_1-\frac{\lambda}{L_1}R_0,$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$V_2 h^l=r+\left(q-\frac{\lambda}{L_1}\right)R_0,$$

en dénotant par q et r le quotient et le reste qu'on trouve en divisant R_1 par R_0.

Or, il n'est pas difficile de s'assurer que cette équation ne peut être vérifiée qu'en prenant

$$\frac{\lambda}{L_1}=q,$$

et par conséquent,

$$V_2 h^l=r.$$

En effet, le polynome cherché V_2 est tout au plus du degré n; la même chose a lieu par rapport à r: cette fonction est le reste de la division de R_1 par R_0, et R_0, lui même, est le reste de la division de $y_1 h^l$ par $(z^2 - 1)\, W$; donc le degré de r est inférieur au moins de deux unités à celui de $(z^2 - 1)\, W$, qui est du degré $n + 2$. Au contraire, le reste R_0 est nécessairement d'un degré plus élevé que n; car, si l'on fait $h = 0$, comme nous l'avons remarqué plus haut, le polynome y_1 se réduit à y, donné par la formule (10), et alors $(z^2 - 1)\, W$ devient $(z^2 - 1)\,\frac{dy}{dz}$; mais, d'après la valeur de y, on voit que le reste de la division de y par $(z^2 - 1)\,\frac{dy}{dz}$ contient un terme avec la puissance z^{n+1}.

Donc, pour trouver la fonction $V_2 h^l$ exacte jusqu'à h^{2l}, on procédera de la manière suivante: on divisera les fonctions

$$y_1 h^l, \quad S h^l + \frac{(y_1{}^2 - L_1{}^2)\, y_1}{2 L_1{}^2}$$

par $(z^2 - 1)\, W$; on divisera le second reste par le premier; le reste de la dernière division est la valeur de $V_2 h^l$. On trouve facilement le polynome V d'après la fonction $V_2 h^l$, en remarquant que $V = V_1 + V_2 h^l$.

Le quotient de la dernière division nous donne aussi une valeur très importante; ce quotient, que nous avons dénoté par q, est égal, comme nous l'avons vu, à la fraction $\frac{\lambda}{L_1}$; par conséquent $\lambda = q L_1$, et d'après (19),

$$L_2 = L_1\, (1 + q h^l).$$

Nous trouvons ainsi la constante L_2 de l'équation (17), qui nous donne la limite des écarts du polynome V relativement à la fonction

$$k_{n+1}\, z^{n+1} + k_{n+2}\, h z^{n+2} + k_{n+3}\, h^2 z^{n+3} + \ldots\ldots,$$

entre $z = -1$ et $z = +1$.

D'après la méthode que nous venons d'exposer, on peut toujours passer d'une valeur approchée de V à une autre plus précise.

§ 8. Nous allons maintenant appliquer cette méthode à la solution de cette question, très importante pour la théorie des parallélogrammes:

«Trouver les modifications qu'on doit apporter aux coefficients de la valeur approchée de fx

$$f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3} f'''(a) + \frac{(x-a)^4}{1.2.3.4} f^{\text{IV}}(a),$$

«pour que cette valeur, depuis $x = a - h$, jusqu'à $x = a + h$, s'écarte le «moins possible de fx».

Nous supposons la quantité h assez petite pour qu'on puisse développer les corrections cherchées des coefficients suivant les puissances ascendantes de h; de plus, nous excluons le cas, où $f^{\text{v}}(x)$ devient zéro pour $x=a$.

D'après ce que nous avons dit dans le § 3, ces corrections seront données par la formule

$$Vh^5,$$

où V, comme fonction de $z=\frac{x-a}{h}$, sera déterminée par la condition de représenter un polynome du quatrième degré, pour lequel la différence

$$k_5\, z^5 + k_6\, h z^6 + k_7\, h^2 z^7 + \ldots - V$$

s'écarte le moins possible de zéro depuis $z=-1$, jusqu'à $z=+1$.

Les coefficients k_5, k_6, k_7, ... sont respectivement égaux à

$$\frac{f^{\text{v}}(a)}{1.2.3.4.5}, \quad \frac{f^{\text{vi}}(a)}{1.2.3...6}, \quad \frac{f^{\text{vii}}(a)}{1.2.3...7}, \ldots\ldots$$

L'équation (16) du § 6 nous donne la valeur de V exacte jusqu'à h^2 sous cette forme

$$V = k_5\, z^5 - y + k_6 \left(z^6 - \frac{z^2-1}{5k_5}\frac{dy}{dz}\right) h,$$

où

$$y = k_5 \left[\left(\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^5 + \left(\frac{z-\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^5\right].$$

D'après ces formules nous trouvons

$$y = k_5\left(z^5 - \frac{5}{4}z^3 + \frac{5}{16}z\right),$$

$$V = k_5\left(\frac{5}{4}z^3 - \frac{5}{16}z\right) + k_6\left(\frac{7}{4}z^4 - \frac{13}{16}z^2 + \frac{1}{16}\right)h.$$

Quant à la valeur de L_1 qui détermine la limite des écarts de V et de la fonction $k_5 z^5 + k_6\, h z^6 + k_7\, h^2 z^7 + \ldots\ldots$, d'après (15), nous obtenons

$$L_1 = \pm\frac{k_5}{16}.$$

En passant à la détermination de V, exacte jusqu'à h^4, nous remarquons que les fonctions désignées dans le § précédent par V_1, y_1, S ont maintenant les valeurs suivantes:

$$V_1 = k_5\left(\frac{5}{4}z^3 - \frac{5}{16}z\right) + k_6\left(\frac{7}{4}z^4 - \frac{13}{16}z^2 + \frac{1}{16}\right)h,$$

$$y_1 = k_5 z^5 + k_6 h z^6 - k_5\left(\frac{5}{4}z^3 - \frac{5}{16}z\right) - k_6\left(\frac{7}{4}z^4 - \frac{13}{16}z^2 + \frac{1}{16}\right)h$$

$$= k_5\left(z^5 - \frac{5}{4}z^3 + \frac{5}{16}z\right) + k_6\left(z^6 - \frac{7}{4}z^4 + \frac{13}{16}z^2 - \frac{1}{16}\right)h;$$

$$S = k_7 z^7 + k_8 h z^8.$$

D'après les valeurs de V_1, y_1, S, la méthode du § précédent donne

$$V = V_1 + V_2 h^2,$$

où V_2 est un polynome qu'on trouvera à l'aide des procédés suivants:

1) On cherchera l'équation du 4-ème degré qui, exacte jusqu'à h^2, contient toutes les racines de l'équation

$$\frac{dy_1}{dz} = k_5\left(5z^4 - \frac{15}{4}z^2 + \frac{5}{16}\right) + k_6\left(6z^5 - 7z^3 + \frac{13}{8}z\right)h = 0,$$

qui restent finies, quand on fait $h = 0$. Comme le reste de la division de $k_6\left(6z^5 - 7z^3 + \frac{13}{8}z\right)$ par $k_5\left(5z^4 - \frac{15}{4}z^2 + \frac{5}{16}\right)$ est égal à $k_6\left(-\frac{5}{2}z^3 + \frac{5}{4}z\right)$, d'après la note du § 7, nous concluons que l'équation qui remplit ces conditions est la suivante:

$$k_5\left(5z^4 - \frac{15}{4}z^2 + \frac{5}{16}\right) + k_6\left(-\frac{5}{2}z^3 + \frac{5}{4}z\right)h = 0;$$

et par conséquent, la fonction que nous avons représentée dans le § précédent par W, a cette valeur

$$W = k_5\left(5z^4 - \frac{15}{4}z^2 + \frac{5}{16}\right) + k_6\left(-\frac{5}{2}z^3 + \frac{5}{4}z\right)h.$$

2) On cherchera le reste de la division de $y_1 h^2$ par $(z^2 - 1)\,W$. Pour les valeurs de y_1 et W que nous avons, et en supprimant les termes qui contiennent h^4, h^5, ..., on trouve ce reste égal à

$$k_5\left(z^5 - \frac{5}{4}z^3 + \frac{5}{16}z\right)h^2.$$

3) On divisera la fonction

$$Sh^2 + \frac{(y_1^2 - L_1^2)\, y_1}{2\, L_1^2}$$

par $(z^2 - 1)\, W$; dans le cas que nous traitons, le reste de cette division, exacte jusqu'à h^4, a cette valeur

$$\left[\frac{7\, k_5\, k_7 + k_6^2}{4\, k_5}\, z^5 - \frac{13\, k_5\, k_7 + 6\, k_6^2}{16\, k_5}\, z^3 + \frac{k_5\, k_7 + 2\, k_6^2}{16\, k_5}\, z\right] h^2$$

$$+ \left[\frac{36\, k_5^2 k_8 + 2\, k_5 k_6 k_7 - k_6^3}{16 k_5^2}\, z^4 - \frac{87\, k_5^2 k_8 + 10\, k_5 k_6 k_7 - 5\, k_6^3}{64 k_5^2}\, z^2 + \frac{7\, k_5^2 k_8 + 2 k_5 k_6 k_7 - k_6^3}{64\, k_5^2}\right] h^3.$$

4) On divisera ce dernier reste par le premier

$$k_5 \left(z^5 - \frac{5}{4}\, z^3 + \frac{5}{16}\, z\right) h^2.$$

Cette division fournira le quotient

$$\frac{7\, k_5 k_7 + k_6^2}{4\, k_5^2}$$

et le reste

$$\frac{36\, k_5^2 k_8 + 2\, k_5 k_6 k_7 - k_6^3}{16 k_5^2}\, h^3 z^4 + \frac{22\, k_5 k_7 - k_6^2}{16 k_5}\, h^2 z^3 - \frac{87\, k_5^2 k_8 + 10\, k_5 k_6 k_7 - 5\, k_6^3}{64 k_5^2}\, h^3 z^2$$

$$- \frac{31\, k_5 k_7 - 3\, k_6^2}{64 k_5}\, h^2 z + \frac{7\, k_5^2 k_8 + 2\, k_5 k_6 k_7 - k_6^3}{64\, k_5^2}\, h^3;$$

d'où l'on conclura :

1) La quantité $V_2 h^2$, exacte jusqu'à h^4, aura pour valeur

$$\frac{36 k_5^2 k_8 + 2\, k_5 k_6 k_7 - k_6^3}{16 k_5^2}\, h^3 z^4 + \frac{22 k_5 k_7 - k_6^2}{16 k_5}\, h^2 z^3 - \frac{87\, k_5^2 k_8 + 10\, k_5 k_6 k_7 - 5\, k_6^3}{64\, k_5^3}\, h^3 z^2$$

$$- \frac{31\, k_5 k_7 - 3 k_6^2}{64\, k_5}\, h^2 z + \frac{7 k_5^2 k_8 + 2\, k_5 k_6 k_7 - k_6^3}{64 k_5^2}\, h^3,$$

et par conséquent, on obtiendra, avec le même degré de précision,

$$V = V_1 + V_2 h^2 = k_5 \left(\frac{5}{4}\, z^3 - \frac{5}{16}\, z\right) + k_6 \left(\frac{7}{4}\, z^4 - \frac{13}{16}\, z^2 + \frac{1}{16}\right) h + V_2 h^2$$

$$= \left(\frac{7}{4}\, k_6 h + \frac{36 k_5^2 k_8 + 2\, k_5 k_6 k_7 - k_6^3}{16 k_5^2}\, h^3\right) z^4 + \left(\frac{5}{4}\, k_5 + \frac{22 k_5 k_7 - k_6^2}{16 k_5}\, h^2\right) z^3$$

$$- \left(\frac{13}{16}\, k_6 h + \frac{87 k_5^2 k_8 + 10 k_5 k_6 k_7 - 5\, k_6^3}{64 k_5^2}\, h^3\right) z^2 - \left(\frac{5}{16}\, k_5 + \frac{31 k_5 k_7 - 3 k_6^2}{64 k_5}\, h^2\right) z$$

$$+ \frac{1}{16}\, k_6 h + \frac{7 k_5^2 k_8 + 2\, k_5 k_6 h_7 - k_6^3}{64\, k_5^2}\, h^3.$$

2) La valeur de la constante L_2 qui détermine la limite de la déviation du polynome V de la fonction

$$k_5 z^5 + k_6 h z^6 + k_7 k^2 z^7 + \ldots\ldots,$$

entre $z = -1$, $z = +1$, est égale à

$$L_1\left(1 + \frac{7k_5k_7 + k_6^2}{4k_5^2} h^2\right) = \pm \frac{k_5}{16}\left(1 + \frac{7k_5k_7 + k_6^2}{4k_5^2} h^2\right).$$

En multipliant la valeur trouvée de V par h^5 et remplaçant z par $\frac{x-a}{h}$, nous obtenons la formule

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{7}{4} k_6 h^2 + \frac{36k^2{}_5k_8 + 2k_5k_5k_7 - k_6^3}{16k_5^2} h^4 + \ldots\ldots\right)(x-a)^4 \\
&+\left(\frac{5}{4} k_5 h^2 + \frac{22k_5k_7 - k_6^2}{16k_5} h^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots\right)(x-a)^3 \\
&-\left(\frac{13}{16} k_6 h^4 + \frac{87k^2{}_5k_8 + 10k_5k_6k_7 - 5k_6^3}{64k^2{}_5} h^6 + \ldots\right)(x-a)^2 \\
&-\left(\frac{5}{16} k_5 h^4 + \frac{31k_5k_7 - 3k_6^2}{64k_5} h^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots\right)(x-a) \\
&+\frac{1}{16} k_6 h^6 + \frac{7k^2{}_5k_8 + 2k_5h_6k_7 - k_6^3}{64k_5^2} h^8 + \ldots\ldots,
\end{aligned}$$

dont les coefficients de $(x-a)^4$, $(x-a)^3$, ... déterminent les corrections qu'on doit faire dans ceux de la valeur approchée de $f(x)$

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{1.2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{1.2.3}(x-a)^3 + \frac{f^{\text{IV}}(a)}{1.2.3.4}(x-a)^4,$$

quand on cherche à diminuer le plus possible la limite de ses erreurs entre $x = a - h$, $x = a + h$. Quant à la valeur de cette limite, d'après ce que nous avons trouvé relativement à V, elle est égale à $L_2 h^5 = \pm \frac{k_5}{16}\left(1 + \frac{7k_5k_7 + k_6^2}{4k_5^2} h^2\right) h^5$.

§ 9. Jusqu'à présent nous n'avons cherché la valeur approchée des fonctions que sous la condition du minimum de la limite des erreurs dans l'intervalle donné. Mais souvent il est très important que l'erreur, pour les limites de l'intervalle, se réduise à zéro. Or, il n'est pas difficile de s'assurer que ce cas, tant que l'intervalle est assez petit, se résout aussi par les méthodes que nous venons de donner.

Soit fx une fonction dont on cherche la valeur approchée sous la forme d'un polynome u du degré n, assujéti entre les limites $x = \alpha - \gamma$, $x = \alpha + \gamma$, aux conditions mentionnées plus haut. Comme la différence $f(x) - u$ doit se réduire à zéro pour $x = \alpha - \gamma$, $x = \alpha + \gamma$, il ne restera dans le polynome u que $n-1$ coefficients arbitraires qui, d'après la propriété du *minimum* que nous cherchons, seront déterminés par cette condition:

«Parmi les valeurs les plus grandes et les plus petites de la différence «$fx-u$, entre les limites $x=\alpha-\gamma$, $x=\alpha+\gamma$, on trouve au moins n «fois la même valeur numérique», ce qui suppose (§ 3) que pour certaine valeur de l les équations

$$(fx-u)^2-l^2=0,\quad \frac{d(fx-u)}{dx}=0$$

ont n racines communes, comprises entre les limites $x=\alpha-\gamma$, $x=\alpha+\gamma$; par conséquent, si l'on remplace ces limites par d'autres plus étendues, $x=a-h$, $x=a+h$, et choisies de manière à ce que pour ces limites la différence $fx-u$ devienne égale à $+l$ ou $-l$, les équations

$$(20)\qquad (fx-u)^2-l^2=0,\quad (x-a+h)\,(x-a-h)\,\frac{d(fx-u)}{dx}=0$$

auront $n+2$ racines communes entre les limites $x=a-h$, $x=a+h$. Donc, pour ces limites, le polynome $U=u$ donne la solution des équations (2), dont nous nous sommes occupé dans les §§ précédents, et par conséquent, *vice versa*, la solution de ces équations nous donnera le polynome u pour certaines valeurs de $\alpha-\gamma$, $\alpha+\gamma$, qu'on trouvera facilement en remarquant que, d'après la propriété du minimum cherché, les valeurs $x=\alpha-\gamma$, $x=\alpha+\gamma$, comprises entre $a-h$, $a+h$, vérifient l'équation

$$fx-u=0,$$

et, entre ces deux valeurs de x, il y a n racines communes des équations

$$(fx-u)^2-l^2=0,\quad \frac{d(fx-u)}{dx}=0.$$

Pour montrer une application de ce que nous venons de voir, nous allons chercher le polynome u qui, étant du degré n, donne la valeur exacte de $fx=k_{n+1}\,x^{n+1}$ pour $x=\alpha-\gamma$, $x=\alpha+\gamma$, et ne s'écarte, entre ces limites, que le moins possible de la fonction $fx=k_{n+1}\,x^{n+1}$. Pour cette valeur de fx, et $y=\frac{k_{n+1}\,x^{n+1}-u}{h^{n+1}}$, $x=a+hz$, $L=\frac{l}{h^{n+1}}$, les équations (20) deviennent

$$y^2-L^2=0,\quad (z^2-1)\,\frac{dy}{dz}=0,$$

dont les $n+2$ racines communes seront comprises entre $z=-1$, $z=+1$.

Or, $y=\frac{k_{n+1}\,(a+hz)^{n+1}-u}{h^{n+1}}$ étant un polynome du degré $n+1$, dont le coefficient de z^{n+1} est égal à k_{n+1}, on voit, d'après (10), que cela ne peut avoir lieu à moins qu'on n'ait

$$y = k_{n+1}\left[\left(\frac{z+\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{z-\sqrt{z^2-1}}{2}\right)^{n+1}\right], \quad L = \pm\frac{k_{n+1}}{2^n};$$

d'où, en remplaçant y par $\frac{k\,(a+hz)^{n+1}-u}{h^{n+1}}$, z par $\frac{x-a}{h}$, L par $\frac{l}{h^{n+1}}$, nous obtenons

$$u = k_{n+1}x^{n+1} - k_{n+1}\left[\left(\frac{x-a+\sqrt{(x-a)^2-h^2}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{x-a-\sqrt{(x-a)^2-h^2}}{2}\right)^{n+1}\right],$$

$$l = \pm\frac{k_{n+1}\,h^{n+1}}{2^n}.$$

En passant à la détermination des valeurs de $\alpha-\gamma$, $\alpha+\gamma$, pour lesquelles ce polynome donne le *minimum* cherché, nous remarquons que l'équation

$$k_{n+1}x^{n+1} - u = k_{n+1}\left[\left(\frac{x-a+\sqrt{(x-a)^2-h^2}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{x-a-\sqrt{(x-a)^2-h^2}}{2}\right)^{n+1}\right] = 0,$$

qui se réduit à celle-ci:

$$\cos\,(n+1)\,\varphi = 0,$$

quand on fait $x-a = h\cos\varphi$, aura les racines suivantes:

$$a - h\cos\frac{\pi}{2n+2},\quad a-h\cos\frac{3\pi}{2n+2},\,\ldots\ldots\, a+h\cos\frac{3\pi}{2n+2},\quad a+h\cos\frac{\pi}{2n+2}.$$

Or, comme dans cette série on ne trouve que les deux valeurs

$$a-h\cos\frac{\pi}{2n+2},\quad a+h\cos\frac{\pi}{2n+2},$$

entre lesquelles sont comprises les n racines de l'équation

$$\frac{d[k_{n+1}x^{n+1}-u]}{dx} = \frac{d\,k_{n+1}\left[\left(\frac{x-a+\sqrt{(x-a)^2-h^2}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{x-a-\sqrt{(x-a)^2-h^2}}{2}\right)^{n+1}\right]}{dx} = 0,$$

qui se réduit à $\frac{\sin\,(n+1)\,\varphi}{\sin\varphi} = 0$ pour $\frac{x-a}{h} = \cos\varphi$, nous concluons que $\alpha-\gamma$, $\alpha+\gamma$ ne peuvent avoir d'autres valeurs que celles-ci:

$$\alpha-\gamma = a - h\cos\frac{\pi}{2n+2},\quad \alpha+\gamma = a+h\cos\frac{\pi}{2n+2},$$

et par conséquent, $a = \alpha$, $h = \frac{\gamma}{\cos\frac{\pi}{2\,n+2}}$.

En mettant ces valeurs de a et h dans la valeur trouvée de u, l'on a

$$u = k_{n+1} x^{n+1} - k_{n+1} \left[\left(\frac{x-\alpha}{2} + \sqrt{\frac{(x-\alpha)^2}{4} - \frac{\gamma^2}{4\cos^2 \frac{\pi}{2\pi+2}}} \right)^{n+1} + \left(\frac{x-\alpha}{2} - \sqrt{\frac{(x-\alpha)^2}{4} - \frac{\gamma^2}{4\cos^2 \frac{\pi}{2n+2}}} \right)^{n+1} \right].$$

Telle est la forme générale du polynome du degré n qui devient égal à $k_{n+1}\, x^{n+1}$ pour $x = \alpha - \gamma$, $x = \alpha + \gamma$ et s'écarte le moins possible de cette fonction entre ces limites. Quant à la limite de ces écarts, nous avons trouvé

$$l = \pm \frac{k_{n+1}}{2^n} h^{n+1}, \quad h = \frac{\gamma}{\cos \frac{\pi}{2n+2}};$$

donc, la constante l, qui détermine cette limite, a la valeur suivante:

$$l = \pm \frac{k_{n+1}\, \gamma^{n+1}}{2^n \cos^{n+1} \frac{\pi}{2n+2}}.$$

Comme la différence $k_{n+1}\, x^{n+1} - u$, où u est un polynome arbitraire du degré n, est la forme générale d'une fonction entière, dont le terme affecté de la plus haute puissance de x est égal à $k_{n+1}\, x^{n+1}$, les formules que nous venons de trouver nous conduisent à ce théorème:

Théorème.

Entre deux racines de l'équation

$$fx = Ax^{n+1} + Bx^n + Cx^{n-1} + \ldots\ldots = 0$$

$x = a$, $x = b$, *la valeur numérique de* fx *ne peut rester inférieure à* $2A\left(\frac{a-b}{4\cos\frac{\pi}{2n+2}}\right)^{n+1}$

En traitant de la même manière le cas de $fx = px^5 + qx^7$, γ étant très petit, nous trouvons, d'après les formules du § 8, que, à la quantité γ^8 près, le polynome u du quatrième degré qui devient égal à $px^5 + qx^7$ pour $x = -\gamma$, $x = +\gamma$, et s'écarte le moins possible de cette fonction, entre $x = -\gamma$, $x = +\gamma$, a la valeur suivante:

$$u = \left(\frac{5p}{4\cos^2 18^0} \gamma^2 + \frac{11 - \sin 18^0 \cos 54^0}{8 \cos^4 18^0} q \gamma^4 \right) x^3$$

$$- \left(\frac{5p}{16 \cos^4 18^0} \gamma^4 + \frac{31 - 4 \sin 18^0 \cos 54^0}{64 \cos^6 18^0} q \gamma^6 \right) x.$$

Quant à la limite de déviation de ce polynome de la fonction $px^5 + qx^7$, entre $x = -\gamma$, $x = +\gamma$, on la trouve égale à

$$\frac{p\gamma^5}{16\cos^5 18^0} + \frac{7 - \sin 18^0 \cos 54^0}{64 \cos^7 18^0} q\gamma^7.$$

§ 10. D'après les formules que nous venons de trouver, il est facile de déterminer les éléments les plus avantageux du parallélogramme dans tous les cas possibles. Mais ce n'est pas le seul résultat qu'on puisse tirer de nos formules. Nous avons vu qu'elles donnent certains théorèmes d'Algèbre dont la démonstration serait, peut être, impossible à l'aide des méthodes ordinaires. Il y a aussi des questions de Géometrie dont la solution demande des méthodes d'approximation telles que celle dont nous nous sommes occupé.

En voici un exemple. Soient deux courbes données, l'une contenant n paramètres arbitraires qui permettent, par leur choix convenable, de disposer à volonté des abscisses de n points d'intersection de ces deux courbes dans l'intervalle $x = a - h$, $x = a + h$. Il est évident que, dans cet intervalle, les courbes seront plus ou moins rapprochées l'une de l'autre selon la position de leurs points d'intersection. Quel est donc la disposition des points communs des deux courbes, entre $x = a - h$, $x = a + h$, qui rende *minimum* la limite de leur déviation dans cet intervalle?

Cette question tient évidemment à la méthode d'approximation dont nous nous sommes occupé dans les §§ précédents. L'application qu'on peut faire ici de nos formules donne des résultats très intéressants.

Soit

$$y = f(x)$$

l'équation de la courbe avec tous ses paramètres donnés, et

$$Y = F(x, h)$$

celle dont les n paramètres arbitraires sont choisis d'après la condition du *minimum* que nous cherchons, entre les limites $x = a - h$, $x = a + h$.

Si l'on prend $h = 0$, la dernière courbe devient osculatrice à la première, au point $x = a$, et excepté certains points singuliers le contact ne sera que de l'ordre $n - 1$, de sorte qu'on aura

(21) $$\frac{d^n F(x,h)}{dx^n} - \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \text{à une valeur finie,}$$

en même temps que les équations

$$F(x, h) = f(x),\ \frac{dF(x,h)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}, \ldots\ldots \frac{d^{n-1}F(x,h)}{dx^{n-1}} = \frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}},$$

pour $x = a$, $h = 0$.

D'après cela, en supposant que les fonctions

$$f(x),\ \frac{df(x)}{dx},\ \frac{d^2 f(x)}{dx^2},\ldots\ldots\frac{d^n f(x)}{dx^n},$$

$$F(x,h),\ \frac{d\,F(x,h)}{dx},\ \frac{d^2\,F(x,h)}{dx^2},\ldots\ldots\frac{d^n\,F(x,h)}{dx^n}$$

restent continues dans le voisinage de $h=0$, $x=a$, nous concluons que, pour h assez petit, et pour une valeur de x entre les limites $x=a-h$, $x=a+h$, les fonctions

$$Y-y,\ \frac{d(Y-y)}{dx},\ \frac{d^2(Y-y)}{dx^2},\ldots\ldots\frac{d^n(Y-y)}{dx^n}$$

ne deviennent pas infinies. De plus, on peut mettre la fonction

$$\frac{d^n(Y-y)}{dx^n}=\frac{d^n\,F(x,h)}{dx^n}-\frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

sous la forme

$$N+\psi(x),$$

en faisant pour abréger

$$N=\frac{d^n\,F(a,o)}{da^n}-\frac{d^n f(a)}{da^n},$$

$$\psi(x)=\frac{d^n\,F(x,h)}{dx^n}-\frac{d^n\,F(a,o)}{da^n}-\frac{d^n f(x)}{dx^n}+\frac{d^n f(a)}{da^n}.$$

D'après cela, pour x pris entre $x=a-h$ et $x=a+h$, h étant assez petit, la série de Taylor nous donne

$$Y-y=A+B(x-a)+C(x-a)^2+\ldots+H(x-a)^{n-1}+\frac{N+\psi(a+\theta(x-a))}{1.2\ldots n}(x-a)^n,$$

où les quantités $A, B, C,\ldots H, N$ sont indépendantes de x et dont, de plus, la dernière

$$N=\frac{d^n\,F(a,o)}{da^n}-\frac{d^n f(a)}{da^n},$$

d'après (21), diffère de zéro. Quant à la fonction $\psi(a+\theta(x-a))$, pour les valeurs de x que nous considérons, elle devient infiniment petite en même temps que h.

Cette formule nous montre que pour x entre les limites $x=a-h$ et $x=a+h$, à l'ordre de grandeur h^n inclusivement près, la valeur de $Y-y$ sera égale à celle du polynome

$$A+B(x-a)+C(x-a)^2+\ldots+H(x-a)^{n-1}+\frac{N}{1.2\ldots n}(x-a)^n,$$

et par conséquent, d'après le § 5, le *minimum* cherché n'aura lieu que dans le cas, où le polynome précédent, avec ce même degré de précision, se réduit à

$$\frac{N}{1.3\ldots n}\left[\left(\frac{x-a+\sqrt{(x-a)^2-h^2}}{2}\right)^n+\left(\frac{x-a-\sqrt{(x-a)^2-h^2}}{2}\right)^n\right],$$

ce qui suppose qu'entre les limites $x=a-h$, $x=a+h$ la valeur de $Y-y$ a cette forme

$$Y-y=\frac{N}{1.2\ldots n}\left[\left(\frac{x-a+\sqrt{(x-a)^2-h^2}}{2}\right)^n+\left(\frac{x-a-\sqrt{(x-a)^2-h^2}}{2}\right)^n\right]+Zh^n,$$

où Z est une quantité qui devient infiniment petite en même temps que h.

D'après cette valeur de $Y-y$, les abscisses des points d'intersection des deux courbes que nous considérons sont données par l'équation suivante:

$$\frac{N}{1.2\ldots n}\left[\left(\frac{x-a+\sqrt{(x-a)^2-h^2}}{2}\right)^n+\left(\frac{x-a-\sqrt{(x-a)^2-h^2}}{2}\right)^n\right]+Zh^n=0.$$

Or, si l'on fait

$$\frac{x-a}{h}=\cos\varphi,$$

cette équation devient

$$\cos(n\varphi)+\frac{1.2\ldots n.2^{n-1}Z}{N}=0,$$

d'où, en supprimant le terme $\frac{1.2\ldots n.2^{n-1}Z}{N}$, nous tirons

$$\cos(n\varphi)=0,$$

ce qui donne

$$\varphi=\frac{2m+1}{2n}\pi,$$

m étant un nombre entier quelconque.

La valeur de φ que nous trouvons ainsi, en supprimant le terme $\frac{1.2\ldots n.2^{n-1}Z}{N}$ dans notre équation, est évidemment exacte jusqu'aux quantités de l'ordre Z, car l'équation $\cos(n\varphi)=0$ n'a pas de racines égales. D'après cela nous concluons que, aux quantités de l'ordre Zh près, les valeurs cherchées de x seront déterminées par cette formule:

$$\frac{x-a}{h}=\cos\frac{2m+1}{2n}\pi,$$

et par conséquent,

$$x=a+h\cos\frac{2m+1}{2n}\pi.$$

Telle est l'expression générale qui donne, avec une exactitude allant jusqu'à h inclusivement, les abscisses des n points d'intersection des deux courbes dans le cas de *minimum* que nous traitons; l'expression trouvée conduit à cette construction très simple:

«Du milieu de l'intervalle $x = a - h$, $x = a + h$, pris sur l'axe des «abscisses, avec un rayon égal à la moitié de cet intervalle, on tracera un «cercle; on inscrira dans ce cercle un polygone régulier de $2n$ côtés, en le «disposant de manière à ce que deux de ses côtés soient perpendiculaires à «à l'axe de x; les sommets de ce polygone, aux quantités de l'ordre h inclu- «sivement près, détermineront les abscisses des points, où les deux courbes «doivent se couper pour que la limite de leur déviation, dans l'intervalle «$x = a - h$, $x = a + h$ soit *minimum*.»

Si l'on veut que les deux courbes passent par les mêmes points aux limites de l'intervalle, où l'on cherche à les rapprocher autant que possible, la même construction (§ 9) aura lieu, avec la seule différence, qu'au lieu du rayon h, il faudra prendre le rayon $\frac{h}{\cos \frac{\pi}{2n}}$.

Tels sont les deux résultats, qu'on tire de nos formules relativement à la disposition des points communs de deux courbes, dans le cas où l'on cherche à rendre *minimum* la limite de leur déviation dans un intervalle donné; ces points sont d'une grande importance dans plusieurs questions de la pratique.

Dans les §§ suivants nous montrerons l'usage des formules que nous venons d'exposer pour trouver les éléments des parallélogrammes qui vérifient les conditions les plus avantageuses pour la précision du jeu de ces mécanismes.