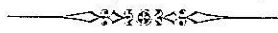


6928
102

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-ème série, Tome XIII.

СООБЩЕНИЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ.
Томъ XIII.



ХАРЬКОВЪ.
Типографія и Литографія М. Зильбербергъ и С-вья.
Донецъ-Захаржевская ул., с. д. № 6.
1913.



СОДЕРЖАНІЕ

XIII-го тома.

Стр.

Составъ Харьковскаго Математическаго Общества на 1-е Января 1913 г.

А. Пуанкаре (†).

* Доказательство теоремы Вейерштрасса, основанное на исчисленіи вѣроятностей <i>С. Н. Бернштейна</i>	1—2
Объ интегралахъ, общихъ многимъ задачамъ механики. <i>Я. А. Шогата</i>	3—48
О наилучшемъ приближеніи непрерывныхъ функций посредствомъ многочленовъ данной степени, <i>С. Н. Бернштейна</i>	49—194
Суммирование вездѣ расходящихся строкъ Тэйлора. <i>С. Н. Бернштейна</i>	195—199
О некоторыхъ полиномахъ и связи ихъ съ алгебраическимъ интегрированіемъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ алгебраическихъ уравненій. <i>М. Н. Лаутинскаго</i>	200—224
Объ интегралахъ одной дифференціальной системы. <i>М. Н. Лаутинскаго</i>	225—241
Е. А. Роговскій (†) Некрологъ, воспоминанія <i>А. П. Грузинцева</i> и списокъ печатныхъ работъ.	242—246
И. Л. Пташицкій (†) <i>К. А. Поссе</i>	247—252
Объ одной гидродинамической задачѣ Вьеркнеса, <i>А. Фридмана</i> и <i>М. Петелина</i>	253—262
Объ асимптотическомъ значеніи наилучшаго приближенія аналитическихъ функций, <i>С. Н. Бернштейна</i>	263—273
Двѣ задачи, <i>Д. М. Смицова</i>	274—275
Объ одномъ линейномъ функциональномъ уравненіи, <i>Г. А. Грузинцева</i>	276—292
Протоколы засѣданій и отчетъ за 1911—1912 гг.	
Приложеніе: Математическое Общество при Харьковскомъ Университетѣ (1879—1904 г.г.) проф. <i>А. П. Шнеборскаго</i> .	

78047

TABLE DES MATIÈRES

du tome XIII.

Liste des membres de la Société Mathématique de Kharkow au 1/1. 1913.	
H. Poincaré (†).	
Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités, par M. S. Bernstein	1—2
* Sur les intégrales communes aux plusieurs problèmes de mécanique, par M. J. Chohatt (avec le résumé français par l'auteur)	3—48
Sur la meilleure approximation des fonctions continues par les polynômes du degré donné par M. S. Bernstein. . .	49—194
Sommation des séries de Taylor partout divergentes, par M. S. Bernstein	195—199
Sur certains polynômes, liés à l'intégration algébrique des équations différentielles ordinaires algébriques, par M. M. Lagoutinsky.	200—224
Sur les intégrales d'un système différentiel par M. M. Lagoutinsky.	225—241
E. A. Rogovsky (†) Nécrologie, souvenirs par M. A. Grousinzeff et liste des travaux	242—246
J. L. Ptaszicky (†) Nécrologie, par M. C. Possé . . .	247—252
Sur un problème hydrodynamique de Bjerknes, par MM. A. Friedmann et M. Peteline	253—262
Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation des fonctions analytiques par M. S. Bernstein.	263—273
Deux problèmes, par M. D. Sintsof.	274—275
Sur les solutions analytiques de l'équation $\mu'(z) = \sigma\mu(z+1)$, par M. G. Grousinzeff.	276—292
Appendice: Société mathématique à l'Université de Kharkof (1879—1904) par M. A. Pchéborski.	

О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени.

С. Бернштейна.

ВВЕДЕНИЕ.

Вопросъ о приближеніи непрерывныхъ функций посредствомъ многочленовъ или другихъ простыхъ выраженій опредѣленнаго вида, равнозначный вопросу о разложеніи функций въ соответствующіе ряды, является основнымъ въ теоріи функций вещественной переменнѣй. Я не буду излагать здѣсь исторіи этого вопроса, поучительной во многихъ отношеніяхъ; напомню лишь важнѣйшіе ея моменты.

Теорія разложеній функций въ ряды обязана своимъ возникновеніемъ задачамъ математической физики, которыя великіе геометры XVIII столѣтія пытались рѣшать при помощи безконечныхъ рядовъ. Разумѣется, въ изслѣдованіяхъ этого времени, когда даже разница между сходящимися и расходящимися рядами была не ясна, о точности въ современномъ смыслѣ этого слова не можетъ быть и рѣчи. Только въ первой половинѣ XIX столѣтія, Дирикле и Коши доказали сходимостъ нѣкоторыхъ разложеній для весьма обширнаго класса функций и положили такимъ образомъ основу современной строго математической теоріи функций вещественной переменнѣй.

Но прошло еще полъ-столѣтія, прежде чѣмъ Вейерштрассъ въ 1885 г. доказалъ, пользуясь однимъ интеграломъ изъ теоріи теплоты, что всякая непрерывная функция можетъ быть разложена въ равномерно сходящійся рядъ многочленовъ, и вмѣстѣ съ тѣмъ указалъ приемъ, хотя и довольно сложный, для построенія многочленовъ, сколь угодно мало отличающихся отъ данной произвольной функции. Открытіе этой замѣчательной по своей общности теоремы опредѣлило дальнѣйшій ходъ развитія анализа; съ этого момента теорія функций комплексной переменнѣй, достигшая въ тоже время своего величайшаго расцвѣта, постепенно отходитъ на задній планъ, выдвигая впередъ изученіе функций вещественной переменнѣй.

Послѣ Вейерштрасса, многими математиками были предложены болѣе или менѣе простыя доказательства его теоремы¹⁾, дающія возможность, при всякомъ значеніи ε , найти для данной на нѣкоторомъ отрѣзкѣ AB непрерывной функціи $f(x)$ приближенные многочлены $P_n(x)$ достаточно высокой степени n , чтобъ отклоненіе $|f(x) - P_n(x)|$ оставалось не болѣе ε на данномъ отрѣзкѣ.

Сопоставленіе различныхъ методовъ естественно выдвинуло задачу: каково для данной функціи $f(x)$ наилучшее приближеніе, котораго можно достигнуть при помощи многочленовъ данной степени, или точнѣе говоря, каково наименьшее возможное значеніе $E_n[f(x)]$ отклоненія ε при данномъ n ?

Эта задача была поставлена П. Л. Чебышевымъ болѣе пятидесяти лѣтъ тому назадъ, т. е. задолго еще до открытія Вейерштрасса. Оригинальный алгебраическій методъ великаго русскаго математика привелъ его къ весьма замѣчательнымъ свойствамъ многочленовъ, наименѣе уклоняющихся отъ данной функціи $f(x)$, и въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ позволилъ ему дать полное рѣшеніе задачи. Однако въ общемъ случаѣ мы не находимъ у Чебышева никакихъ указаній относительно величины наименьшаго отклоненія $E_n[f(x)]$, и этимъ главнымъ образомъ объясняется, почему въ свое время изслѣдованія Чебышева не оказали вліянія на развитіе теоріи функцій.

Настоящее сочиненіе представляетъ собою попытку приближеннаго вычисленія наименьшаго отклоненія $E_n[f(x)]$ и изслѣдованія связи между закономъ убыванія $E_n[f(x)]$ и дифференціальными свойствами разсматриваемой функціи. Чтобъ можно было судить о томъ, насколько простой и глубокой оказывается эта связь, достаточно будетъ указать, на примѣръ, два предложенія²⁾: для того, чтобъ функція вещественной

¹⁾ См. *Borel. Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes.*

²⁾ Эти предложенія и нѣсколько другихъ были мною указаны въ замѣткѣ, представленной Французской Академіи Наукъ 28-го февраля 1911 г. Изъ предшествующихъ этой замѣткѣ работъ въ томъ же направленіи слѣдуетъ указать важныя сочиненія Lebesgue и de la Vallée Poussin, на которыя въ соотвѣствующихъ мѣстахъ будутъ сдѣланы ссылки. Болѣе подробныя библиографическія указанія читатель найдетъ въ работѣ *D. Jackson. «Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen».* Göttingen. (Preisschrift und Inaugural-Dissertation). Авторъ этой интересной работы, появившейся въ іюлѣ 1911 г., получалъ самостоятельно нѣкоторые изъ результатовъ моей замѣтки, которую онъ цитируетъ на страницахъ 12-й и 15-й. Вместе съ тѣмъ считаю нужнымъ замѣтить, что настоящая моя работа, за исключеніемъ трехъ «Добавленій» къ IV и V главамъ, представляетъ, съ незначительными редакционными измѣненіями, переводъ мемуара подъ тѣмъ же заглавіемъ, удостоеннаго преміи Вельгійской Академіи, куда онъ былъ отправленъ мною въ іюлѣ 1911 года.

переменной $f(x)$ была аналитической на некотором отрезке AB , необходимо и достаточно, чтобы наименьшее уклонение $E_n[f(x)]$ на отрезке AB убывало с возрастанием n быстрее, чем члены некоторой убывающей геометрической прогрессии; для того, чтобы функция $f(x)$ имела производные всех порядков, необходимо и достаточно, чтобы при всяком p , пред. $E_n[f(x)] \cdot n^p = 0$. Вообще, чем проще дифференциальная природа функции, тем быстрее убывает E_n , и наоборот.

Таким образом рассмотрение наименьшей возможной погрешности, при приближении функции посредством многочленов возрастающих степеней, дает совершенно общее основание для последовательной классификации и исследования всех непрерывных функций вещественной переменной.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

О некоторых общих свойствах рядов многочленов.

ГЛАВА I.

Предварительные теоремы о многочленах.

1. Многочлены, наименѣе уклоняющіеся отъ нуля. Въ своихъ знаменитыхъ изслѣдованіяхъ о приближенныхъ многочленахъ Чебышевъ построилъ многочлены, наименѣе уклоняющіеся отъ нуля въ данномъ промежуткѣ; а именно, онъ доказалъ, что изъ всѣхъ многочленовъ вида

$$Ax^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_n,$$

гдѣ A данная величина, а остальные коэффициенты произвольны, наименѣе уклоняется отъ нуля въ промежуткѣ $(-h, +h)$ многочленъ

$$\frac{Ah^n}{2^{n-1}} \cdot T_n\left(\frac{x}{h}\right) = \frac{Ah^n \cos n \arccos \frac{x}{h}}{2^{n-1}} = \frac{A}{2^n} \cdot [(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n]. \quad (1)$$

Для краткости мы будемъ въ дальнѣйшемъ называть $e \cdot T_n(x)$, гдѣ e постоянная величина, *тригонометрическими многочленами*, и выведемъ некоторыя ихъ свойства, аналогичныя свойству, открытому Чебышевымъ.

2. Теорема. Если многочленъ $P_n(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_n$ обладаетъ свойствомъ, что $|P_n(x) \cdot \sqrt{1-x^2}|$ достигаетъ въ промежуткѣ $-1, +1$ максимума M , то $|P_n(x)|$ не можетъ въ этомъ промежуткѣ оставаться менѣе $\frac{M}{n}$; эта послѣдняя величина не будетъ превзойдена лишь въ случаѣ, когда $P_n(x)$ тригонометрический многочленъ.

Чебышевъ допускалъ безъ доказательства существованіе многочленовъ данной степени, наименѣе уклоняющихся отъ данной функціи. Но современный анализъ требуетъ этого доказательства, такъ какъ немало есть задачъ о минимумѣ, напримѣръ, въ вариационномъ исчисленіи, которыя не имѣютъ рѣшеній. Въ виду этого намъ необходимо сдѣлать нѣсколько предварительныхъ замѣчаній, для того, чтобъ показать, что среди разсматриваемыхъ многочленовъ существуетъ, дѣйствительно, одинъ или нѣсколько такихъ многочленовъ, для которыхъ максимумъ $|P_n(x)|$ достигаетъ наименьшаго возможнаго значенія. Разсмотримъ; вообще, произведеніе $|P'_n(x) \cdot \varphi(x)|$, гдѣ $\varphi(x)$ какая нибудь непрерывная функція (голоморфная при всѣхъ значеніяхъ x даннаго промежутка, кромѣ тѣхъ, можетъ быть, гдѣ $\varphi(x) = 0$). Максимумъ этого произведенія $m(p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ есть непрерывная однородная функція первой степени коэффиціентовъ p_0, p_1, \dots, p_{n-1} , т. е., при умноженіи ихъ на одно и тоже число k , m будетъ умножено на то же число k . Значенія коэффиціентовъ, удовлетворяющія уравненію $m = M$, гдѣ M , данная величина, можно раздѣлять на n группъ: въ первой $|p_0| \geq |p_i|$, во второй $|p_1| \geq |p_i|$ и т. д. ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

Разсмотримъ, напримѣръ, значенія первой группы; въ данномъ случаѣ уравненіе $m = M$ можемъ написать такъ:

$$p_0 \cdot m \left(1, \frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}, \dots, \frac{p_{n-1}}{p_0} \right) = M,$$

или, полагая

$$\frac{p_1}{p_0} = \lambda_1, \quad \frac{p_2}{p_0} = \lambda_2 \text{ и т. д.},$$

$$p_0 = \frac{M}{m(1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})}.$$

Такимъ образомъ, p_0 есть конечная и непрерывная функція переменныхъ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$, которыя по абсолютному значенію не превышаютъ единицу; поэтому максимумъ $|p_0(x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1}x) + p_n| = |P_n(x)|$ есть непрерывная функція $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, p_n$; при этомъ, очевидно, можно ограничиться разсмотрѣніемъ значеній $|p_n|$, не превышающихъ нѣкотораго числа H . Но непрерывная функція n переменныхъ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, p_n$, принимающихъ всевозможныя значенія нѣкоторой замкнутой области, достигаетъ своего минимума для опредѣленныхъ значеній переменныхъ въ этой области. Аналогичнымъ образомъ можно доказать существованіе многочленовъ, наименѣе уклоняющихся отъ нуля, соответствующихъ каждой изъ n группъ коэффиціентовъ. Выбирая ту изъ группъ, которая

дасть наименьшее значение для максимума $|P'_n(x)|$, мы убеждаемся наконец, что среди многочленов, для которых $m = M$, действительно, есть один или несколько таких, чей максимум $|P'_n(x)|$ равен наименьшему возможному значению.

Итак пусть $P(x)$ будет тот из подлежащих сравнению многочленов степени n , который наименее уклоняется от нуля. Обозначим через x_1, x_2, \dots, x_k точки, в которых модуль $P(x)$ получает наибольшее значение L , и через ξ —ту точку, где $P'(x) \cdot q(x)$ достигает максимума M .

Я говорю, что нельзя найти такого многочлена $F'_n(x)$ степени n , который бы удовлетворял уравнениям

$$F'_n(x_1) = P(x_1), \quad F'_n(x_2) = P(x_2), \dots, F'_n(x_k) = P(x_k), \quad F'_n(\xi) \cdot q(\xi) = 0 \quad (2)$$

В самом деле, если бы равенства (2) были осуществлены, то можно было бы построить многочлен $P - \lambda F'_n$ степени не выше n , выбравши положительное число λ следующим образом: окрестим точки x_1, x_2, \dots, x_k промежутками достаточно малыми, чтоб $P(x)$ и $F'_n(x)$ сохраняли в каждом из них тот же самый знак, и отнимем эти промежутки из отрезка $(-1, +1)$; тогда в оставшейся части отрезка $|P(x)| < L - \delta$, где δ некоторое определенное положительное число (меньшее, если хотим, чем $\frac{L}{2}$); после этого мы выберем положительное количество λ настолько малым, чтобы $\lambda |F'_n(x)| < \delta$. В таком случае оказалось бы, что многочлен $P - \lambda F'_n$ по абсолютному значению всегда меньше (и никогда не равен) L , так как в отнятых промежутках $|P - \lambda F'_n| < |P| \leq L$, и в оставшейся части отрезка $|P - \lambda F'_n| < (L - \delta) + \delta = L$, при чем $[P'(\xi) - \lambda F'_n'(\xi)] \cdot q(\xi) = M$. Поэтому обозначая через $M_1 (M_1 \geq M)$ максимум $|(P(x) - \lambda F'_n(x)) \cdot q(x)|$, убеждаемся, что многочлен $[P(x) - \lambda F'_n(x)] \cdot \frac{M}{M_1}$ подлежал бы сравнению, уклонясь от нуля менее, чем $P(x)$, что противоречило бы нашему допущению, что среди подлежащих сравнению многочленов нет такого, который уклоняется от нуля менее, чем $P(x)$.

Следовательно, система уравнений (2) не имеет решения, а потому либо число уравнений $(k+1)$ больше числа неизвестных коэффициентов $(n+1)$, т. е. $k > n$, либо $k \leq n$ и все определители $(k+1)$ -го порядка матрицы

$$\begin{vmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k^n & x_k^{n-1} & \dots & x_k & 1 \\ n\xi^{n-1} & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

равны нулю (такъ какъ, очевидно, $\varphi(\xi) \not\equiv 0$).

Въ первомъ случаѣ $P(x)$ есть тригонометрическій многочленъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ степень многочлена $P(x)$ равна n , то во всякомъ случаѣ $k \leq n+1$; поэтому при допущеніи, что $k > n$, находимъ $k=n+1$. Такимъ образомъ, изъ значений x_1, x_2, \dots, x_k , два равны $+1$ и -1 , а остальные суть $(n-1)$ корень уравненія $P'(x)=0$. Такъ какъ съ другой стороны всѣ эти значенія обращаютъ въ нуль $P^2(x)-L^2$, то всѣ корни $P'(x)=0$ суть двойные корни уравненія $P^2(x)-L^2=0$, имѣющаго еще всего два простыхъ корня $+1$ и -1 . Отсюда выводимъ дифференціальное уравненіе Чебышева

$$P^2(x) - L^2 = \frac{(x^2-1) \cdot [P'(x)]^2}{n^2}, \quad (3)$$

единственнымъ рациональнымъ рѣшеніемъ котораго служитъ $L \cos n \arccos x$. Слѣдовательно, $P(x) = L \cos n \arccos x$.

Во второмъ случаѣ, $k=n$. Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ $k < n$, то $P(x) + (ax+b)R(x)$, гдѣ $R(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k)$, былъ бы многочленомъ степени не выше n . Но полагая $F_n(x) = P(x) + (ax+b)R(x)$, мы можемъ, очевидно выбрать коэффициенты (a, b) такъ, чтобы всѣ уравненія (2) были удовлетворены; для этого достаточно удовлетворить уравненію

$$P'(\xi) + aR(\xi) + (a\xi + b) \cdot R'(\xi) = 0, \quad (2^{bis})$$

къ которому приводится послѣднее изъ уравненій (2), между тѣмъ какъ первыя k уравненій удовлетворены тождественно. Уравненіе же (2^{bis}) всегда разрѣшимо, ибо не можетъ быть одновременно $R'(\xi)=0$ и $R(\xi)=0$. Но такъ какъ по доказанному уравненія (2) несовмѣстимы, слѣдовательно $k=n$.

Однако, какъ мы увидимъ, для функций $\varphi(x)$, разсматриваемыхъ нами, второй случай вообще не можетъ представиться. Для этого перейдемъ къ слѣдствіямъ, вытекающимъ изъ предположенія, что $k=n$.

Прежде всего мы замѣчаемъ, полагая $F_n(x) = P(x) + bR(x)$, что уравненія (2) приводятся къ единственному уравненію $P'(\xi) + bR'(\xi) = 0$,

которое будет неразрешимо лишь в случае, когда $P'(\zeta) = 0$, так как в противном случае ζ есть корень уравнения

$$R'(x) = 0.$$

Но

$$R(x) = C \frac{(x^2 - 1) \cdot P'(x)}{x - \beta},$$

где C — постоянный множитель, β — тот из корней уравнения

$$(x^2 - 1)P'(x) = 0,$$

которого не хватает уравнению $R(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n) = 0$. Мы не можем ζ удовлетворять одновременно уравнениям

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{(x^2 - 1) \cdot P'(x)}{x - \beta} \right] = 0 \quad \text{и} \quad (x^2 - 1) \cdot \frac{d}{dx} \left[P'(x) \cdot (1 - x^2) \right] = 0.$$

Легко обнаруживается несовместимость этих уравнений, если $\varphi(x) = 1 - x^2$. Тогда, очевидно, $\zeta^2 - 1 < 0$, так что второе уравнение обращается в

$$\frac{d}{dx} \left[P'(x) \cdot (1 - x^2) \right] = 0,$$

вследствие чего первое уравнение приводится к $P''(x) = 0$, что не всегда можно, так как $|P'(x) \cdot (1 - x^2)|$ при $x = \zeta$, по предположению, достигает своего наибольшего значения M .

Докажем, что случай $k = n$ также не представляется, если $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$, как это имѣет мѣсто в условии теоремы. Если мы положим $P'(x) \cdot \sqrt{1 - x^2} = P_1(x)$, то уравнения (4) примут форму

$$\frac{d}{dx} \left[P_1 \cdot \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x - \beta} \right] = 0, \quad \frac{dP_1}{dx} = 0,$$

или

$$\frac{dP_1}{dx} \cdot (1 - x^2)(x - \beta) + P_1 \cdot (\beta x - 1) = 0, \quad \frac{dP_1}{dx} = 0,$$

откуда

$$\beta x - 1 = 0;$$

поэтому $\zeta = \frac{1}{\beta}$. И так как $|\zeta| < 1$, следовательно,

$$|\beta| > 1.$$

Съ другой стороны, легко убѣдиться, что $P(x)$ удовлетворяетъ дифференціальному уравненію вида

$$P^2 - L^2 = \frac{(P')^2 \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 + bx + c)}{n^2 (x - \beta)^2}. \quad (5)$$

Дѣйствительно, многочленъ $P^2 - L^2$ степени $2n$ имѣетъ двойными корнями тѣ изъ значеній x_1, x_2, \dots, x_n , которые отличны отъ ± 1 (такъ какъ онѣ обращаютъ въ нуль P'), и простыми корнями тѣ изъ значеній, которые равны ± 1 . $P^2 - L^2$ дѣлится поэтому на многочленъ $(2n-2)$ -ой степени $\frac{P'^2 \cdot (x^2 - 1)}{(x - \beta)^2}$, и такъ какъ коэффициентъ перваго члена дѣлимаго въ n^2 разъ меньше коэффициента перваго члена дѣлителя, то частное имѣетъ форму $\frac{x^2 + bx + c}{n^2}$; откуда вытекаетъ уравненіе (5).

Я говорю, что корни уравненія

$$x^2 + bx + c = 0,$$

вещественны, имѣютъ тотъ же знакъ, что β , и больше его по абсолютному значенію. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ для опредѣленности, что $\beta > 0$; въ такомъ случаѣ $\beta > 1$. Если x , возрастая отъ единицы, достигаетъ значенія β , гдѣ P' обращается въ нуль, P^2 возрастаетъ отъ L^2 до нѣкотораго числа L_1^2 , затѣмъ P^2 убываетъ; но, такъ какъ P' болѣе не мѣняетъ знака, то P^2 , пройдя, при $x = \gamma > \beta$, черезъ значеніе L^2 , обращается въ нуль, и послѣ этого возрастаетъ до безконечности, проходя снова черезъ значеніе L^2 , при $x = \delta > \gamma > \beta$. Очевидно, что γ и δ суть корни уравненія $x^2 + bx + c = 0$. Итакъ уравненіе (5) можемъ написать въ видѣ

$$P^2 - L^2 = \frac{(x^2 - 1)(x - \gamma)(x - \delta)}{n^2 \cdot (x - \beta)^2} \cdot (P')^2, \quad (6)$$

при чемъ $\gamma > \beta > 0$ и $\delta > \beta > 0$. (То же самое разсужденіе привело бы, при $\beta < 0$, къ $\gamma < \beta < 0$ и $\delta < \beta < 0$).

Слѣдовательно, для $|x| < 1$, имѣемъ

$$\Theta^2 \cdot (L^2 - P^2) = \frac{(1 - x^2) \cdot (P')^2}{n^2}, \quad (6^{bis})$$

гдѣ $\Theta < 1$; поэтому

$$|P' \cdot \sqrt{1 - x^2}| \leq n\Theta L.$$

Такимъ образомъ, если бы $k=n$, то, несомненно, какое-нибудь значение L модуля $P(x)$, удовлетворяло бы неравенству $L \leq \frac{M}{n}$.
 Напротивъ, при $k=n+1$, мы нашли, что $P(x) = L \cos n \arccos x$,
 $|P' \cdot \sqrt{1-x^2}| = Ln |\sin n \arccos x|$; такъ что въ этомъ случаѣ $L > \frac{M}{n}$.
 Слѣдовательно, только случай, когда $P(x)$ есть тригонометрический
 многочленъ, приводитъ къ наименьшему значенію для L , а именно
 $L = \frac{M}{n}$, ч. п. т. д.

3. Слѣдствія. а) Если на отръзкѣ $(-h, +h)$ произведение
 $|P'_n(x) \cdot \sqrt{h^2-x^2}|$ достигаетъ значенія M , то, при предположеніи,
 $P_n(x)$ есть многочленъ степени n , $|P_n(x)|$ не можетъ на всёмъ отръзкѣ
 вѣдомомъ отръзкѣ оставаться меньше $\frac{M}{n}$.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $x = hx_1$. Въ такомъ случаѣ
 $P_n(x) = P_n(hx_1) = Q_n(x_1)$, и $P'_n(x) \cdot \sqrt{h^2-x^2} = Q'_n(x_1) \sqrt{1-x_1^2}$. Прехо-
 дя къ $Q_n(x_1)$ только что доказанную теорему, заключимъ, что такъ
 какъ на отръзкѣ $(-1, +1)$, $|Q'_n(x) \cdot \sqrt{1-x_1^2}|$ достигаетъ значенія M ,
 слѣдовательно $|Q_n(x_1)|$ на томъ же отръзкѣ $(-1, +1)$, а $|P_n(x)|$ на
 отръзкѣ $(-h, +h)$, не можетъ оставаться меньше $\frac{M}{n}$.

б) Если на отръзкѣ (a, b) произведение $|P'_n(x) \cdot \sqrt{(a-x)(x-b)}|$
 стигаетъ значенія M , то $|P_n(x)|$ на этомъ отръзкѣ не остается
 меньше $\frac{M}{n}$.

Это вытекаетъ изъ доказаннаго слѣдствія, если положить
 $x_1 = x \frac{a+b}{2}$.

в) Если на отръзкѣ (a, b) $|P_n(x)| \leq L$, то на томъ же отръзкѣ
 $|P'_n(x) \cdot \sqrt{(a-x)(x-b)}| \leq nL$.

Въ самомъ дѣлѣ, еслибы $|P'_n(x) \cdot \sqrt{(a-x)(x-b)}|$ достигало ка-
 кое-нибудь значенія $M = nL + \varepsilon$, то $|P_n(x)|$ въ силу предыдущаго слѣдствія вы-
 ступалъ бы значеніе $\frac{M}{n} = L + \frac{\varepsilon}{n}$, что противорѣчитъ условию.

4. Теорема А. А. Маркова¹⁾. Многочленъ n -ой степени $P_n(x)$ на отръзкѣ
 $(-1, +1)$ не остается меньше $\frac{M}{n^2}$ по абсолютному значенію, если
 на томъ же отръзкѣ $|P'_n(x)|$ достигнетъ M .

¹⁾ А. Марковъ. Объ одномъ вопросѣ Д. И. Менделѣева. 1889. Изв. высшаго училища
 А. А. Маркова вытекаетъ въ сущности также и теорема (2), хотя она и не формули-
 рована въ упомянутой статьѣ.

Очевидно, что вся первая часть доказательства теоремы (2) (до специализации функций $\varphi(x)$) остается в силе. В данном случае мы должны положить в уравнениях (4) $\varphi(x) = 1$; таким образом, если многочлен $P(x)$, дающий наименьшее отклонение L , не тригонометрический многочлен и достигает максимального отклонения только в n точках, то значение ζ , при котором $|P'(x)|$ достигает максимума M , удовлетворяет уравнениям

$$\frac{dP'}{dx} \cdot (x^2 - 1)(x - \beta) + P' \cdot [2x(x - \beta) - (x^2 - 1)] = 0, \quad (x^2 - 1) \frac{dP'}{dx} = 0. \quad (4^{bis})$$

Следовательно, либо $\zeta = \pm 1$; тогда $\beta = \zeta$. Либо $|\zeta| < 1$; тогда

$$\zeta^2 - 2\beta\zeta + 1 = 0,$$

так что $|\beta| > 1$.

В первом случае, полагая для определенности $\beta = \zeta = 1$, наибольшее значение $|P(x)|$ достигается в $(n - 1)$ внутренних точках, где $P'(x) = 0$, и в точках $x = -1$. Поэтому $P(x)$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$P^2 - L^2 = \frac{(1+x)(x-\alpha)}{n^2} \cdot (P')^2, \quad (7)$$

причем $\alpha > 1$, так как, при $x = 1$, $P^2 < L^2$. Следовательно,

$$P = L \cos n \arccos \frac{2x + \alpha - 1}{\alpha + 1}.$$

Во втором случае, P опять должен удовлетворять уравнению (6) с соблюдением тех же неравенств относительно β, γ, δ . Поэтому, по прежнему,

$$\Theta^2(L^2 - P^2) = \frac{(1-x^2) \cdot (P')^2}{n^2}, \quad (6^{bis})$$

где $\Theta < 1$.

Наконец, в случае когда $k = n + 1$, $P(x)$ есть тригонометрический многочлен, удовлетворяющий, как мы видели, уравнению (3), которое можно получить из уравнения (6^{bis}), полагая в последнем $\Theta = 1$.

Введем новые переменные, определяемые уравнениями

$$P = \pm L \cos z, \quad x = \cos t;$$

(знак $+$ возьмем, если при $x = 1$, $P = L$, в противном случае возьмем $-$); тогда уравнение (6^{bis}) преобразуется в

$$\Theta^2 L^2 \sin^2 z = \frac{L^2 \sin^2 z}{n^2} \cdot \left(\frac{dz}{dt} \right)^2,$$

откуда $\left| \frac{dz}{dt} \right| = n\Theta$. Такъ какъ, при $x=1$, $P = \pm L$, то можно положить $z=0$, при $t=0$. Слѣдовательно, $z = n\Theta_1 t$, гдѣ $|\Theta_1| < 1$ для уравненія (6^{bis}), и $\Theta_1 = 1$ для уравненія (3). Откуда

$$\Theta^2 L^2 \sin^2 n\Theta_1 t = \frac{\sin^2 t}{n^2} \cdot (P')^2;$$

поэтому

$$L = \left| \frac{\sin t}{\Theta n \sin n\Theta_1 t} P' \right| > \frac{M}{n^2},$$

если $\Theta < 1$, $|\Theta_1| < 1$, и $L = \frac{M}{n^2}$, если $\Theta = \Theta_1 = 1$, такъ какъ $|P'|$ наибольшее значеніе M , очевидно, принимаетъ, когда $\left| \frac{\sin t}{\Theta n \sin n\Theta_1 t} \right|$ получаетъ наименьшее значеніе (которое больше, чѣмъ $\frac{1}{n^2}$ въ первомъ случаѣ, и равно $\frac{1}{n^2}$ во второмъ случаѣ). Итакъ, отклоненіе L тригонометрическаго многочлена при томъ же M было бы менѣе отклоненія многочлена $P(x)$, удовлетворяющаго уравненію (6^{bis}); а потому $P(x)$ не можетъ удовлетворять уравненію (6^{bis}). $P(x)$ не можетъ удовлетворять и уравненію (7), ибо въ этомъ случаѣ $P(x) = L \cos n \arccos \frac{2x + \alpha - 1}{\alpha + 1}$, а

$$P'(x) = \frac{2nL \sin n \arccos \frac{2x + \alpha - 1}{\alpha + 1}}{(\alpha + 1) \cdot \sin \arccos \frac{2x + \alpha - 1}{\alpha + 1}},$$

откуда $M < n^2 L$, такъ какъ $\alpha > 1$.

Такимъ образомъ $|P_n(x)|$ остается возможно малымъ, если $P_n(x)$ тригонометрическій многочленъ; но даже въ этомъ случаѣ многочленъ $P(x)$ достигаетъ абсолютнаго значенія $L = \frac{M}{n^2}$, ч. и. т. д.

5. Слѣдствія. а) Изъ всѣхъ многочленовъ степени n , производная которыхъ достигаетъ даннаго абсолютнаго значенія на отръзкѣ $(-1, +1)$ наименѣе ускользаетъ отъ нуля на этомъ отръзкѣ тригонометрическій многочленъ.

б) Если на отръзкѣ (a, b) производная многочлена n -ой степени $P_n(x)$ достигаетъ абсолютнаго значенія M , то $|P_n(x)|$ на этомъ отръзкѣ не остается менѣе $\frac{|b-a| \cdot M}{2n^2}$.

Для того, чтобы въ этомъ убѣдиться, достаточно сдѣлать линейное преобразование $x = \frac{b-a}{2}x_1 + \frac{b+a}{2}$.

с) Если 1) на отрезкѣ (a, b) многочленъ n -ой степени $P_n(x)$ не превышаетъ по абсолютному значенію L , то $|P'_n(x)|$ на томъ же отрезкѣ не превышаетъ $\frac{2n^2L}{b-a}$.

d) Если на отрезкѣ (a, b) $|P_n(x)|$ не превышаетъ L , то $\left| \frac{d^k P_n(x)}{dx^k} \right|$ не превышаетъ $\left(\frac{2}{b-a} \right)^k \cdot n^2 \cdot (n-1)^2 \dots (n-k+1)^2 \cdot L$ на томъ же отрезкѣ 2).

Это вытекаетъ изъ k — кратнаго повторенія предыдущаго слѣдствія.

6. Теорема. Изъ всѣхъ многочленовъ степени n , принимающихъ въ данной точкѣ, не лежащей на отрезкѣ $(-1, +1)$, абсолютное значеніе M , наименѣе уклоняется отъ нуля на этомъ отрезкѣ тригонометрической многочленъ.

Въ самомъ дѣлѣ, посредствомъ соображеній, совершенно аналогичныхъ приведеннымъ при доказательствѣ теоремы (2), убѣждаемся, что среди многочленовъ, подлежащихъ разсмотрѣнію, существуетъ такой $P(x)$, который достигаетъ наименьшаго отклоненія L . Обозначая черезъ x_1, x_2, \dots, x_n значенія, гдѣ $|P(x)| = L$, а черезъ ξ данное значеніе, гдѣ $P(\xi) = M$, находимъ подобно предыдущему, что никакой многочленъ $F_n(x)$ степени n не можетъ удовлетворить уравненіямъ

$$F_n(x_1) = P(x_1), \quad F_n(x_2) = P(x_2), \dots, F_n(x_k) = P(x_k), \quad F_n(\xi) = 0,$$

1) Это есть формулировка теоремы А. А. Маркова, данная имъ въ выше упомянутой статьѣ; къ сожалѣнію, съ этой работой такъ же, какъ и съ сочиненіемъ В. А. Маркова „О функцияхъ наименѣе уклоняющихся отъ нуля“ (1892) я ознакомился лишь послѣ того, какъ предварительныя алгебраическія теоремы, составляющія содержаніе настоящей главы, были мной самостоятельно найдены и доказаны. Несомнѣнно, болѣе раннее знакомство съ идеями этихъ ученыхъ, упростило бы мою задачу, а также, быть можетъ, и изложеніе этой главы. Но измѣнять уже вполне законченныя доказательства я не считалъ нужнымъ въ виду вспомогательной роли упомянутыхъ теоремъ, и такъ какъ мнѣ казалось, кромѣ того, что примѣненіе общаго метода В. А. Маркова, могущаго дать даже болѣе того, что намъ здѣсь нужно, не упростило бы положенія; разсужденія же А. А. Маркова, которыми въ нѣкоторыхъ случаяхъ было бы целесообразно воспользоваться, въ другихъ случаяхъ, повидимому, нуждались бы въ значительныхъ дополненіяхъ (напр. для доказательства теоремы (8)).

2) Въ упомянутой выше работѣ В. Марковъ, подобно тому какъ это уже было сдѣлано для 1-й производной, даетъ максимумъ, котораго k -ая производная дѣйствительно можетъ достигнуть. Мы же указываемъ здѣсь лишь верхнюю границу этого максимума, вполне однако достаточную для тѣхъ выводовъ, которые будутъ сдѣланы въ слѣдующей главѣ.

что будет имѣть мѣсто лишь тогда, когда $k > n$. Слѣдовательно, $k = n + 1$, и $P(x)$ есть тригонометрической многочленъ; ч. п. т. д.

7. Слѣдствія. а) Если на отрезкѣ $(-1, +1)$, многочленъ степени n достигаетъ максимума L , то наибольшее абсолютное значеніе, какое онъ можетъ получить въ точкѣ ξ (не лежащей на этомъ отрезкѣ) есть

$$M = L \left| \frac{(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})^n + (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})^n}{2} \right| \quad (8)$$

Въ самомъ дѣлѣ, указанное значеніе M есть абсолютное значеніе получаемое въ точкѣ ξ соответствующимъ тригонометрическимъ многочленомъ.

б) Если обозначить черезъ R полусумму осей эллипса, проходящую черезъ точку ξ и имѣющую фокусами $(-1, +1)$, то имѣетъ мѣсто неравенство

$$M < LR^n. \quad (9)$$

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ

$$\xi = \frac{1}{2} [(e^b + e^{-b}) \cos a + i(e^b - e^{-b}) \sin a] = \cos(a - bi).$$

Въ такомъ случаѣ, если b получаетъ определенное положительное значеніе, ξ находится на эллипсѣ, имѣющемъ фокусами $(-1, +1)$, а осями $e^b + e^{-b}$ и $e^b - e^{-b}$. Съ другой стороны,

$$\begin{aligned} M &= L |\cos n(a - bi)| = \frac{L}{2} |\cos na \cdot (e^{nb} + e^{-nb}) + i \sin na \cdot (e^{nb} - e^{-nb})| = \\ &= \frac{L}{2} \cdot \sqrt{e^{2nb} + e^{-2nb} + 2 \cos 2na}. \end{aligned}$$

Слѣдовательно,

$$\frac{L}{2} (e^{nb} - e^{-nb}) \leq M \leq \frac{L}{2} (e^{nb} + e^{-nb}) < LR^n.$$

Но

$$e^b = \frac{(e^b + e^{-b}) + (e^b - e^{-b})}{2} = R$$

есть полусумма осей разсматриваемаго эллипса. Откуда

$$M < LR^n.$$

Примѣчаніе. Легко проверить, что неравенство (9) останется въ силѣ, если отрезокъ $(-1, +1)$ замѣнить любымъ отрезкомъ (α, β) ; только R будетъ тогда обозначать отношеніе суммы осей эллипса, проходящаго черезъ ξ и имѣющаго фокусами (α, β) , къ фокусному разстоянію.

8. Теорема. Если $P_n(x)$ есть многочлен n -ой степени, и на отрезке $(-1, +1)$ существуют значения x, y , для которых

$$E(x, y) = \left| \frac{P_n(x) - P_n(y)}{(x - y)^\alpha} \right| \cdot (1 - x^2)^{\frac{\alpha}{2}} (1 - y^2)^{\frac{\alpha}{2}} = M,$$

при $0 < \alpha < 1$, то $|P_n(x)|$ не остается меньше $\frac{M}{n^2 \cdot 2^{1-\alpha}}$ на этом отрезке.

Из самого дѣла, подобно предыдущему, убеждаемся въ существованіи многочлена $P(x)$, для котораго максимумъ $|P(x)|$ достигаетъ наименьшаго возможнаго значенія. Кроме того, если (x, y) суть значенія, для которыхъ $E(x, y)$ максимумъ, x_1, x_2, \dots, x_k — значенія, гдѣ $|P(x)|$ максимумъ, то уравненія

$$F_n(x_1) = P(x_1), \dots, F_n(x_k) = P(x_k), \quad F_n(x) - F_n(y) = 0 \quad (10)$$

не совместимы. Поэтому, если P не тригонометрической многочленъ, то $k = n$, и полагая

$$F_n(x) = P(x) + b(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = P(x) + bR(x),$$

находимъ, что уравненія (10) приводятся къ

$$P(x) - P(y) + b(R(x) - R(y)) = 0,$$

которое будетъ неразрѣшимо только, если

$$R(x) = R(y),$$

т. е. если

$$\frac{P'(x) \cdot (x^2 - 1)}{x - \beta} = \frac{P'(y) \cdot (y^2 - 1)}{y - \beta}.$$

Но съ другой стороны (x, y) удовлетворяютъ уравненіямъ, выражающимъ, что $|E(x, y)|$ максимумъ:

$$(1 - x^2)[P'(x) \cdot (x - y) - \alpha(P(x) - P(y))] - \alpha x(x - y)(P(x) - P(y)) = 0,$$

$$(1 - y^2)[P'(y) \cdot (y - x) - \alpha(P(y) - P(x))] - \alpha y(y - x)(P(y) - P(x)) = 0,$$

или,

$$P'(x) \cdot (1 - x^2) = \alpha \frac{P(x) - P(y)}{x - y} \cdot (1 - xy) = A \geq 0$$

и

$$P'(y) \cdot (1 - y^2) = \alpha \frac{P(x) - P(y)}{x - y} \cdot (1 - xy) = A \geq 0.$$

Таким образом

$$\frac{A}{x-\beta} = \frac{A}{y-\beta},$$

что невозможно, такъ какъ $x \not\equiv y$. Следовательно, P есть тричленная чиселлй многочленъ, $P = L \cos n\theta \cos \varphi$.

Остается вычислить максимумъ $|E(x, y)|$ для этого многочлена. Для этой цѣли, полагаемъ

$$x = \cos \theta, \quad y = \cos \varphi, \quad (0 < \theta < \pi; \quad 0 < \varphi < \pi).$$

Въ такомъ случаѣ,

$$\begin{aligned} E(x, y) &= L \frac{\cos n\theta - \cos n\varphi}{(\cos \theta - \cos \varphi)^2} \cdot (\sin \theta \sin \varphi)^2 = \\ &= L \left(\frac{\cos n\theta - \cos n\varphi}{\cos \theta - \cos \varphi} \right)^2 (\cos n\theta - \cos n\varphi)^{1-2} (\sin \theta \sin \varphi)^2 < \\ &\leq L \left(\frac{\sin \frac{n}{2}(\theta - \varphi)}{\sin \frac{1}{2}(\theta - \varphi)} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \theta \sin \varphi}{\sin \frac{1}{2}(\theta + \varphi)} \right)^2 (\cos n\theta - \cos n\varphi)^{1-2} < 2^{1-2n} L. \end{aligned}$$

Поэтому

$$M < 2^{1-2n} L,$$

откуда

$$L > \frac{M}{2^{1-2n}}, \quad \text{ч. п. т. д.}$$

Примѣчаніе. Аналогичнымъ образомъ получимъ, что наибольшее значеніе

$$\left| \frac{P_n(x) - P_n(y)}{(x-y)^2} \right| \sqrt{(h^2 - x^2)^2 (h^2 - y^2)^2}$$

на отрезкѣ $(-h, +h)$ менѣе, чѣмъ $L \cdot 2^{1-2n} (nh)^2$

9. Теорема. Произведеніе $|P_n(x) \cdot \sqrt{1-x^2}|$, гдѣ $P_n(x)$ многочленъ n -й степени, не можетъ осцилльаться менѣе $\frac{M}{n+1}$ на отрезкѣ $(-1, +1)$, если $\left| \frac{d}{dx} (P_n \cdot \sqrt{1-x^2}) \right| \cdot \sqrt{1-x^2}$ достигаетъ значенія M на этомъ отрезкѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, подобно предыдущему, убѣждаемся въ справедливости вѣщаго многочлена $P(x)$, осуществляющаго минимальное отклоненіе, а также и въ томъ, что число k точекъ, гдѣ оно имѣетъ менѣе, больше или равно n . Случай $k = n$, влѣдствіе несовмѣстимости притомъ.

$$F_n(x_1) = P(x_1), \dots, F_n(x_k) = P(x_k), \frac{d}{dx} [F_n(\xi) \cdot \sqrt{1 - \xi^2}] = 0,$$

приводить къ невозможности уравненія

$$\frac{d}{dx} [P(\xi) \cdot \sqrt{1 - \xi^2}] + b \frac{d}{dx} [R(\xi) \cdot \sqrt{1 - \xi^2}] = 0,$$

гдѣ

$$R(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_k),$$

откуда слѣдуетъ, что ξ удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{d}{dx} [R(x) \cdot \sqrt{1 - x^2}] = 0. \quad (11)$$

При этомъ нужно замѣтить, что $|P(x)\sqrt{1 - x^2}|$ достигаетъ максимума лишь во внутреннихъ точкахъ, обращающихся въ нуль

$$\frac{d}{dx} (P(x) \cdot \sqrt{1 - x^2}) = \frac{P'(x) \cdot (1 - x^2) - xP(x)}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{T(x)}{\sqrt{1 - x^2}},$$

т. е. не болѣе чѣмъ въ $(n + 1)$ точкахъ, удовлетворяющихъ уравненію $P'(x) \cdot (1 - x^2) - xP(x) = 0$: поэтому

$$R(x) = \frac{CT(x)}{x - \beta},$$

такъ что уравненіе (11) превращается въ

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{T(x) \cdot \sqrt{1 - x^2}}{x - \beta} \right) = 0, \quad (11^{bis})$$

Но M , по предположенію, наибольшее значеніе

$$\left[\frac{d}{dx} (P \cdot \sqrt{1 - x^2}) \right] \cdot \sqrt{1 - x^2} = T(x);$$

поэтому ξ удовлетворяетъ также уравненію

$$T'(x) = 0.$$

Слѣдовательно, уравненіе (11^{bis}) приводится (какъ въ теоремѣ 2) къ

$$T(x) \cdot (\beta x - 1) = 0,$$

и такъ какъ $T(\xi) \geq 0$, то $\beta = \frac{1}{\xi}$, откуда $|\beta| > 1$.

Замѣчая далѣе, что $S = P \cdot \sqrt{1-x^2}$ достигаетъ n разъ наибольшаго абсолютнаго значенія L , заключаемъ, что

$$S^2 - L^2 = \frac{(S')^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{(x^2-1)(x-\gamma)(x-\delta)}{(x-\beta)^2},$$

при чемъ, подобно предыдущему, находимъ, что $|\gamma| > |\beta|$, $|\delta| > |\beta|$ и $\gamma\beta > 0$, $\delta\beta > 0$.

Поэтому

$$\Theta^2 (S^2 - L^2) = \frac{S'^2 \cdot (x^2-1)}{(n+1)^2},$$

гдѣ $\Theta < 1$. Откуда

$$|S' \cdot \sqrt{1-x^2}| = |T(x)| < (n+1)L, \quad \text{т. е.} \quad L > \frac{M}{n+1}.$$

Напротивъ, если $n = k+1$, то

$$S^2 - L^2 = \frac{(S')^2 \cdot (x^2-1)}{(n+1)},$$

такъ что $S = L \sin(n+1) \arccos x$ и

$$P = \frac{L \sin(n+1) \arccos x}{\sqrt{1-x^2}},$$

следовательно $L = \frac{M}{n+1}$, ч. и. т. д.

10. Примѣненіе предыдущаго къ тригонометрическимъ суммамъ.

Условимся называть тригонометрической суммой n -го порядка выраженіе вида

$$A_0 + A_1 \cos t + B_1 \sin t + \dots + A_n \cos nt + B_n \sin nt;$$

если все $B_i = 0$, то выраженіе будетъ называться (тригонометрическою) суммою косинусовъ n -го порядка; если же все $A_i = 0$, то это будетъ сумма синусовъ того же порядка. Все выше доказанныя теоремы приводятъ къ аналогичнымъ предложеніямъ относительно тригонометрическихъ суммъ, если положить $x = \cos t$, и замѣтить, что всегда возможно съ одной стороны отождествить выраженія

$$a_0 + a_1 \cos t + \dots + a_n \cos^2 t \quad \text{и} \quad A_0 + A_1 \cos t + \dots + A_n \cos nt,$$

и, съ другой стороны, отождествить

$$\sin t [b_0 + b_1 \cos t + \dots + b_n \cos^2 t] \quad \text{и} \quad B_0 \sin t + \dots + B_n \sin(n+1)t.$$

Ограничимся лишь формулировкой предложений, соответствующих теоремам (2) и (9).

Если абсолютное значение суммы косинусов n -го порядка

$$w = A_0 + A_1 \cos t + \dots + A_n \cos nt$$

не превышает L , то абсолютное значение ее производной $-(A_1 \sin t + \dots + nA_n \sin nt)$ не превышает никогда nL , последнее значение обрывается только при $A_0 = A_1 = \dots = A_{n-1} = 0$.

Действительно, полагая $x = \cos t$, мы превращаем w в многочлен n -ой степени $P_n(x)$; при этом $\frac{dw}{dt} = -P'(x) \cdot \sqrt{1-x^2}$.

Таким же точно образом легко вывести из теоремы (9) предложение:

Если абсолютное значение суммы синусов n -го порядка

$$B_1 \sin t + B_2 \sin 2t + \dots + B_n \sin nt$$

не превышает L , то абсолютное значение ее производной

$$B_1 \cos t + \dots + nB_n \cos nt$$

не превышает nL . (Последнее значение достигается только при $B_1 = B_2 = \dots = B_{n-1} = 0$).

Эти два предложения можно обобщить следующим образом:

Если абсолютное значение тригонометрической суммы n -го порядка

$$A_0 + A_1 \cos t + B_1 \sin t + \dots + A_n \cos nt + B_n \sin nt$$

не превышает L , то производная ее

$$-A_1 \sin t + B_1 \cos t + \dots - nA_n \sin nt + nB_n \cos nt$$

не превышает $2nL$ по абсолютному значению.

В самом деле, пусть L_1 будет наибольшее значение модуля суммы косинусов, а L_2 — наибольшее значение модуля суммы синусов. Ибо, что в таком случае,

$$L \geq L_1 \quad \text{и} \quad L \geq L_2,$$

ибо, если, например, $\pm t_0$ суть значения t , при которых сумма косинусов равна L_1 , то вся тригонометрическая сумма будет при этих

значениях t равна $L_1 \pm k$, т. е. по крайней мере при одном из значений будет не меньше L_1 . Но, по доказанному,

$$|A_1 \sin t + \dots + nA_n \sin nt| \leq nL_1,$$

$$|B_1 \cos t + \dots + nB_n \cos nt| \leq nL_2.$$

Поэтому

$$|-A_1 \sin t + B_1 \cos t + \dots - nA_n \sin nt + nB_n \cos nt| \leq n(L_1 + L_2) < 2nL.$$

(случай равенства отпадает, потому что все неравенства одновременно не обращаются в равенства), ч. п. т. д.

11. Производная высших порядковъ. Изъ первыхъ двухъ предложений предыдущаго §а вытекаетъ, что *если L есть наибольшее абсолютное значение суммы $A_0 + A_1 \cos t + \dots + A_n \cos nt$, то наибольшее абсолютное значение ее p -ой производной не превышаетъ $n^p L$ (случай равенства иметь можетъ только при $A_0 = A_1 = \dots = A_{n-1} = 0$)*.

Этотъ результатъ можно преобразовать возвращаясь снова къ многочленамъ. А именно, полагая, что $|P_n(x)| = |a_0 + \dots + a_n x^n|$ на отрезкѣ $(-1, +1)$ меньше L , мы должны заключить, что

$$\left| \frac{d^k P_n(x)}{(d \arccos x)^k} \right| \leq n^k L,$$

или

$$|P_n'' \sqrt{1-x^2}| \leq nL,$$

$$|P_n''(1-x^2) - xP_n'| \leq n^2 L \text{ и т. д.}$$

Однако этими неравенствами мы въ дальнѣйшемъ пользоваться не будемъ, и замѣнимъ ихъ меньше точными, но болѣе удобными. Съ этой цѣлью, замѣчаемъ, что

$$|P_n'(x)| \leq \frac{nL}{\sqrt{1-x^2}};$$

но въ такомъ случаѣ P_n' — многочленъ $(n-1)$ -ой степени, который въ промежуткѣ $(-x_1, +x_1)$ меньше, чѣмъ $\frac{nL}{\sqrt{1-x_1^2}}$, а потому

$$|P_n''(x)| < \frac{n(n-1)L}{\sqrt{(x_1^2-x^2)(1-x_1^2)}},$$

и, повторяя то же рассуждение, найдемъ

$$|P_n^{(k)}| < \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)L}{\sqrt{(x_{k-1}^2-x^2)\dots(1-x_1^2)}}.$$

Полагая же $1-x_1^2=x_1^2-x_2^2=\dots=x_{k-1}^2-x^2=\frac{1-x^2}{k}$, получимъ на-
конецъ

$$|P_n^{(k)}| < \left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} n(n-1)\dots(n-k+1) \cdot L. \quad (12)$$

Аналогичнымъ образомъ можно провѣрить правильность неравенства

$$\left| \frac{P_n^{(k)}(z) - P_n^{(k)}(z_1)}{(z-z_1)^\alpha} \right| < \left(\frac{k+1}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}+\alpha} 2n(n-1)\dots(n-k+1) \left(\frac{n-k}{2}\right)^\alpha L, \quad (12^{\text{bis}})$$

при

$$|z| \leq x, \quad |z_1| \leq x.$$

ГЛАВА II.

Определение низшаго предѣла уклоненія непрерывной функции отъ многочлена данной степени.

12. Теорема. Пусть будетъ данъ рядъ

$$f(x) = u_1 + \dots + u_n + \dots, \quad (13)$$

гдѣ $u_n(x)$ многочленъ степени не выше n . Если этотъ рядъ сходится на отрезкѣ $(-1, +1)$, и при томъ

$$|u_n + u_{n+1} + \dots| < \frac{A}{n^p},$$

гдѣ A постоянная величина, то $f(x)$ имѣетъ во всякой точкѣ внутренняго отрезка $(-1, +1)$ непрерывную и конечную производную k -го порядка, обозначая черезъ k наибольшее цѣлое число, меньшее чѣмъ p ; кроме того эти производная удовлетворяетъ условіямъ Липшица степеней α сколь угодно близкимъ къ $p - k$.

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$R_n = u_n + u_{n+1} + \dots$$

имѣемъ, по условію,

$$|R_n| < \frac{A}{n^p};$$

поэтому, въ частности,

$$|R_{2^m}| < \frac{A}{2^{mp}}, \quad |R_{2^{m+1}}| < \frac{A}{2^{(m+1)p}}.$$

Слѣдовательно, если обозначимъ черезъ v_m многочленъ степени $2^{m+1} - 1$

$$v_m = R_{2^m} - R_{2^{m+1}} = u_{2^m} + u_{2^m+1} + \dots + u_{2^{m+1}-1},$$

то

$$|v_m| < \frac{A}{2^{mp}} + \frac{A}{2^{(m+1)p}} < \frac{2^{p+1} \cdot A}{2^{(m+1)p}}; \quad (14)$$

такимъ образомъ указанной группировкой членовъ мы превращаемъ рядъ (13) въ абсолютно сходящийся рядъ

$$f(x) = v_0 + v_1 + \dots + v_m + \dots,$$

каждый членъ котораго есть многочленъ степени $2^{m+1} - 1$.

Дифференцируемъ почленно k разъ полученный рядъ, замѣчая, что, въ силу неравенствъ (12) и (14),

$$|v_m^{(k)}(x)| < \left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot 2^{(m+1)k} \cdot \frac{2^{p+1}A}{2^{(m+1)p}} = 2^{p+1} \cdot \left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot A \cdot \left(\frac{1}{2^{p-k}}\right)^{m+1}$$

Слѣдовательно,

$$\begin{aligned} \rho_m^{(k)} &= |v_m^{(k)}(x) + v_{m+1}^{(k)}(x) + \dots| < 2^{p+1} \left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} A \left[\left(\frac{1}{2^{p-k}}\right)^{m+1} + \left(\frac{1}{2^{p-k}}\right)^{m+2} + \dots \right] = \\ &= \frac{2^{p+1}}{2^{p-k} - 1} \cdot \left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot \frac{A}{2^{(p-k)m}}; \end{aligned}$$

а потому рядъ

$$f^{(k)} = v_0^{(k)}(x) + \dots + v_m^{(k)}(x) + \dots$$

равномерно (и абсолютно) сходится во всякомъ промежуткѣ внутри отрезка $(-1, +1)$. Отсюда вытекаетъ существованіе конечной k -ой производной и ея непрерывность.

Вторая часть теоремы получится, если вмѣсто неравенства (12) мы воспользуемся неравенствомъ (12^{bis}). Полагая $p > k + \alpha$, находимъ

$$\begin{aligned} \left| \frac{f^{(k)}(z) - f^{(k)}(z_1)}{(z - z_1)^\alpha} \right| &< \sum_{m=0}^{m=\infty} \left| \frac{v_m^{(k)}(z) - v_m^{(k)}(z_1)}{(z - z_1)^\alpha} \right| < \left(\frac{k+1}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2} + \alpha} 2^{p+2} A \sum_{m=0}^{m=\infty} \left(\frac{1}{2^{p-k-\alpha}}\right)^{m+1} = \\ &= \frac{2^{p+2} A}{2^{p-k-\alpha} - 1} \cdot \left(\frac{k+1}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2} + \alpha}, \end{aligned}$$

если $|z| \leq x$ и $|z_1| \leq x$, ч. н. т. д.

Примѣчаніе. Примѣняя слѣдствіе (d) § 5-го, мы такимъ же образомъ убѣдились бы въ конечности k -ой производной и въ концахъ отрезка, если только $k < \frac{p}{2}$.

13. Слѣдствіе. Рядъ (13) можетъ быть дифференцируемъ почленно k разъ, если $k < p$.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ предшествующаго доказательства видно, что это дифференцированіе возможно при условіи соединенія въ одну группу

членовъ $u_{2^m} + u_{2^{m+1}} + \dots + u_{2^{m+1}-1} = v_m$. Но группировка (необходимая вообще для абсолютной сходимости) не является необходимой для равномерной сходимости, ибо легко видеть, что при всякомъ $N < 2^m$,

$$|u_{2^m}^{(k)} + \dots + u_{2^{m+N}}^{(k)}| < 2^{p+1} \cdot \left(\frac{k}{1-x^2}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot A \cdot \left(\frac{1}{2^{p-k}}\right)^{m+1}$$

14. Теорема. Если (при прежнихъ обозначеніяхъ)

$$|u_n + u_{n+1} + \dots| < \frac{A_n}{n^p},$$

и рядъ

$$S = A_1 + A_2 + A_4 + \dots + A_{2^m} + \dots \quad (14)$$

сходящійся, то, при p цѣломъ, функція $f(x)$ имѣетъ конечныя и непрерывныя производныя p -го порядка во всякой точкѣ внутри отрезка $(-1, +1)$; въ случаѣ же, когда $p = k + \alpha$, гдѣ k наибольшее целое число меньше, чѣмъ p , то k -ая производная удовлетворяетъ во всякомъ промежуткѣ внутри того же отрезка условию Липшица степеня α .

Ограничимся случаемъ, когда p цѣлое число, такъ какъ вторая часть теоремы доказывается такимъ же образомъ.

Полагая, какъ въ предыдущемъ §'ѣ,

$$v_m = u_{2^m} + \dots + u_{2^{m+1}-1}$$

находимъ, что

$$|v_m| < \frac{A_{2^{m+1}}}{2^{(m+1)p}} + \frac{A_{2^m}}{2^{mp}}$$

А потому, пользуясь неравенствомъ (12), заключаемъ, что

$$\begin{aligned} |f^{(p)}(x)| &\leq |v_0^{(p)}(x)| + |v_1^{(p)}(x)| + \dots + |v_m^{(p)}(x)| + \dots < \\ &< \left(\frac{p}{1-x^2}\right)^{\frac{p}{2}} (2^p + 1) (A_1 + A_2 + A_4 + \dots + A_{2^m}) = \left(\frac{p}{1-x^2}\right)^{\frac{p}{2}} (2^p + 1) S. \end{aligned}$$

Ч. в. т. д.

15. Слѣдствіе. Въ условіи только что доказанной теоремы не сделано никакихъ предположеній относительно чиселъ A_n , кромѣ сходимости ряда (13).

Однако мы можемъ замѣтить, что группируя, если это понадобится, члены ряда (13) всегда возможно превратить его въ рядъ того же вида,

по обладающей свойством, что числа $\frac{A_n}{n^p}$ идут не возрастая с возрастанием n ; другими словами, рассматривая конечную сумму $u_1 + u_2 + \dots + u_n$, как приближенный многочлен степени n функции $f(x)$, мы можем не вводить $(n+1)$ -го члена, если он не увеличивает приближения, тогда $u_{n+1} = 0$ и $\frac{A_{n+1}}{(n+1)^p} = \frac{A_n}{n^p}$, и ввести затѣм сразу группу членовъ, дѣйствительно улучшающихъ приближеніе.

Въ такомъ случаѣ, легко убѣдиться въ слѣдующемъ:

Если есть такое число p , что

$$\frac{A_{n+1}}{(n+1)^p} \leq \frac{A_n}{n^p},$$

то ряды

$$S = A_1 + A_2 + A_4 + \dots + A_{2^n} \dots \text{ и } \Sigma = A_1 + \frac{A_2}{2} + \frac{A_3}{3} + \dots + \frac{A_n}{n} + \dots$$

или оба сходящиеся или оба расходящиеся.

Дѣйствительно, если $p \geq 1$, то

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{A_n}{n} + \frac{A_{n+1}}{n+1} + \dots + \frac{A_{2n-1}}{2n-1} = \frac{A_n}{n^p} n^{p-1} + \frac{A_{n+1}}{(n+1)^p} (n+1)^{p-1} + \dots + \frac{A_{2n-1}}{(2n-1)^p} (2n-1)^{p-1} = \\ &= n^{p-1} \left[\frac{A_n}{n^p} + \frac{A_{n+1}}{(n+1)^p} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{p-1} + \dots + \frac{A_{2n-1}}{(2n-1)^p} \cdot \left(\frac{2n-1}{n}\right)^{p-1} \right] < A_n \cdot 2^{p-1} \end{aligned}$$

и, съ другой стороны,

$$I_n = n^{p-1} \left[\frac{A_n}{n^p} + \dots + \frac{A_{2n-1}}{(2n-1)^p} \cdot \left(\frac{2n-1}{n}\right)^{p-1} \right] > \left(\frac{n}{2n-1}\right)^p A_{2n-1} \geq n^p \cdot \frac{A_{2n}}{(2n)^p} = \frac{A_{2n}}{2^p}$$

Такимъ образомъ

$$\frac{A_{2n}}{2^p} < \frac{A_n}{n} + \frac{A_{n+1}}{n+1} + \dots + \frac{A_{2n-1}}{2n-1} < A_n \cdot 2^{p-1},$$

и слѣдовательно,

$$\frac{S}{2^p} - A_1 < \Sigma < 2^{p-1}S; \quad (p \geq 1)$$

если же $p \leq 1$, то подобнымъ же образомъ получимъ

$$\frac{S}{2} - A_1 < \Sigma < S \quad (p \leq 1).$$

Итакъ при предположеніи, что $\frac{A_{n+1}}{(n+1)^p} \leq \frac{A_n}{n^p}$, условие сходимости ряда S въ теоремѣ (13) можетъ быть замѣнено равнозначнымъ ему условиемъ сходимости ряда

$$\Sigma = A_1 + \frac{A_2}{2} + \dots + \frac{A_n}{n} + \dots \quad (15^{bis})$$

Для практическаго примѣненія теоремы (13) можемъ воспользоваться различными достаточными условиями сходимости. Такимъ образомъ условие сходимости ряда (15) или (15^{bis}), можетъ быть замѣнено болѣе специальными условиями (неравнозначными предыдущимъ), а именно, наиримѣръ, условиемъ, чтобы

$$A_n < \frac{1}{(\log n)^{1+\varepsilon}} \text{ или } A_n < \frac{1}{\log n \cdot (\log \log n)^{1+\varepsilon}} \text{ и т. д.}$$

гдѣ ε нѣкоторое положительное число.

16. Теорема. Пусть попрежнему

$$f(x) = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (13)$$

гдѣ u_n многочленъ степени не выше n , и на отрезкѣ $(-1, +1)$

$$|u_n + u_{n+1} + \dots| < \frac{A_n}{n^p},$$

гдѣ числа A_n идутъ не возрастая; въ такомъ случаѣ, для всякаго цѣлаго значенія $p_1 < p$,

$$f^{(p_1)}(x) = w_{p_1} + w_{p_1+1} + \dots + w_n + \dots$$

гдѣ w_n многочленъ степени не выше $n - p_1$, при чемъ

$$(1-x^2)^{\frac{p_1}{2}} |w_{2n} + w_{2n+1} + \dots| < \frac{p_1^{\frac{p_1}{2}} \cdot 2^{p_1+1}}{2^{p-p_1}-1} \cdot \frac{A_n}{n^{p-p_1}}, \quad (16)$$

и, при $2p_1 < p$,

$$|w_{2n} + w_{2n+1} + \dots| < \frac{2^{p+1}}{2^{p-2p_1}-1} \cdot \frac{A_n}{n^{p-2p_1}}. \quad (16^{bis})$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$f^{(p_1)}(x) = v_0^{(p_1)} + \dots + v_m^{(p_1)} + \dots$$

при чемъ, вслѣдствіе неравенства (12),

$$|v_n^{(p_1)}| + |v_{m+1}^{(p_1)}| + \dots < \left(\frac{p_1}{1-x^2} \right)^{\frac{p_1}{2}} \cdot 2^{p+1} [A_{2^m} \cdot 2^{(m+1)(p_1-p)} + A_{2^{m+1}} \cdot 2^{(m+2)(p_1-p)} + \dots]$$

$$\leq \left(\frac{p_1}{1-x^2} \right)^{\frac{p_1}{2}} \cdot \frac{2^{p+1} \cdot 2^{(m+1)(p_1-p)}}{1-2^{p_1-p}} \cdot A_{2^m}.$$

Поэтому, полагая

$$w_n = v_n^{(p_1)}, \quad \text{если } n = 2^{m+1} - 1,$$

и $w_n = 0, \quad \text{если } n \geq 2^{m+1} - 1,$

находимъ,

$$f^{(p)}(x) = w_{p_1} + \dots + w_n + \dots$$

гдѣ w_n многочленъ степени не выше $(n - p_1)$, при чемъ

$$(1-x^2)^{\frac{p_1}{2}} |w_{2n} + w_{2n+1} + \dots| < \frac{p_1^{\frac{p_1}{2}} \cdot 2^{p+1}}{2^{p-p_1} - 1} \cdot \frac{A_n}{n^{p-p_1}}.$$

Точно также изъ слѣдствія (d) § 5 заключаемъ, что

$$|v_n^{(p_1)}| + |v_{m+1}^{(p_1)}| + \dots < 2^{p+1} [A_{2^m} \cdot 2^{(m+1)(2p_1-p)} + A_{2^{m+1}} \cdot 2^{(m+2)(2p_1-p)} + \dots]$$

$$\leq \frac{2^{p+1} \cdot 2^{(m+1)(2p_1-p)}}{1-2^{2p_1-p}} \cdot A_{2^m},$$

откуда

$$|w_{2n} + w_{2n+1} + \dots| < \frac{2^{p+1}}{2^{p-2p_1} - 1} \cdot \frac{A_n}{n^{p-2p_1}}$$

Примѣчанія. а. Теорема, въ частности, примѣнима, если $A_n = A$ постоянная величина.

б. Замѣтимъ также, что $|v_{2n+l}^{(p_1)} + \dots|$ удовлетворяютъ тѣмъ же неравенствамъ, что и $|w_{2n} + w_{2n+1} + \dots|$ при всякомъ $l \geq 0$.

в. Аналогичныя неравенства имѣютъ мѣсто, если вмѣсто производныхъ брать отношенія $\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^p}$, при $p < 1$.

17. Тригонометрическіе ряды. Принимая во вниманіе результаты § 10, легко видѣть, что предыдущія теоремы остаются въ силѣ, если въ ряду

$$f(x) = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (13^{bis})$$

функции u_n будут тригонометрическими суммами n -го периода. Таким образом:

Если $|u_n + u_{n+1} + \dots| < \frac{A_n}{n^p}$, где p целое число, а ряд $S = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_{2^m} \dots$ сходящийся, то p -ая производная $|f^{(p)}(x)|$ будет непрерывна и $|f^{(p)}(x)| < 2^p \cdot (2^p + 1) \cdot S$. В случае, когда, все u_n содержат только косинусы, или только синусы, то $|f^{(p)}(x)| \leq (2^p + 1) \cdot S$.

Эта теорема, доказывается совершенно так же, как и теорема (14), и подобно ей mutatis mutandis получают и другія эквивалентныя теоремы, если многочлены замѣняются тригонометрическими суммами.

18. Теорема. Если внутри отрезка $(-1, +1)$ есть по крайней мере одна точка, где p -ая производная $f^{(p)}(x)$ некоторой функции $f(x)$ не непрерывна, и наилучшее приближение E_{n-1} функции $f(x)$ на этом отрезке при помощи многочлена степени $n-1$ равно $\frac{A_n}{n^p}$, то ряд $\Sigma = A_1 + \frac{A_2}{2} + \dots + \frac{A_n}{n} + \dots$ расходящийся. Наоборотъ, каковы бы ни были данныя положительныя числа $A'_1, A'_2, \dots, A'_n, \dots$, удовлетворяющія условию $\frac{A'_n}{n^p} > \frac{A'_{n+1}}{(n+1)^p}$, если рядъ $\Sigma' = A'_1 + \dots + \frac{A'_n}{n} + \dots$ расходящийся, то можно построить функцию $f(x)$, которой p -ая производная $f^{(p)}(x)$ не непрерывна внутри отрезка, при чемъ для всякаго n наилучшее приближение $E_{n-1} < \frac{A'_n}{n^p}$. (Аналогичная теорема для тригонометрическихъ суммъ).

Первая часть теоремы непосредственно вытекаетъ изъ формулировки данной въ § 15 теоремъ (14), такъ какъ, еслибъ рядъ Σ сходилъся, то $f^{(p)}(x)$ была бы непрерывна и конечна внутри отрезка $(-1, +1)$.

Допустимъ далѣе, что рядъ $\Sigma' = A'_1 + \dots + \frac{A'_n}{n} + \dots$ расходящийся и рассмотримъ два случая. Пусть во первыхъ, начиная отъ некотораго n_1 , все $A'_n \geq 1$. Въ такомъ случаѣ можно выбрать (см. § 45) целенный коэффициентъ a такъ, чтобъ функция $\varphi(x) = a|x|^p$ удовлетворяла требованію теоремы: а именно, при $n \leq n_1$, $E_{n-1} < a < \frac{A'_n}{n^p}$; и при $n > n_1$, $E_{n-1} < \frac{1}{n^p} \leq \frac{A'_n}{n^p}$.

Во второмъ случаѣ, среди чиселъ A'_{4m+1} есть безчисленное множество удовлетворяющихъ условию $A'_{4m+1} < 1 + \varepsilon$, какъ бы малъ ни былъ ε . Пусть, для определенности, p будетъ нечетно, и построимъ функцию

$$f(x) = \frac{1}{5^p} \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[\frac{A'_{4m+1}}{(4m-3)^p} - \frac{A'_{4m+5}}{(4m+1)^p} \right] \cos(4m+1)x = \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n(x). \quad (17)$$

Таким образом тригонометрическая сумма (n_1-1) -го порядка $\sum_{n=1}^{n=n_1-1} u_n(x)$, при $4m-2 \leq n_1 < 4m+2$, удовлетворяет неравенству

$$\left| f(x) - \sum_{n=1}^{n=n_1-1} u_n(x) \right| \leq \frac{A'_{4m+1}}{(4m+1)^p} \leq \frac{A'_n}{n_1^p}$$

Следовательно, тригонометрическое приближение функции $f(x)$ (от которого мы затѣмъ легко перейдемъ къ многочленамъ, удовлетворяющаго условию теоремы. Поэтому достаточно будетъ показать, что p -ая производная $f^{(p)}(x)$ въ нѣкоторой точкѣ, а именно въ $x = \frac{\pi}{2}$, безгранично возрастаетъ. Въ самомъ дѣлѣ, замѣтивъ, что все коэффициенты въ рядѣ (17) положительны, дифференцируемъ его почленно; получимъ

$$\pm \frac{1}{5^p} \sum_{m=1}^{m=\infty} \left[A'_{4m+1} \left(1 + \frac{4}{4m-3} \right)^p - A'_{4m+5} \right] \sin(4m+1)x,$$

и полагая $x = \frac{\pi}{2}$, находимъ бесконечно-возрастающую сумму положительныхъ членовъ

$$\frac{1}{5^p} \sum_{m=1}^{m=\infty} (A'_{4m+1} - A'_{4m+5}) + \left(\frac{4^p}{4m-3} + \dots \right) A'_{4m+1};$$

но этого не могло бы быть, еслибъ въ разсматриваемой точкѣ $f^{(p)}(x)$ была бы непрерывна, ибо въ такомъ случаѣ былъ бы применимъ способъ суммированія тригонометрическихъ рядовъ Фейера¹⁾, который далъ бы $f^{(p)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty$; следовательно, при $x = \frac{\pi}{2}$, $f^{(p)}(x)$ не непрерывна. Для того, чтобы распространить полученный выводъ на многочлены, полагаемъ $z = \cos x$; тогда $f(x) = \varphi(z)$, и приближеніе E_{n-1} функции $\varphi(z)$ въ промежуткѣ $(-1, +1)$ удовлетворяетъ условию теоремы. Но ясно, что точкѣ $x = \frac{\pi}{2}$, соответствуетъ $z = 0$, гдѣ $\varphi^{(p)}(z)$ не можетъ также быть непрерывна.

¹⁾ Lebesgue. Leçons sur les séries trigonométriques.

19. **Добавленіе къ предшествующей теоремѣ.** Методъ, которымъ мы пользуемся въ этой главѣ, не можетъ дать никакихъ указаній относительно верхней границы E_n . Поэтому для полноты картины намъ необходимо упомянуть о нѣкоторыхъ результатахъ, которые будутъ доказаны лишь въ третьей части. А именно, если $f(x)$ имѣетъ конечную производную p -го порядка, на отрезкѣ $(-1, +1)$, то можно указать определенное число k такъ, чтобы, при всякомъ $n > 0$,

$$E_n < \frac{k \log(n+1)}{(n+1)^p};$$

если же эта p -ая производная удовлетворяетъ условию Липшица степени α , то, при всякомъ $n > 0$,

$$E_n < \frac{k \log(n+1)}{(n+1)^{p+\alpha}} < \frac{k_1}{(n+1)^{p+\alpha_1}},$$

гдѣ α_1 ($\alpha_1 < \alpha$) положительное число, сколь угодно близкое къ α .

Отсюда слѣдуетъ, что если p -ая производная непрерывна и кроме того удовлетворяетъ какому-нибудь условию Липшица, то рядъ

$$\Sigma = A_1 + \frac{A_2}{2} + \dots + \frac{A_n}{n} + \dots < \frac{k \log 2}{2^{1+\alpha}} + \dots + \frac{k \log n}{n^{1+\alpha}} \dots$$

сходится.

Напротивъ, если p -ая производная только непрерывна, то первый изъ упомянутыхъ результатовъ даетъ только ¹⁾

$$\Sigma < \frac{k \log 2}{2} + \dots + \frac{k \log n}{n} \dots;$$

и не даетъ такимъ образомъ права заключать о сходимости ряда Σ .

¹⁾ Изъ работы Jackson'a, упомянутой въ началѣ, вытекаетъ, что

$$E_n < \frac{k}{(n+1)^p}, \text{ т. е. } \Sigma < \frac{k}{2} + \dots + \frac{k}{n} + \dots;$$

и можно, что въ случаѣ непрерывности p -ой производной можно даже показать, что

$$E_n < \frac{k_{n+1}}{(n+1)^p},$$

гдѣ k_n стремится къ нулю, но и этого недостаточно для сходимости ряда Σ .

20. Примеръ функций, имѣющей непрерывную производную при расходящемся рядѣ Σ . Дѣйствительно, можно указать примеръ функций, для которой рядъ Σ расходится, хотя производная вездѣ непрерывна. Этимъ свойствомъ обладаетъ, на примеръ, функция ¹⁾

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\alpha_n \cos nx}{n^2},$$

если выбрать соответствующимъ образомъ $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots \alpha_n > \dots$, при чемъ $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Въ самомъ дѣлѣ, дифференцируя, получимъ равномерно сходящійся рядъ

$$f'(x) = - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\alpha_n \sin nx}{n},$$

ибо можно указать опредѣленную постоянную A такъ, чтобы, при всякомъ n' ,

$$\left| \sum_{n=n'}^{n=\infty} \frac{\sin nx}{n} \right| < A.$$

Но съ другой стороны,

$$\sum_{n=n'}^{n=\infty} \frac{\alpha_n}{n^2} = \frac{\alpha_{n'}}{n'^2} + \frac{\alpha_{n'+1}}{(n'+1)^2} + \dots < \frac{\alpha_{2n'}}{4n'} + \frac{\alpha_{4n'}}{8n'} + \dots < \frac{\alpha_{n'}}{2n'},$$

если только $\alpha_n \geq \frac{\alpha_n}{2}$. Отсюда можно заключить, какъ будетъ доказано въ 3-й части, что

$$E_n[f(x)] < \frac{k\alpha_{n+1}}{(n+1) \log(n+1)},$$

Поэтому, если числа α_n убываютъ достаточно медленно, на примеръ $\alpha_n = \frac{1}{\log \log(n+1)}$, то рядъ Σ будетъ расходящимся.

Изъ предыдущаго видно, что вообще функций, имѣющихъ непрерывную производную, допускаютъ лучшее приближеніе при помощи многочленовъ данной степени, чѣмъ функция, не имѣющая производной; по тѣмъ не менѣе есть среди функций, имѣющихъ непрерывныя производ-

¹⁾ Подобно предыдущему отъ тригонометрическаго ряда къ строку многочленовъ можно перейти съ помощью подстановки $t = \cos x$.

ния, особый класс функций $f(x)$, для которых, при всяком n , $E_n[f(x)] > E_n[\varphi(x)]$, где $\varphi(x)$ некоторая функция, не имеющая непрерывной производной.

21. Примѣненіе къ функции $|x|$. Производная функции $|x|$ имеет точку разрыва $x = 0$. Отсюда слѣдуетъ, что рядъ

$$\Sigma = A_1 + \frac{A_2}{2} + \dots + \frac{A_n}{n} \dots = E_0 + E_1 + \dots + E_n + \dots$$

расходящійся, обозначая черезъ $E_n = \frac{A_{n+1}}{n+1}$ наилучшее приближеніе $|x|$ на отрезкѣ $(-1, +1)$ при помощи многочлена степени n . Никакихъ заключеній о каждомъ опредѣленномъ E_n отсюда нельзя вывести. Единственное, что можно сказать, что при всякомъ ε будетъ безчисленное множество значений n , для которыхъ

$$E_{n-1} > \frac{1}{n(\log n)^{1+\varepsilon}}, \quad E_{n-1} > \frac{1}{n \log n (\log \log n)^{1+\varepsilon}} \text{ и т. д.}$$

Напротивъ, одного факта, что производная $|x|$ не непрерывна, *недостаточно* для того, чтобъ утверждать, что будетъ безчисленное множество значений, для которыхъ $E_{n-1} > \frac{1}{n \log n}$, такъ какъ мы видѣли, что есть функции, не обладающія непрерывной производной, для которыхъ всѣ E_{n-1} менѣе членовъ любого расходящагося ряда.

22. Теорема. Условіе необходимое и достаточное для того, чтобъ функция $f(x)$ на всемъ отрезкѣ $(-1, +1)$ имѣла конечныя и непрерывныя производныя всѣхъ порядковъ заключается въ томъ, чтобъ при всякомъ p , существовало число α_p , независящее отъ n , обладающее свойствомъ, что для всѣхъ n

$$E_n \cdot n^p < \alpha_p.$$

Въ самомъ дѣлѣ, условіе достаточно, такъ какъ изъ примѣчанія къ теоремѣ (12) вытекаетъ существованіе конечной производной k -го порядка, на всемъ отрезкѣ, если $k < \frac{p}{2}$. Съ другой стороны, условіе необходимо вслѣдствіе § 19.

23. Примеръ функции, для которой E_n убываетъ неправильно.

Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что, если условие $E_n < \frac{\alpha_p}{n^p}$ соблюдается для всякаго n , то функция имѣетъ производныя всѣхъ порядковъ. Нельзя того же сказать, если неравенство это соблюдено, хотя и для бесчисленнаго множества, но не для всѣхъ значений n .

Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ функцию

$$f(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\cos 2^m x}{2^m}. \quad (18)$$

Полагая $n = 2^m > 2^p$, находимъ

$$E_n \leq \left[\frac{1}{2^{(m+1)!}} + \frac{1}{2^{(m+2)!}} + \dots \right] < \frac{2}{2^{(m+1)!}} = \frac{2}{(2^m)^{m+1}} = \frac{2}{n^{m+1}} \leq \frac{1}{n^m} < \frac{1}{n^p}.$$

Однако легко убѣдиться, что функция $f(x)$ не имѣетъ производной.

24. Обобщеніе условий Липшица. Предыдущій примѣръ естественно наводитъ на мысль о выясненіи дифференціальнаго свойства функций, которыя не для всѣхъ, но для бесчисленнаго множества значений n , допускаютъ приближеніе того же порядка, что и функции, обладающія производными. Какъ мы увидимъ, эти функции обладаютъ свойствами, аналогичными условиямъ Липшица.

Пусть $f(x)$ будетъ некоторая непрерывная на отрезкѣ (AB) функция. Обозначимъ черезъ $\delta_1(\varepsilon)$ максимумъ колебанія функции $f(x)$ въ любомъ промежуткѣ длины ε на отрезкѣ, или другими словами, максимумъ разности $|f(x+h) - f(x)|$ при $|h| \leq \varepsilon$. Функция $\delta_1(\varepsilon)$ будетъ, очевидно, непрерывной, не отрицательной и монотонной (т. е. не убывающей, такъ какъ $\delta_1(0) = 0$). Обыкновенное условіе Липшица степени s выражаетъ, что существуетъ такое опредѣленное число k , что при всякомъ ε

$$\delta_1(\varepsilon) < k\varepsilon^s. \quad (19)$$

Мы скажемъ, что функция $f(x)$ удовлетворяетъ обобщенному условію Липшица степени s , если существуетъ бесчисленное множество значений ε , для которыхъ неравенство (19) соблюдено.

Точно также вмѣсто максимума первой разности $|f(x+h) - f(x)|$, при $|h| \leq \varepsilon$, можно разсматривать максимумы послѣдовательныхъ разностей: $\delta_2(\varepsilon) = \max. |f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)|$, $\delta_3(\varepsilon) = \max. |f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)|$ и т. д. при $|h| \leq \varepsilon$.

Если для бесчисленного множества значений ε имѣть мѣсто неравенство

$$\delta_i(\varepsilon) < k\varepsilon^s, \quad (19^{bis})$$

то мы будемъ говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяетъ на отрѣзкѣ AB обобщенному условию Лишица i -го вида степени s . Легко убѣдиться, что, если $\delta_i(\varepsilon) > 0$, то $s \leq i$. Замѣтимъ, что въ случаѣ существованія конечной производной i -го порядка на отрѣзкѣ AB , условие (19^{bis}) соблюдается для всѣхъ ε при $s = i$.

25. Теорема. Если существуетъ бесчисленное множество значений n , для которыхъ наилучшее приближеніе ¹⁾ E_n на отрѣзкѣ $(-1, +1)$ удовлетворяетъ неравенству $E_n < \frac{A}{n^p}$, то функция $f(x)$ на всѣмъ отрѣзкѣ AB внутри отрѣзка $(-1, +1)$ удовлетворяетъ обобщенному условию Лишица i -го вида степени $s_i = \frac{ip}{i+p}$.

Разсмотримъ сначала функцию $\delta_1(\varepsilon)$. Обозначая черезъ P_n приближенный многочленъ степени n , удовлетворяющій неравенству

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{A}{n^p}, \quad (20)$$

будемъ, очевидно, имѣть для бесчисленного множества значений n ,

$$|P_n(x)| < M + \frac{A}{n^p} < 2M,$$

гдѣ M максимумъ $|f(x)|$.

Въ такомъ случаѣ на всѣмъ опредѣленномъ отрѣзкѣ AB внутри отрѣзка $(-1, +1)$

$$|P'_n(x)| < RMn,$$

гдѣ R нѣкоторый численный множитель (§ 3).

Поэтому

$$|P_n(x_1) - P_n(x_2)| < RMn\varepsilon,$$

если $|x_1 - x_2| \leq \varepsilon$. Но значения x_1 и x_2 можно выбрать такъ, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \delta_1(\varepsilon).$$

Слѣдовательно,

$$|f(x_1) - P_n(x_1) + P_n(x_2) - f(x_2)| > \delta_1(\varepsilon) - RMn\varepsilon.$$

¹⁾ При помощи многочленовъ степени n . Та же теорема (см. § 17) остается въ силѣ и для тригонометрическихъ суммъ.

Сопоставляя это неравенство съ неравенствомъ (20), находимъ

$$\frac{2A}{n^p} > \delta_1(\varepsilon) - RMn\varepsilon,$$

или

$$\delta_1(\varepsilon) < \frac{2A}{n^p} + RMn\varepsilon. \quad (21)$$

Положимъ въ этомъ неравенствѣ $\varepsilon = \frac{1}{n^{1+p}}$. Получимъ

$$\delta_1(\varepsilon) < \frac{2A}{n^p} + \frac{RM}{n^p} = (2A + RM) \frac{1}{n^{1+p}}.$$

Такимъ образомъ, для $i = 1$, теорема доказана.

Достаточно будетъ разсмотрѣть еще случай $i = 2$, чтобъ убѣдиться, что тотъ же пріемъ доказательства применимъ для всякаго i .

На основаніи § 11 имѣемъ $|P_n''(x)| < R_1 M n^2$, гдѣ R_1 численный коэффициентъ, зависящій только отъ отрезка AB . Поэтому, при $|h| \leq \varepsilon$

$$|P_n(x + 2h) - 2P_n(x + h) + P_n(x)| < 2R_1 M n^2 \varepsilon^2;$$

но, выбирая x соответствующимъ образомъ, имѣемъ

$$|f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)| = \delta_2(\varepsilon).$$

Откуда

$$\begin{aligned} |f(x + 2h) - P_n(x + 2h) - 2(f(x + h) - P_n(x + h)) + \\ + f(x) - P_n(x)| > \delta_2(\varepsilon) - 2R_1 M n^2 \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Слѣдовательно,

$$\frac{4A}{n^p} > \delta_2(\varepsilon) - 2R_1 M n^2 \varepsilon^2,$$

или

$$\delta_2(\varepsilon) < \frac{4A}{n^p} + 2R_1 M n^2 \varepsilon^2. \quad (22)$$

Полагая въ неравенствѣ (22)

$$\varepsilon = \frac{1}{n^{1+\frac{p}{2}}},$$

получимъ

$$\delta_2(\varepsilon) < \frac{4A}{n^p} + \frac{2R_1 M}{n^p} = (4A + 2R_1 M) \varepsilon^{\frac{2p}{2+p}}$$

Такимъ образомъ теорема доказана также для $i=2$, и ясно, что тоже рассужденіе применимо для всякаго i .

26. Приложенія предшествующей теоремы. Функция, рассмотрѣнная нами въ § 23, обладала свойствомъ, что при всякомъ p есть безчисленное множество значений n , для которыхъ $E_n < \frac{1}{n^p}$. Такимъ образомъ вследствие только что доказанной теоремы заключаемъ, что указанная функция удовлетворяетъ обобщенному условію Липшица вида i любой степени $s < i$.

Не останавливаясь на болѣе детальномъ изученіи этихъ своеобразныхъ функций, применимъ предыдущую теорему къ опредѣленію признаго предѣла $E_n|x|$. Для этого замѣтимъ, что ни при какомъ i функция $|x|$ не удовлетворяетъ обобщенному условію Липшица степени выше первой. Въ самомъ дѣлѣ, при $x = -h$,

$$|x + nh| - n|x + (n-1)h| + \dots + (-1)^n|x| = (-1)^n 2h;$$

такъ что $\delta_1(\varepsilon) \geq 2\varepsilon$.

Слѣдовательно, если есть *безчисленное множество* значений n , для которыхъ $E_n < \frac{1}{n^p}$, то показатель p долженъ обладать свойствомъ, что, при всякомъ i ,

$$s = \frac{ip}{i+p} \leq 1,$$

откуда

$$p \leq \frac{i}{i-1}.$$

Такимъ образомъ p не можетъ быть болѣе единицы.

27. Условіе Дини и Липшица. Условіемъ Дини и Липшица называютъ свойство, которымъ обладаютъ некоторыя непрерывныя функции, заключающееся въ томъ, что произведеніе

$$\delta_1(\varepsilon) \cdot \log \varepsilon$$

стремится къ нулю вмѣстѣ съ ε . Мы будемъ говорить, что функция удовлетворяетъ обобщенному условію Дини и Липшица, если возможно выбрать безчисленное множество значений ε такимъ образомъ, чтобъ указанное произведеніе $\delta_1(\varepsilon) \cdot \log \varepsilon$ стремилось къ нулю вмѣстѣ съ ε . Принявъ эти опредѣленія, докажемъ, что *функция, для которой $E_n \cdot \log n$*

стремится къ нулю для бесчисленнаго множества значений n , удовлетворяетъ обобщенному условию Дини-Липшица; если $E_n \cdot \log n$ стремится къ нулю при всѣхъ значенияхъ n , то функція удовлетворяетъ обыкновенному условию Дини и Липшица.

Въ самомъ дѣлѣ, повторяя разсужденіе § 25, приходимъ немедленно къ обобщенію неравенства (21)

$$\delta_1(\varepsilon) < 2E_n + kn\varepsilon, \quad (21^{\text{bis}})$$

гдѣ k постоянная (независимая отъ n). Примѣняя это неравенство къ настоящему случаю, когда $E_n \cdot \log n = \beta_n$ стремится къ нулю, и полагая

$$\varepsilon = \frac{\beta_n}{n \log n},$$

получимъ

$$\log n \cdot \delta_1(\varepsilon) < \beta_n(2+k);$$

но

$$|\log \varepsilon| < 2 \log n;$$

слѣдовательно

$$|\log \varepsilon| \cdot \delta_1(\varepsilon) < \beta_n(4+2k), \quad (23)$$

для бесчисленнаго множества значений n . Такимъ образомъ, для бесчисленнаго множества значений ε , произведеніе $\log \varepsilon \cdot \delta_1(\varepsilon)$ стремится къ нулю. Если же неравенство (23) соблюдается для всякаго цѣлаго n , то ясно, что $\log \varepsilon \cdot \delta_1(\varepsilon)$ будетъ всегда стремиться къ нулю вмѣстѣ съ ε . Что и требовалось доказать.

28. Теорема Лебега. Въ своей большой работѣ ¹⁾ „Sur les intégrales singulières“ Лебегъ доказываетъ слѣдующую теорему: если разсматривается совокупность всѣхъ непрерывныхъ функцій $f(x)$, для которыхъ $|f(x)| \leq M$, то при всякомъ n , верхнимъ предѣломъ $E_n(f(x))$ является M (т. е. среди функцій $f(x)$, есть такія для которыхъ $E_n(f(x)) > M - \alpha$, какъ бы мало ни было α и, кромѣ того, для всѣхъ функцій $E_n(f) \leq M$). При помощи неравенства (21^{bis}) эту теорему чрезвычайно легко доказать.

Въ самомъ дѣлѣ, какъ бы мало ни было $\varepsilon = \frac{\alpha}{kn}$, среди разсматриваемыхъ функцій можно выбрать такую, что $\delta_1(\varepsilon) = 2M$. Поэтому, вслѣдствіе неравенства (21^{bis}), для этой функціи

$$E_n > M - \alpha, \quad \text{ч. п. т. д.}$$

¹⁾ Ann. de Toulouse. 1909.

(само собой понятно, что для всех функций рассматриваемой совокупности $E_n[f(x)] \leq M$).

Однако теорема Лебега оставляет открытым интересный вопрос: возможно ли указать такой ряд чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$, имеющих пределом 0, чтобы для всякой данной непрерывной функции можно было указать независимое от n число R достаточно большое, чтобы $E_n < R\alpha_n$.

На основании теоремы Лебега можно лишь утверждать, что если бы ряд чисел α_n существовал, то, для всей совокупности непрерывных функций $f(x)$, не превышающих M по абсолютному значению, множитель R не имел бы верхнего предела. Действительно, легко убедиться, что теорема Лебега остается справедливой, если совокупность непрерывных функций заменить одними лишь многочленами; а между тем, каковы бы ни были числа α_n , например $\alpha_n = \frac{1}{2^n}$, для всякого определенного многочлена возможно, конечно, указать число R так, чтобы $E_n < R\alpha_n$.

Неравенство (21^{bis}) дает немедленно отрицательный ответ на поставленный вопрос. В самом деле, если для некоторой функции $E_n < R\alpha_n$, то $\delta_1(\varepsilon) < 2R\alpha_n + k n \varepsilon$. Полагая $\alpha_n > \frac{1}{n}$ (что мы вправе сделать не нарушая общности), берем $\varepsilon = \frac{1}{n^2}$; в таком случае $\delta_1\left(\frac{1}{n^2}\right) < 2R\alpha_n + \frac{k}{n} < (2R + k)\alpha_n$. Но такому неравенству при всяком n не может удовлетворить, например, ни одна непрерывная функция $f(x)$, которая при $x = \frac{1}{n^2}$ обращается в $\sqrt{\alpha_n}$, так как для этой функции $\delta_1\left(\frac{1}{n^2}\right) \geq \sqrt{\alpha_n}$.

29. Теорема. Если для всякого n наилучшее приближение E_n функции $f(x)$ на отрезке $(-1, +1)$ удовлетворяет неравенству $E_n < Mq^n$, то функция $f(x)$ голоморфна внутри эллипса, фокусами которого служат точки $-1, +1$, а полуоси осей равны $\frac{1}{q}$.

В самом деле, обозначая через $P_n(x)$ многочлен степени n , для которого

$$|f(x) - P_n(x)| < Mq^n,$$

можем написать

$$f(x) = P_1(x) + [P_2(x) - P_1(x)] + \dots + [P_n(x) - P_{n-1}(x)] + \dots; \quad (24)$$

при этом

$$|P_n(x) - P_{n-1}(x)| < 2Mq^{n-1}$$

на отрезкѣ $(-1, +1)$. Поэтому во всякой точкѣ H эллипса, котораго сумма полюсей равна $\frac{1}{\varrho_1} < \frac{1}{\varrho}$, а фокусы находятся въ точкахъ $(-1, +1)$, имѣемъ (§ 7)

$$|P_n(x) - P_{n-1}(x)| < \frac{2M}{\varrho_1} \cdot \left(\frac{\varrho}{\varrho_1}\right)^{n-1}$$

Слѣдовательно, рядъ (24) равномерно сходится во всякой области внутри эллипса, котораго сумма полюсей равна $\frac{1}{\varrho}$, а потому функція $f(x)$ голоморфна.

(Обратная теорема будетъ доказана въ 3-й части).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

Приближенное вычисленіе многочленовъ, наименѣе уклоняющихся въ данномъ промежуткѣ отъ данной функціи.

Г л а в а III.

Общій методъ.

30. Введеніе. Идея метода приближеннаго вычисленія многочленовъ, наименѣе уклоняющихся отъ данной функціи, которому посвящена эта глава, состоитъ въ томъ, чтобъ соответствующимъ образомъ использовать уже извѣстные многочлены, наименѣе уклоняющіеся отъ нѣкоторыхъ другихъ данныхъ функцій. Иногда вмѣсто другихъ функцій целесообразно будетъ вводить аналогичныя многочленамъ выраженія, наименѣе уклоняющіеся отъ той же самой функціи. И въ томъ, и въ другомъ случаѣ непрерывный переходъ отъ извѣстнаго къ неизвѣстному совершается посредствомъ аналитическаго продолженія; при этомъ, какъ для практическихъ примѣненій, такъ и для теоретическихъ выводовъ, весьма важно выбрать исходный пунктъ такимъ образомъ, чтобъ первыя же приближенія обладали уже значительной точностью.

Напомнимъ сначала классическіе результаты, вытекающіе изъ исследований Чебышева. (Строгое доказательство этихъ результатовъ читатель найдетъ, напримѣръ, въ книгѣ Borel «Leçons sur les fonctions de variables réelles, p. 88»).

а. Существуетъ одинъ и только одинъ многочленъ P_n степени не выше n , наименѣе уклоняющійся въ промежуткѣ (AB) отъ данной непрерывной функціи $f(x)$.

б. Въ всякомъ многочленѣ степени не выше n только многочленъ $P_n(x)$ обладаетъ свойствомъ, что разность $|f(x) - P_n(x)|$ достигаетъ не менѣе, чѣмъ $(n+2)$ разъ своего максимума въ разсматриваемомъ промежуткѣ.

Изъ послѣдняго предложенія вытекаетъ, что еслибы разность $|f(x) - P_n(x)|$ достигала бы своего максимума болѣе, чѣмъ $(n + 2)$ раза, а именно $n + 2 + k$ разъ, то многочленъ $P_n(x)$ былъ бы въ тоже время единственнымъ наименѣе уклоняющимся отъ функции $f(x)$ среди всѣхъ многочленовъ степени не выше $n + k$. Такимъ образомъ задача опредѣленія многочленовъ $P_n(x)$, по существу, нисколько не суживается, если ограничимся только тѣми значеніями n , для которыхъ разность $|f(x) - P_n(x)|$ достигаетъ своего максимума въ $(n + 2)$ точкахъ.

31. Обобщеніе. Разсмотримъ рядъ степеней $x^{\alpha_0}, x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n}$, гдѣ $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$, и составимъ суммы $A_0x^{\alpha_0} + \dots + A_nx^{\alpha_n}$ съ произвольными коэффициентами A_0, \dots, A_n . Если сумма

$$R_n(x) = B_0x^{\alpha_0} + \dots + B_nx^{\alpha_n},$$

изъ всѣхъ суммъ указанного вида наименѣе уклоняется отъ функции $f(x)$ въ промежуткѣ (AB) , то $R_n(x)$ называется суммой вида $\sum_{i=0}^n A_i x^{\alpha_i}$ наименѣе уклоняющейся отъ функции $f(x)$ въ промежуткѣ (AB) .

Относительно отръзка (AB) необходимо ввести ограниченіе: а именно, на всемъ отръзкѣ $x \geq 0$. Благодаря этому ограниченію числа x^{α_i} будутъ всегда имѣть вполне определенное арифметическое значеніе. Разсужденіями, совершенно подобными тѣмъ, которыя читатель найдетъ въ выше упомянутой книгѣ Вогеля для случая, когда $\alpha_i = i$, можно доказать существованіе суммы $R_n(x)$, наименѣе уклоняющейся отъ данной непрерывной функции $f(x)$, и въ общемъ случаѣ. Для доказательства же того, что эта сумма единственная, намъ необходимо доказать предварительно слѣдующую лемму, являющуюся обобщеніемъ теоремы Декарта.

32. Лемма. Число положительныхъ корней уравненія

$$Q(x) = a_0x^{\alpha_0} + a_1x^{\alpha_1} + \dots + a_nx^{\alpha_n} = 0, \quad (25)$$

гдѣ $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$, не можетъ превышать числа переменъ знаковъ ряда a_0, a_1, \dots, a_n .

Въ случаѣ когда числа a_i цѣлыя, высказанное предложеніе является простымъ слѣдствіемъ изъ известной теоремы Декарта. Точно также случай, когда числа a_i рациональныя, посредствомъ подстановки $x^{\frac{1}{r}} = y$ приводится къ предшествующему.

Положимъ далѣе, что числа a_i какія угодно, но, что всѣ положительныя корни уравненія (25) различны между собой. Если бесконечно мало измѣнить показатели уравненія, то бесконечно мало измѣнятся и корни; поэтому каждому положительному корню даннаго уравненія будетъ соответствовать одинъ положительный корень измѣненнаго урав-

нения, и наоборот, ибо комплексные корни вещественного уравнения всегда попарно сопряженные. Таким образом число положительных корней данного уравнения то же, что и действительного, но в этом последнем всегда можно предположить показатели рациональными. Следовательно, число простых положительных корней уравнения (25) не может превышать числа переменных знаков ряда a_0, a_1, \dots, a_n .

Тем же способом убеждаемся, что число различных положительных корней нечетной кратности не может превышать числа переменных знаков ряда a_0, a_1, \dots, a_n . Но нам остается еще показать, что число корней взятых с их степенью кратности также не превышает упомянутого числа. Для этого составляем уравнение

$$\frac{d}{dx}[x^{1-2n}Q(x)] = 0, \quad (25^{bis})$$

и замечаем, что каждый кратный корень уравнения (25) является в то же время корнем уравнения (25^{bis}) со степенью кратности на одну единицу меньше; кроме этих корней, уравнение (25^{bis}) имеет еще не менее различных положительных корней нечетной кратности, чем уравнение (25). Таким образом число корней уравнения (25^{bis}) взятых с их степенью кратности не меньше числа корней уравнения (25) взятых с их степенью кратности; число же различных корней уравнения (25^{bis}) нечетной кратности не меньше числа всех различных корней нечетной кратности уравнения (25), увеличенного на число различных двойных корней последнего уравнения. Из этого следует, что если мы поступим с уравнением (25^{bis}), как с уравнением (25) и т. д., то мы придем наконец к уравнению, число различных корней которого нечетной кратности будет не меньше числа корней уравнения (25) взятых с их степенью кратности. Но это последнее уравнение будет того же вида,

$$Q_1(x) = b_0 + b_1x^{2^1} + \dots + b_nx^{2^n} = 0 \quad (25^{ter})$$

что и уравнение (25), при чем $b_i \cdot a_i > 0$, так что число переменных знака в рядѣ b_0, b_1, \dots, b_n то же, что и в рядѣ a_0, a_1, \dots, a_n . Поэтому число различных корней нечетной кратности уравнения (25^{ter}) не превышает числа переменных знака в рядѣ a_0, a_1, \dots, a_n ; тем более и общее число положительных корней уравнения (25) взятых с их степенью кратности не может превышать числа переменных знаков ряда a_0, a_1, \dots, a_n .

Слѣдствие. Число положительных корней уравнения (25) не превышает n .

33. Теорема. Существует только одна сумма степеней

$$R_n(x) = \sum_{i=0}^{i=n} B_n x^{2_n}$$

наименее уклоняющая в промежутке АВ отъ функции f(x). При этомъ разность f(x) — R_n(x) достигаетъ не менше, чѣмъ (n+2) раза своего наибольшаго абсолютнаго значенія, послѣдовательно мѣняя свой знакъ. Исключеніе можетъ представляться лишь, если это наибольшее значеніе равно |f(0)|, при α₀ > 0.

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ x₁, x₂... x_k возрастающій рядъ чиселъ, для которыхъ разность f(x) — R_n(x) достигаетъ послѣдовательно наибольшаго абсолютнаго значенія, мѣняя знакъ, находимъ на основаніи соображеній, которыми мы пользовались нѣсколько разъ въ I-й главѣ (стр. 11), что уравненія

$$\begin{aligned} b_0 x_1^{2_0} + \dots + b_n x_1^{2_n} &= f(x_1) - R_n(x_1) = \pm L \\ b_0 x_2^{2_0} + \dots + b_n x_2^{2_n} &= f(x_2) - R_n(x_2) = \mp L \\ \dots & \\ b_0 x_k^{2_0} + \dots + b_n x_k^{2_n} &= f(x_k) - R_n(x_k) = \mp (-1)^k L \end{aligned} \tag{26}$$

должны быть несомѣстимыми, если R_n(x) представляетъ собою сумму указаннаго вида, наименее уклоняющуюся отъ f(x) на отрезкѣ АВ. Но легко убѣдиться, что уравненія (26) были бы совмѣстимы, если бы k < n+2, ибо ни одинъ изъ опредѣлителей

$$\delta_p = \begin{vmatrix} x_1^{2_0} & \dots & x_1^{2_p} \\ \dots & & \dots \\ x_{p+1}^{2_0} & \dots & x_{p+1}^{2_p} \end{vmatrix} = a_0 x_{p+1}^{2_0} + \dots + a_p x_{p+1}^{2_p}$$

не можетъ быть равенъ нулю: это справедливо для p = 0, но если δ_{p-1} ≥ 0, то и δ_p ≥ 0, такъ какъ въ уравненіи

$$a_0 x^{2_0} + \dots + a_p x^{2_p} = 0$$

коэффициентъ a_p = δ_{p-1} ≥ 0, и поэтому это уравненіе не соблюдено тождественно; но оно имѣетъ p положительныхъ ¹⁾ корней x₁,... x_p, и слѣдовательно

¹⁾ Если α₁ = 0, то коэффициентъ a₀ = 0, и потому сумма δ_p, состоящая только изъ p слагаемыхъ, не имѣетъ болѣе (p-1) корней.

$$\delta_p = a_0 x_{p+1}^{2_0} + \dots + a_p x_p^{2_p} \geq 0.$$

Такимъ образомъ 2-я часть теоремы доказана. Допустимъ теперь, что кромѣ $R_n(x)$ существуетъ еще сумма $R'_n(x)$ наименѣе уклоняющаяся отъ данной функціи $f(x)$. Въ такомъ случаѣ, въ силу только что доказаннаго, разность

$$Q(x) = R_n(x) - R'_n(x)$$

въ точкахъ x_1, x_2, \dots, x_{n+2} будетъ послѣдовательно мѣнять знакъ или равна нулю.

Поэтому, если $Q(x_i) \geq 0, Q(x_{i+1}) \geq 0, \dots, Q(x_{i+k+1}) \geq 0$, то между x_i и x_{i+k+1} по крайней мѣрѣ $k+1$ корней; точно также, если $Q(x_{i+1}) = \dots = Q(x_{i+k}) = 0$, то число корней (взятыхъ съ ихъ степенью кратности) не менѣе $k+1$, такъ какъ это число не менѣе k , и кромѣ того разность между нимъ и $k+1$ должна быть четной. Отсюда вытекаетъ, что общее число положительныхъ корней уравненія

$$Q(x) = 0$$

не менѣе $(n+1)$, что невозможно на основаніи леммы (32). Такимъ образомъ существуетъ только одна сумма $R_n(x)$, наименѣе уклоняющаяся отъ функціи $f(x)$ въ данномъ промежуткѣ.

Примѣчаніе. Необходимо помнить, что примѣненіе доказанной теоремы въ случаѣ $\alpha_0 > 0$ и $x \geq 0$ законно лишь, если $f(0) = 0$.

34. Обобщенная теорема de la Vallée Poussin ¹⁾. *Отклоненіе $|f(x) - R_n(x)|$ не можетъ въ промежуткѣ AB оставаться постоянно менѣе наименьшаго изъ значений $|f(x) - P_n(x)|$ въ $(n+2)$ точкахъ, гдѣ $f(x) - P_n(x)$ послѣдовательно мѣняетъ знакъ, если $P_n(x)$ сумми того же вида, что $R_n(x)$.*

Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ противное. Тогда въ $(n+2)$ точкахъ разность

$$Q(x) = P_n(x) - R_n(x) = (f(x) - R_n(x)) - (f(x) - P_n(x)).$$

послѣдовательно мѣняетъ знакъ, и слѣдовательно, уравненіе $Q(x) = 0$ имѣетъ по крайней мѣрѣ $(n+1)$ положительныхъ корней, что невозможно.

Замѣчаніе. Эта теорема была доказана de la Vallée Poussin въ случаѣ многочленовъ, при чемъ промежутокъ AB тогда можетъ быть какой угодно; очевидно, что данное здѣсь доказательство пригодно и для упомянутаго случая.

¹⁾ De la Vallée Poussin. Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée de l'angle. (Bulletin de l'Académie de Belgique, Décembre 1910).

35. Определения. Точки x_1, x_2, \dots, x_k , где $|f(x) - R_n(x)|$ достигает наибольшего значения, мы будем называть *точками отклонения*.

Слѣдуетъ замѣтить, что расположеніе точек отклоненія на отрѣзкѣ AB можетъ быть четырехъ родовъ. А именно: 1-го рода, когда оба конца A и B являются точками отклоненія; 2-го рода, когда только A —точка отклоненія; 3-го рода, когда только B —точка отклоненія; 4-го рода, когда всѣ точки отклоненія находятся внутри отрѣзка AB . Расположеніе 1-го рода является вообще наиболѣе общимъ случаемъ. Однако, если $a_0 > 0$ и $A=0$ (что болѣею частью будетъ имѣть мѣсто въ дальнѣйшихъ приложенияхъ), то расположеніе 1-го рода и 2-го рода будетъ невозможно, такъ какъ вслѣдствіе примѣчанія къ теоремѣ (33) необходимо, чтобы $f(0)=0$; въ этомъ случаѣ, обыкновенно представляется расположеніе 3-го рода.

36. Основная теорема А. Если сумма $P(x, \lambda) = \sum_0^n a_n x^{2n}$, наименѣе уклоняющаяся на отрѣзкѣ AB отъ голоморфной функции $\lambda f(x) + (1-\lambda)\varphi(x)$, имѣетъ $(n+2)$ точки отклоненія одного и того же рода при всякомъ $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$, то коэффициенты суммы $P(x, \lambda)$ и абсциссы точек отклоненія такъ же, какъ и наименѣе отклоненіе, являются голоморфными функциями параметра λ , при условіи, что во внутреннихъ точкахъ отклоненія $F_{x_i}^2 \geq 0$, полагая

$$F(x, \lambda) = \lambda f(x) + (1-\lambda)\varphi(x) - P(x, \lambda).$$

Достаточно будетъ рассмотреть, напримѣръ, случай 1-го рода расположенія точек отклоненія; другими словами, предположимъ, что, при всякомъ $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$, концы отрѣзка A и B являются точками отклоненія. Въ такомъ случаѣ для определенія $P(x, \lambda)$ мы будемъ имѣть $2n+2$ уравненія: ¹⁾

$$\begin{aligned} F'_{x_i}(x_i, \lambda) &= \lambda f'(x_i) + (1-\lambda)\varphi'(x_i) - P'(x_i, \lambda) = 0, & (i=1, \dots, n) \\ [F(x_i, \lambda)]^2 &= L^2, \\ [F(A, \lambda)]^2 &= L^2, \\ [F(B, \lambda)]^2 &= L^2 \end{aligned} \tag{27}$$

съ $(2n+2)$ неизвѣстными: внутренними точками отклоненія x_1, x_2, \dots, x_n , (расположенными въ возрастающемъ порядкѣ), коэффициентами a_0, a_1, \dots, a_n , и отклоненіемъ L .

¹⁾ Если $a_i = i$, то промежутки AB пропозолены; въ общемъ же случаѣ предполагается, что $B > A \geq 0$.

При всякомъ определенномъ значеніи $\lambda = \lambda_0$, система уравненій (27) имѣетъ одну вполне определенную систему вещественныхъ рѣшеній, соответствующую единственной суммѣ, наименѣе уклоняющейся отъ функціи $\lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x)$. Поэтому, если функциональный определитель уравненій (27) относительно неизвѣстныхъ отличенъ отъ нуля, то всѣ неизвѣстныя будутъ аналитическими функціями параметра λ . Такимъ образомъ для доказательства теоремы достаточно будетъ показать, что выше упомянутый функциональный определитель не равенъ нулю. Но этотъ определитель Δ равенъ

$$\pm (2L)^{n+2} \cdot \begin{vmatrix} \overbrace{+1}^{n+1} & 0 & 0 \dots 0 & \overbrace{A^{2_0}}^{n+1} & \overbrace{A^{2_1}}^{n+1} & \dots & \overbrace{A^{2_n}}^{n+1} \\ -1 & 0 & 0 \dots 0 & x_1^{2_0} & x_1^{2_1} & \dots & x_1^{2_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n+1} 0 & 0 \dots 0 & B^{2_0} & B^{2_1} & \dots & B^{2_n} \\ 0 & F''_{x_1^2} & 0 \dots 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & F''_{x_2^2} \dots 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots F''_{x_n^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \pm F''_{x_1^2} F''_{x_2^2} \dots F''_{x_n^2} [A_A + A_x + \dots + A_B] (2L)^{n+2},$$

гдѣ

$$A_A = \begin{vmatrix} x_1^{2_0} x_1^{2_1} \dots x_1^{2_n} \\ x_2^{2_0} \dots x_2^{2_n} \\ \dots \\ B^{2_0} \dots B^{2_n} \end{vmatrix} > 0, \quad A_{x_1} = \begin{vmatrix} A^{2_0} \dots A^{2_n} \\ x_2^{2_0} \dots x_2^{2_n} \\ \dots \\ B^{2_0} \dots B^{2_n} \end{vmatrix} > 0 \text{ и т. д.}$$

Слѣдовательно, $A_A + A_{x_1} + \dots + A_B > 0$, а потому $\Delta \not\equiv 0$, ч. п. т. д.

Примѣчаніе. Можно замѣтить, что при доказательствѣ никакой роли не играло то обстоятельство, что параметръ λ входитъ въ видѣ $\lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x)$; все разсужденіе остается въ силѣ, если разсматриваемая функція голоморфна относительно λ . Это замѣчаніе приводитъ насъ къ другой полезной для примѣненій формулировкѣ основной теоремы.

37. Основная теорема В. Если сумма $P(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i x^{2_i}$, наименѣе уклоняющаяся на отръзкѣ AB отъ функціи $f(x) + (\lambda - 1)Q(x)$, имѣетъ $(n + 2)$ точки отклоненія одного и того же рода, при всякомъ λ ($0 \leq \lambda \leq 1$), а $F''_{x^2} = f''_{x^2} + (\lambda - 1)Q''_{x^2} - P''_{x^2} \geq 0$ во всѣхъ внутреннихъ точкахъ отклоненія, то, полагая, что $Q(x) = \sum_{i=0}^{i=n} b_i x^{2_i}$ есть сумма, наименѣе уклоняющаяся отъ $f(x)$ на отръзкѣ AB , коэффициенты $P(x, \lambda)$ такъ же, какъ абсциссы точекъ отклоненія и отклоненіе, суть голоморфныя функціи λ , при чемъ $P(x, 0) = 0$.

38. Примѣненіе основныхъ теоремъ. Теоремой *A* слѣдуетъ пользоваться, если хотятъ опредѣлить сумму $\sum_{i=0}^{i=n} a_i x^{2i}$, наименѣе уклоняющуюся отъ $f(x)$, зная сумму того же вида наименѣе уклоняющуюся отъ другой данной функціи $\varphi(x)$. Теорему *B* примѣняютъ, когда хотятъ опредѣлить сумму $\sum_{i=0}^{i=n} a_i x^{2i}$ наименѣе уклоняющуюся отъ $f(x)$, зная сумму $\sum_{i=0}^{i=n} b_i x^{2i}$, составленную изъ другихъ степеней x , наименѣе уклоняющуюся отъ той же функціи.

Не трудно понять общій пріемъ пользованія упомянутыми теоремами, къ изложенію котораго мы сейчасъ перейдемъ, обративъ особое вниманіе на вычисленіе функціи $L(\lambda)$, представляющей наименѣе отклоненіе для различныхъ значеній параметра λ .

Если данная функція $f(x)$ не аналитическая, то предварительно надо будетъ замѣнить ее аналитической, достаточно мало отличающейся отъ данной въ разсматриваемомъ промежуткѣ. Такимъ образомъ въ дальнейшемъ мы все время предполагаемъ данную функцію $f(x)$ аналитической. Для примѣненія теоремы *A* выбираемъ нѣкоторую другую аналитическую функцію $\varphi(x)$, для которой наименѣе уклоняющаяся сумма того же вида $P(x) = P(x, 0) = \sum_{i=0}^{i=n} b_i x^{2i}$ известна и, кромѣ того, обладающую свойствомъ, что функція $F(x, \lambda) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)\varphi(x) - P(x, \lambda)$ удовлетворяетъ условію, что во всѣхъ внутреннихъ точкахъ отклоненія $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \geq 0$, при чемъ родъ расположенія точекъ отклоненія независимъ отъ λ .

Послѣ этого вычисляемъ послѣдовательныя производныя $\frac{\partial P}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2}$ и т. д. для $\lambda = 0$. Многочленъ или сумма степеней $P(x, \lambda)$ разлагается такимъ образомъ въ строку Тэйлора относительно λ , представляющую голоморфную функцію при всѣхъ значеніяхъ $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$, значеніе которой $P(x, 1)$, при $\lambda = 1$, равно искомой суммѣ, наименѣе уклоняющейся отъ функціи $f(x)$. Если строка Тэйлора имѣетъ радіусъ сходимости меньше единицы, то для вычисленія $P(x, 1)$ можно во всякомъ случаѣ примѣнить способъ суммированія Миттагъ-Леффлера. Послѣдовательныя производныя $\frac{\partial P}{\partial \lambda} = P_1$, $\frac{\partial^2 P}{\partial \lambda^2} = P_2$ и т. д. при $\lambda = 0$, представляющія собой суммы степеней того же вида, что и $P(x)$, послѣдовательно вычисляются слѣдующимъ образомъ.

Прежде всего замѣчаемъ, что въ $n + 2$ точкахъ отклоненія x_i , соответствующихъ $\lambda = 0$, и, по предположенію, известныхъ, имѣемъ

$$\pm L(0) = \varphi(x_i) - P(x_i, 0).$$

Ватѣмъ, такъ какъ въ этихъ точкахъ, $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ или же $\frac{dx_i}{d\lambda} = 0$, то

$$\pm \frac{dL(0)}{d\lambda} = \frac{\partial F(x_i, 0)}{\partial \lambda} = f(x_i) - \varphi(x_i) - P_1(x_i), \quad (28)$$

при чемъ знакъ первой части равенства (28) всегда тотъ же для опредѣленнаго i , что и въ предыдущемъ равенствѣ.

Такимъ образомъ для опредѣленія $\frac{dL}{d\lambda}$ и $(n+1)$ коэффициентовъ суммы P_1 имѣемъ $(n+2)$ линейныхъ уравненія съ $(n+2)$ неизвѣстными; при чемъ опредѣлитель, составленный изъ коэффициентовъ этихъ уравненій

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0^{\alpha_0} & \dots & x_0^{\alpha_n} \\ -1 & x_1^{\alpha_0} & \dots & x_1^{\alpha_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n+1} x_{n+1}^{\alpha_0} & \dots & x_{n+1}^{\alpha_n} \end{vmatrix}$$

отличенъ отъ нуля, такъ что для каждаго изъ неизвѣстныхъ получается всегда одно вполне опредѣленное значеніе.

Для опредѣленія $\frac{d^2 L}{d\lambda^2}$ и P_2 , замѣчаемъ, что, если x_i представляеть собой неподвижный конецъ отръзка (AB) , т. е. совпадаетъ съ A или съ B , то

$$\pm \frac{d^2 L}{d\lambda^2} = \frac{\partial^2 F(x_i, 0)}{\partial \lambda^2} = -P_2(x_i); \quad (29)$$

если же точка x_i внутренняя, то

$$\pm \frac{d^2 L}{d\lambda^2} = \frac{\partial^2 F(x_i, 0)}{\partial \lambda^2} + 2 \frac{\partial^2 F(x_i, 0)}{\partial \lambda \partial x} \cdot \frac{dx_i}{d\lambda} + \frac{\partial^2 F(x_i, 0)}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{dx_i}{d\lambda}\right)^2;$$

и такъ какъ

$$\frac{\partial^2 F(x_i, 0)}{\partial x \partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial^2 F(x_i, 0)}{\partial x^2} dx_i = 0,$$

слѣдовательно,

$$\pm \frac{d^2 L}{d\lambda^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} - 2 \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right)^2}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}} + \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right)^2}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right)^2}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}} = -P_2 - \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right)^2}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}} \quad (29^{bis})$$

(замѣчаніе относительно знаковъ то же, что въ равенствахъ (28)).

Уравнения (29) и (29^{bis}) представляют снова систему $(n+2)$ линейных уравнений с $(n+2)$ неизвестными: коэффициентами многочлена P_2 и $\frac{d^2L}{d\lambda^2}$. При этом определителем этих уравнений служить тот же определитель δ , отличный от нуля, что и раньше.

Тѣмъ же способомъ можно вычислить и послѣдующія производныя; это вычисленіе всегда приводится къ рѣшенію системы $(n+2)$ линейныхъ уравненій съ $(n+2)$ неизвестными, у которыхъ коэффициенты при неизвестныхъ для производныхъ всѣхъ порядковъ одни и тѣже.

При примѣненіи теоремы В, вычисленія совершенно аналогичны; въ частности равенства (29) и (29^{bis}) остаются безъ измѣненій.

39. Выводъ двухъ неравенствъ. Въ приложеніяхъ, составляющихъ содержаніе слѣдующей главы мы будемъ ограничиваться первыми двумя членами строки Тэйлора: а именно, за приближенное значеніе некаго отклоненія $L(1)$ мы будемъ брать $L(0)$ или $L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda}$. Первымъ изъ этихъ значеній намъ придется пользоваться въ различныхъ частныхъ случаяхъ и въ соответствующихъ мѣстахъ будутъ указаны его болѣе или менѣе общія свойства. Напротивъ мы остановимся здѣсь же на второмъ значеніи, удовлетворяющемъ во всѣхъ случаяхъ неравенству

$$L(1) \geq L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda}. \quad (30)$$

Очевидно, что неравенство (30) будетъ доказано, если будетъ обнаружена для всякаго λ справедливость неравенства

$$\frac{d^2L(\lambda)}{d\lambda^2} \geq 0, \quad (31)$$

ибо

$$L(1) = L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda} + \frac{d^2L(\lambda)}{2d\lambda^2},$$

гдѣ $0 \leq \lambda \leq 1$.

Но неравенство (31) вытекаетъ изъ формулъ (29) и (29^{bis}), имѣющихъ мѣсто при всякомъ λ ($0 \leq \lambda \leq 1$).

Въ самомъ дѣлѣ, знакъ $+$ въ выше упомянутыхъ формулахъ берется, когда $L=F$; знакъ $-$ берется, когда $L=-F$. Поэтому, еслибъ неравенство (31) было бы неправильно, то во внѣшнихъ точкахъ отклоненія было бы $\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} \cdot F < 0$; во внутреннихъ же точкахъ отклоненія, гдѣ

$$F > 0, \text{ т. е. } \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} < 0,$$

мы имѣли бы

$$\frac{d^2 L}{d\lambda^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right)^2}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}} < 0.$$

или

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right)^2 > 0,$$

и тѣмъ болѣе

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0;$$

а во внутреннихъ точкахъ отклоненія, гдѣ $F < 0$, т. е. $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0$, такимъ же образомъ получили бы

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial \lambda}\right)^2}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}} > 0,$$

и поэтому также

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0.$$

Слѣдовательно, во всѣхъ точкахъ отклоненія имѣло бы мѣсто неравенство

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} \cdot F < 0.$$

Такимъ образомъ сумма степеней $\frac{\partial^2 F}{\partial \lambda^2} = \sum_{i=0}^{i=n} c_i x^{\alpha_i}$ должна была бы имѣть по крайней мѣрѣ по одному корню между x_i и x_{i+1} , т. е. имѣла бы не менѣе $(n+1)$ положительныхъ корней, что невозможно.

Итакъ неравенство (31), а вмѣстѣ съ нимъ и неравенство (30), доказаны.

Замѣтимъ, что неравенство (30) можно получить непосредственно изъ теоремы (34).

Въ самомъ дѣлѣ, замѣняя въ формулѣ (28) $\varphi(x_i)$ черезъ $P(x_i) \pm L(0)$, находимъ

$$\pm \left[L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda} \right] = f(x_i) - P(x_i) - P_1(x_i).$$

Такимъ образомъ приближенная сумма $P(x) + P_1(x)$, получающаяся, если въ строѣ Тэйлора сохранить только первые два члена, отклоняется отъ $f(x)$ во всѣхъ $(n+2)$ точкахъ x_i на $\pm \left(L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda} \right)$; слѣдовательно, на основаніи указанной теоремы можно утверждать, что отклоненіе суммы того же вида, наименѣе уклоняющейся отъ $f(x)$ не менѣе, чѣмъ $L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda}$, т. е.

$$L(1) \geq L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda}.$$

Примѣчаніе. Согласно терминологіи de la Vallée Poussin (въ упомянутой выше статьѣ),

$$P(x) + P_1(x)$$

есть сумма степеней, наименѣе уклоняющаяся отъ $f(x)$ въ данныхъ $(n+2)$ точкахъ x_i , при чемъ, слѣдовательно,

$$L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda}$$

есть наименьшее уклоненіе въ этихъ точкахъ.

ГЛАВА IV.

Приближенное вычисление наименьшего отклонения $|x|$ от многочлена данной степени.

40. Задача. *Определить среди всех многочленов степени n , у которых коэффициент при x^p ($0 < p \leq n$) равен 1, тот, который наименее отклоняется от нуля в промежутке 01.*

Если некоторый многочлен $P_n(x) = x^p - R(x)$, где $R(x) = \sum_{i=0}^{i=n-1} \alpha_i x^i$, при чем $\alpha_i = i$, когда $i < p$, и $\alpha_i = i + 1$, когда $i \geq p$, то $R(x)$ есть сумма степеней указанного вида наименее отклоняющаяся от x^p в промежутке 01. Следовательно, задача будет решена, если многочлен $P_n(x)$ будет иметь $(n + 1)$ точек отклонения (§ 33) на отрезке 01. Но для этого достаточно взять многочлен

$$P_n(x) = \frac{\cos 2n \arccos \sqrt{x}}{A_{2p}},$$

где

$$\begin{aligned} \cos 2n \arccos \sqrt{x} = & 2^{2n-1} \left[x^n - \frac{n}{2} x^{n-1} + \frac{n}{2^3} \cdot \frac{2n-3}{2!} x^{n-2} + \dots \right. \\ & \left. \dots + (-1)^l \frac{n}{2^{2l-1}} \cdot \frac{(2n-l-1) \dots (2n-2l+1)}{l!} x^{n-l} + \dots \right], \end{aligned}$$

и A_{2p} равен коэффициенту при x^p в многочлене $\cos 2n \arccos \sqrt{x}$ или коэффициенту при x^{2p} в $\cos 2n \arccos x$, а именно,

$$A_{2p} = (-1)^{n-p} \frac{2^{2p} \cdot n \cdot (n+p-1)(n+p-2) \dots (2p+1)}{(n-p)!},$$

если $p < n - 1$, $A_{2n-2} = -2^{2n-2}n$ и $A_{2n} = 2^{2n-1}$.

В самом деле, многочлен $P_n(x)$ имеет коэффициент при x^p равный единице и кроме того он имеет $(n + 1)$ точек отклонения $x_i = \cos^2 \frac{i\pi}{2n}$, где $i = 0, 1, \dots, n$, на отрезке 01.

Это отклонение таким образом равно $\frac{1}{|A_{2p}|}$; например, для $p=1$, оно равно $\frac{1}{2n^2}$; для $p=2$, оно равно $\frac{3}{2n^2(n^2-1)}$ и т. д.

41. Задача¹⁾. Определить среди всех многочленов степени n , имеющих коэффициент при x^p равный единице, где $0 < p \leq n$, многочлен наименее уклоняющийся от нуля в промежутке $(-1, +1)$.

Пусть сначала p будет числом четным. В таком случае, если $x^p + Q(x)$ удовлетворяет задаче, то тем же свойством обладает и $x^p + Q(-x)$, и тем более многочлен $x^p + \frac{Q(x) + Q(-x)}{2}$ будет также наименее уклоняющимся от нуля в промежутке $(-1, +1)$; но этот последний многочлен будет составлен из одних только четных степеней. Поэтому оставляя в стороне вопрос, будет ли это решение единственным (читатель легко убедится, что, хотя это и не вытекает непосредственно из общей теории, но и в данном случае решение будет только одно), можем ограничиться допущением, что $Q(x)$ составлен только из четных степеней.

Поэтому, полагая $x^2 = y$, мы можем привести нашу задачу к предыдущей. Следовательно, искомый многочлен будет

$$x^p + Q(x) = \frac{\cos n \arccos x}{B_p},$$

если n четное число, и

$$x + Q(x) = \frac{\cos(n-1) \arccos x}{B_p},$$

если n нечетное число, где B_p равен коэффициенту при x^p в числителе.

Иными словами, наилучшее приближение $x^p = x^{2k}$ при помощи многочлена степени $2n$ или $2n+1$ на отрезке $(-1, +1)$ то же, что наилучшее приближение x^k при помощи многочлена степени n на отрезке $(0, 1)$.

Допустим далее, что p нечетное число, $p = 2k+1$. В таком случае, если многочлен $x^p + Q(x)$ дает решение задачи, то тем же свойством обладает и многочлен $x^p - Q(-x)$, а тем более многочлен $x^p + \frac{Q(x) - Q(-x)}{2}$ будет наименее уклоняющимся от нуля на

отрезке $(-1, +1)$. Следовательно, можем ограничиться предположением, что искомый многочлен составлен из одних только нечетных степеней. Задача сводится таким образом к определению сумм нечетных степеней $x, x^3, \dots, x^{2k-1}, x^{2k+3}, \dots, x^n$ (или x^{n-1} , если n четное число), наименее уклоняющейся на отрезке 01 от $x^p = x^{2k+1}$;

¹⁾ Эта задача, как и узнал впоследствии, была уже решена при помощи других рассуждений в упомянутом выше сочинении В. Маркова.

число этих степеней равно $\frac{n-1}{2}$, если n нечетное число, а если n четное число, оно равно $\frac{n-2}{2}$. Следовательно, задача будет решена, если сумма $x^p + Q(x)$ имеет $\frac{n+1}{2}$, а во втором случае $\frac{n}{2}$ точки отклонения на отрезке 01. По этим свойствам обладает

$$x^p + Q(x) = \frac{\cos n \arccos x}{B_p},$$

при n нечетном, и

$$x^p + Q(x) = \frac{\cos(n-1) \arccos x}{B_p},$$

при n четном, где B_p коэффициент при x^p числителя.

Пусть, например, $p = 1$. Тогда

$$B_1 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} n$$

(при n нечетном), и

$$B_1 = (-1)^{\frac{n-2}{2}} (n-1)$$

(при n четном).

Примечание. Таким образом сумма $x + a_1 x^3 + \dots + a_n x^{2n+1}$ в промежутке (0, 1) не может оставаться меньше $\frac{1}{2n+1}$, при этом сумма эта, действительно, не превышает $\frac{1}{2n+1}$, если она равна многочлену $\frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \cos(2n+1) \arccos x$.

42. Преобразование задачи вычисления уклонения $|x|$. В виду того, что функция $|x|$ четная, мы заключаем, как в предыдущем §'е, что многочлен, наименее уклоняющийся от $|x|$ на отрезке $(-1, +1)$ можно предположить состоящим только из четных степеней. Следовательно, этот многочлен есть ничто иное, как сумма $\sum_{i=0}^n b_i x^{2i}$, наименее уклоняющаяся от x в промежутке 01; но вместо того, чтобы исследовать эту сумму, мы будем разсматривать сумму, составленную только из четных степеней: x^2, x^4, \dots, x^{2n} (без нулевой степени). Другими словами, мы будем изучать наименее уклоняющийся от $|x|$ из многочленов, равных нулю при $x = 0$. Если мы обозначим через E'_{2n} наименьшее уклонение, соответствующее сумме последнего вида (без постоянного члена), а через E_{2n} наименьшее уклонение, соответствующее первоначальной сумме, то легко убедиться, что

$$E'_{2n} \geq E_{2n} \geq \frac{1}{2} E'_{2n}. \quad (32)$$

Первое изъ этихъ неравенствъ очевидно; второе вытекаетъ изъ того, что, если многочленъ $P_{2n}(x)$ уклоняется на E_{2n} отъ $|x|$, то $P_{2n}(x) - P_{2n}(0)$ обращается въ нуль при $x=0$, и не уклоняется отъ $|x|$ болѣе, чѣмъ на $2E_{2n}$ (не трудно было бы убѣдиться, что знаки равенства въ неравенствахъ (32) можно отбросить).

Примѣчаніе. Если многочленъ $P(x)$ наименѣе уклоняется отъ $|x|$ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$, то $hP\left(\frac{x}{h}\right)$ есть многочленъ наименѣе уклоняющійся отъ $|x|$ въ промежуткѣ $(-h, +h)$; слѣдовательно, наименьшее уклоненіе пропорціонально длинѣ промежутка $2h$.

43. Теорема. *Наименьшее уклоненіе на отрѣзкѣ 01 суммы вида $\sum_{i=1}^{i=n} a_i x^{a_i}$ отъ x болѣе наименьшаго уклоненія отъ x суммы вида $\sum_{i=1}^{i=n} b_i x^{\beta_i}$, если $a_1 > \beta_1, a_1 \geq \beta_2, \dots, a_n \geq \beta_n$, при чемъ вообще все $\beta_i > 1$.*

Положимъ сначала, что

$$\beta_1 < a_1 \leq \beta_2 \leq a_2 \leq \dots \leq \beta_n \leq a_n.$$

Пусть сумма $Q(x) = B_1 x^{\beta_1} + \dots + B_n x^{\beta_n}$ будетъ наименѣе уклоняющейся отъ x на отрѣзкѣ 01. Въ такомъ случаѣ несомнѣнно

$$B_1 > 0, \quad B_2 < 0, \quad B_3 > 0, \quad \text{и т. д.},$$

ибо уравненіе $x - Q(x) = 0$ должно имѣть по крайней мѣрѣ n положительныхъ корней.

Для примѣненія теоремы (37), строимъ функцію

$$F(x, \lambda) = x + (\lambda - 1)Q(x) - P(x, \lambda),$$

гдѣ $P(x, \lambda)$ есть сумма вида $\sum_{i=1}^{i=n} a_i x^{a_i}$, наименѣе уклоняющаяся отъ $x + (\lambda - 1)Q(x)$. Не трудно убѣдиться, что въ данномъ случаѣ примѣненіе указанной теоремы законно.

Въ самомъ дѣлѣ, коэффициенты суммы

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + (\lambda - 1)Q'(x) - P'_x(x, \lambda),$$

при $\lambda < 1$, не могутъ имѣть болѣе чѣмъ n чередованій знаковъ, поэтому $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ имѣетъ не болѣе n положительныхъ простыхъ корней, такъ что при всякомъ λ конецъ отрѣзка 1 будетъ точкой отклоненія, и кромѣ того, ни въ одной изъ внутреннихъ точекъ отклоненія не будетъ $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$.

Итакъ вычисляемъ производную по параметру λ ,

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = Q(x) - P'_\lambda(x, \lambda),$$

которая обращается въ нуль не менѣе, чѣмъ при n положительныхъ значений x . Отсюда слѣдуетъ, что число чередованій знаковъ коэффициентовъ не менѣе n , а потому первый коэффициентъ въ P' долженъ быть отрицательнымъ. Въ такомъ случаѣ $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ будетъ имѣть ровно n положительныхъ корней, и, при x весьма маломъ, въ частности въ ближайшей къ 0 точкѣ отклоненія, $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ будетъ имѣть знакъ своего перваго члена, т. е.

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} < 0.$$

Но въ этой точкѣ $F(x, \lambda) > 0$; слѣдовательно и

$$\frac{dL}{d\lambda} < 0,$$

откуда заключаемъ, что отклоненіе $L(\lambda)$ идетъ убывая, въ то время какъ λ возрастаетъ отъ 0 до 1. Такимъ образомъ

$$L(1) < L(0).$$

Изъ правильности теоремы въ только что разсмотрѣнномъ случаѣ, легко заключить ее справедливость въ самомъ общемъ случаѣ. Для этого достаточно составить слѣдующую таблицу показателей:

$$\begin{aligned} & \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \\ & \frac{(n-2)\alpha_1 + \beta_1}{n-1}, \beta_1, \alpha_3, \dots, \alpha_n; \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & \frac{\alpha_1 + (n-2)\beta_1}{n-1}, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}, \alpha_n; \\ & \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n. \end{aligned}$$

Сравнивая каждый рядъ показателей съ предыдущимъ, мы видимъ, что они удовлетворяютъ условіямъ только что разсмотрѣннымъ нами. Поэтому беря послѣдовательно суммы степеней, соответствующія каждому ряду, получимъ a fortiori, что и въ общемъ случаѣ наименьшее уклоненіе x отъ суммы вида $\sum_{i=1}^{i=n} a_i x^{2i}$ больше наименьшаго уклоненія отъ суммы вида $\sum_{i=1}^{i=n} b_i x^{2i}$.

44. Слѣдствія. А. *Наименьшее уклоненіе на отръзкѣ 01 многочлена вида $A_1x^2 + A_2x^4 + \dots + A_nx^{2n}$ отъ x меньше, чѣмъ $\frac{1}{2n+1}$.*

Въ самомъ дѣлѣ, изъ § 41 мы знаемъ, что наименьшее отклоненіе на отрѣзкѣ 01 суммы нечетныхъ степеней $a_1x^3 + \dots + a_nx^{2n+1}$ отъ x равно $\frac{1}{2n+1}$.

В. Наименьшее отклоненіе отъ x многочлена вида $B_1x^4 + \dots + B_nx^{2n+2}$ на отрѣзкѣ 01 больше, чѣмъ $\frac{1}{2n+1}$.

45. Теорема. Наименьшее отклоненіе E'_{2n} многочлена безъ свободнаго члена степени $2n$ отъ $|x|$ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$, при $n > 1$, удовлетворяетъ неравенствамъ ¹⁾:

$$\frac{1}{2(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{2n-1} < E'_{2n} < \frac{1}{2n+1}. \quad (33)$$

Въ самомъ дѣлѣ, E'_{2n} есть въ тоже время наименьшее отклоненіе отъ x на отрѣзкѣ 01 многочлена вида $A_1x^2 + A_2x^4 + \dots + A_nx^{2n}$; слѣдовательно, второе изъ неравенствъ равнозначно слѣдствію А предыдущаго §'а. Для доказательства перваго неравенства рассуждаемъ слѣдующимъ образомъ.

По предположенію

$$|x - A_1x^2 - A_2x^4 - \dots - A_nx^{2n}| \leq E'_{2n} \quad (34)$$

на отрѣзкѣ 01. Поэтому при всякомъ положительномъ значеніи μ будемъ тѣмъ болѣе имѣть на томъ же отрѣзкѣ

$$\left| \frac{x}{1+\mu} - A_1 \left(\frac{x}{1+\mu} \right)^2 - \dots \right| \leq E'_{2n},$$

откуда

$$|(1+\mu)x - A_1x^2 - \dots| \leq E'_{2n} \cdot (1+\mu)^2;$$

но вычитая изъ этого неравенства неравенство (34), получимъ неравенство вида

$$|\mu(x - B_1x^4 - \dots - B_{n-1}x^{2n})| \leq E'_{2n} \cdot [(1+\mu)^2 + 1],$$

и наконецъ,

$$|x - B_1x^4 - \dots - B_{n-1}x^{2n}| \leq E'_{2n} \cdot \frac{(1+\mu)^2 + 1}{\mu}.$$

¹⁾ Случай $n = 1$ непосредственно приводится къ рѣшенію квадратнаго уравненія, изъ котораго получается $E'_2 = \frac{1}{2(1+\sqrt{2})}$.

Съ другой стороны, изъ слѣдствія B предыдущаго §'а мы знаемъ, что $|x - B_1x^3 - \dots - B_{n-1}x^{2n}|$ должна (при $n > 1$) становиться болѣе, чѣмъ $\frac{1}{2n-1}$. Слѣдовательно,

$$\frac{1}{2n-1} < E'_{2n} \cdot \frac{(1+\mu)^2+1}{\mu},$$

каково бы ни было положительное число μ .

Но

$$\frac{(1+\mu)^2+1}{\mu}$$

достигаетъ минимума при $\mu = \sqrt{2}$; такимъ образомъ въ частности

$$\frac{1}{2n-1} < E'_{2n} \cdot 2(1+\sqrt{2}),$$

откуда

$$E'_{2n} > \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{2n-1}.$$

Примѣчаніе. На основаніи неравенствъ (32) и (33) можемъ заключить, что

$$\frac{1}{2n+1} > E_{2n} > \frac{1}{4(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{1}{2n-1} \quad (33^{bis})$$

46. Примѣненіе неравенства (30). Какъ мы видѣли въ § 43, примѣненіе теоремы (37) является вполне законнымъ, если

$$F(x, \lambda) = x + (\lambda - 1)Q(x) - P(x, \lambda),$$

гдѣ $Q(x)$ многочленъ вида $B_1x^3 + B_2x^5 + \dots + B_nx^{2n+1}$, наименѣе уклоняющійся отъ x въ промежуткѣ $0,1$, а $P(x, \lambda)$ многочленъ вида $A_1x^2 + A_2x^4 + \dots + A_nx^{2n}$, наименѣе уклоняющійся отъ $x + (\lambda - 1)Q(x)$ въ томъ же промежуткѣ. Мы знаемъ, что

$$x - Q(x) = \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \cos(2n+1) \arccos x$$

и

$$I(0) = \frac{1}{2n+1},$$

а первоначальными точками отклоненія служатъ

$$x_i = \cos \frac{i\pi}{2n+1} \quad (i=0, 1, \dots, n)$$

Такимъ образомъ

$$\begin{aligned}
 1 - Q(1) &= (-1)^n L(0), \\
 \cos \frac{\pi}{2n+1} - Q\left(\cos \frac{\pi}{2n+1}\right) &= (-1)^{n-1} L(0), \\
 &\dots\dots\dots \\
 \cos \frac{n\pi}{2n+1} - Q\left(\cos \frac{n\pi}{2n+1}\right) &= L(0);
 \end{aligned}$$

а уравненія, соответствующія уравненіямъ (28), имѣютъ форму

$$\begin{aligned}
 Q(1) - P_1(1) &= (-1)^n \frac{dL(0)}{d\lambda}, \\
 &\dots\dots\dots \\
 Q\left(\cos \frac{n\pi}{2n+1}\right) - P_1\left(\cos \frac{n\pi}{2n+1}\right) &= \frac{dL(0)}{d\lambda}.
 \end{aligned}$$

Складывая каждое изъ равенствъ первой группы съ соответствующимъ уравненіемъ второй группы, получимъ

$$\begin{aligned}
 1 - P_1(1) &= (-1)^n \left[L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda} \right], \\
 \cos \frac{\pi}{2n+1} - P_1\left(\cos \frac{\pi}{2n+1}\right) &= (-1)^{n-1} \left[L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda} \right], \quad (35) \\
 &\dots\dots\dots \\
 \cos \frac{n\pi}{2n+1} - P_1\left(\cos \frac{n\pi}{2n+1}\right) &= L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda}.
 \end{aligned}$$

Многочленъ $P_1(x)$ имѣетъ форму $A_1x^2 + A_2x^4 + \dots + A_nx^{2n}$. Следовательно, уравненія (35) вполне опредѣляютъ его коэффициенты, а также $\rho = L(0) + \frac{dL(0)}{d\lambda}$. Для удобства рѣшенія этихъ уравненій, замѣтимъ, что къ нимъ можно присоединить уравненія

$$\begin{aligned}
 -\cos \frac{(n+1)\pi}{2n+1} - P_1\left(\cos \frac{(n+1)\pi}{2n+1}\right) &= \rho, \\
 &\dots\dots\dots \\
 -\cos \frac{(2n+1)\pi}{2n+1} - P_1\left(\cos \frac{(2n+1)\pi}{2n+1}\right) &= (-1)^n \rho.
 \end{aligned} \quad (35^{bis})$$

Таким образом многочлен $P_1(x)$ есть многочлен степени не выше $(2n+1)$, который благодаря равенствам (35) и (35^{bis}) должен в $(2n+2)$ точках $x_i = \cos \frac{i\pi}{2n+1}$ ($i = 0, 1, \dots, 2n+1$) принимать значения $x_i - \rho(-1)^{n+i}$, если $i < n$, и $-x_i + \rho(-1)^{n+i}$, если $i > n$, которые станут определенными, если ρ выбрать так, чтобы $P_1(0) = 0$. Поэтому, применяя известную формулу для интерполирования, получим

$$P_1(x) = S(x) \left[\sum_{i=0}^{i=n} \frac{x_i - \rho(-1)^{n+i}}{(x - x_i)S'(x_i)} - \sum_{i=n+1}^{i=2n+1} \frac{x_i - \rho(-1)^{n+i}}{(x - x_i)S'(x_i)} \right], \quad (36)$$

где

$$S(x) = \sin(2n+1) \arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}$$

многочлен степени $2n+2$, имеющий корнями x_i ($i = 0, 1, \dots, 2n+1$).

Условие, что $P_1(0) = 0$, приводит нас к уравнению

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{x_i - \rho(-1)^{n+i}}{x_i S'(x_i)} - \sum_{i=n+1}^{i=2n+1} \frac{x_i - \rho(-1)^{n+i}}{x_i S'(x_i)} = 0,$$

из которого определяем ρ . Для этого замечаем, что

$$S'(x) = -(2n+1) \cos(2n+1) \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \sin(2n+1) \arccos x,$$

откуда

$$S'(x_i) = -(2n+1) \cdot (-1)^i, \text{ если } i = 1, 2, \dots, 2n,$$

и

$$S'(x_i) = -2(2n+1) \cdot (-1)^i, \text{ если } i = 0 \text{ или } 2n+1.$$

Таким образом

$$\sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{S'(x_i)} = \frac{-1}{2n+1} \left[\frac{1}{2} - 1 + 1 + \dots + (-1)^n \right] = \frac{-(-1)^n}{2(2n+1)},$$

$$\sum_{i=n+1}^{i=2n+1} \frac{1}{S'(x_i)} = \frac{1}{2n+1} \left[\frac{1}{2} - 1 + \dots + (-1)^n \right] = \frac{(-1)^n}{2(2n+1)}.$$

Следовательно,

$$\rho \left[\sum_{i=0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{x_i S'(x_i)} - \sum_{i=n+1}^{i=2n+1} \frac{(-1)^i}{x_i S'(x_i)} \right] = \frac{-1}{2n+1},$$

или

$$\rho \left[1 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\cos \frac{i\pi}{2n+1}} - \sum_{i=n+1}^{i=2n} \frac{1}{\cos \frac{i\pi}{2n+1}} \right] = 1,$$

и наконец

$$q = \frac{1}{1 + 2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\cos \frac{i\pi}{2n+1}}} \quad (37)$$

Пользуясь неравенством (30), мы получим отсюда нижнюю границу для $L(1) = E'_{2n}$, а именно,

$$E'_{2n} > q = \frac{1}{1 + 2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\cos \frac{i\pi}{2n+1}}}.$$

Но

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{\cos \frac{i\pi}{2n+1}} &< \frac{1}{\cos \frac{n\pi}{2n+1}} + \int_0^n \frac{dx}{\cos \frac{x\pi}{2n+1}} = \frac{1}{\cos \frac{n\pi}{2n+1}} + \\ &+ \frac{2n+1}{\pi} \int_0^{\frac{n\pi}{2n+1}} \frac{du}{\cos u} = \frac{1}{\cos \frac{n\pi}{2n+1}} + \left(\frac{2n+1}{\pi}\right) \log \frac{1 + \sin \frac{n\pi}{2n+1}}{\cos \frac{n\pi}{2n+1}} = \\ &= \frac{1}{\frac{\pi}{4n+2} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{4n+2}\right)^3 + \dots} + \frac{2n+1}{\pi} \log \left(1 + \sin \frac{n\pi}{2n+1}\right) - \\ &- \frac{2n+1}{\pi} \log \left[\frac{\pi}{4n+2} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{4n+2}\right)^3 + \dots\right] = \frac{4n+2}{\pi} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\pi^2}{24(2n+1)^2} + \dots} + \\ &+ \frac{2n+1}{\pi} \log \left(2 - \frac{\pi^2}{8(2n+1)^2} + \dots\right) + \frac{2n+1}{\pi} \log \frac{4n+2}{\pi} - \\ &- \frac{2n+1}{\pi} \log \left(1 - \frac{\pi^2}{24(2n+1)^2} + \dots\right) = \frac{2n+1}{\pi} \log \frac{8n+4}{\pi} + \frac{4n+2}{\pi} + \varepsilon_n, \end{aligned}$$

где ε_n стремится къ нулю, когда n возрастаетъ безконечно, и, при всякомъ n , $\varepsilon_n < \frac{1}{2}$.

Слѣдовательно, при всякомъ n ,

$$E'_{2n} > q > \frac{\pi}{(4n+2) \left[2 + \log \frac{8n+4}{\pi}\right]}. \quad (38)$$

Неравенство (38), какъ мы видимъ, даетъ значительно менѣе близкую къ E'_{2n} нижнюю границу, чѣмъ неравенство (33).

47. Замяна приближеннаго многочлена $P_1(x)$ другимъ многочленомъ. Вмѣсто того, чтобъ продолжать систематическое примѣненіе общаго метода, разсмотримъ многочленъ $R(x)$ степени $2n$, опредѣляемый условиями,

что онъ равенъ $|x|$ въ точкахъ $x_k = \cos \frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{2n}$ ($k=0, 1, \dots, 2n-1$),

гдѣ $T(x) = \cos 2n \arccos x = 0$, и кромѣ того равенъ нулю при $x=0$.

Замѣчаемъ, что

$$T'(x) = \frac{2n \sin 2n \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Поэтому

$$T'(x_k) = (-1)^k \frac{2n}{\sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{2n}}.$$

Слѣдовательно,

$$R(x) = \frac{xT'(x)}{2n} \left[\sum_{k=0}^{k=2n-1} \frac{(-1)^k \sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{2n}}{x - \cos \frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{2n}} - \sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{(-1)^k \sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{2n}}{x - \cos \frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{2n}} \right]. \quad (39)$$

Но, съ другой стороны,

$$x = \frac{xT'(x)}{2n} \left[\sum_{k=0}^{k=2n-1} \frac{(-1)^k \sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{2n}}{x - \cos \frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{2n}} + \sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{(-1)^k \sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{2n}}{x - \cos \frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{2n}} \right].$$

Откуда

$$x - R(x) = \frac{xT'(x)}{n} \sum_{k=n}^{k=2n-1} \frac{(-1)^k \sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{2n}}{x - \cos \frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{2n}} = \frac{-xT'(x)}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{(-1)^k \sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{2n}}{x + \cos \frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{2n}}; \quad (40)$$

и такъ какъ многочленъ $R(x)$ представляетъ собой сумму четныхъ степеней, то $|x| - R(x)$, какъ при положительныхъ, такъ и при отрицатель-

ныхъ значенийъ x , равняется разности $x - R(x)$, взятой только для положительныхъ значений x .

Преобразуемъ сумму

$$H = - \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{(-1)^k \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2n}}{x + \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2n}} =$$

$$= - \sum_{k=1, 3, \dots, n-1} \frac{\sin\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2n} \left[x + \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2n} \right] - \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2n} \left[x + \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2n} \right]}{\left[x + \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2n} \right] \left[x + \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2n} \right]} =$$

$$= \sum_{k=1, 3, \dots, n-1} \frac{2x \sin \frac{\pi}{4n} \cos \frac{k\pi}{2n} + \sin \frac{\pi}{2n}}{\left[x + \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2n} \right] \left[x + \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2n} \right]}, \quad (41)$$

полагая для опредѣленности n четнымъ.

Теперь легко убѣдиться, что для всякаго *опредѣленнаго* положительнаго значения x ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} xH(x) = \frac{1}{2}. \quad (42)$$

Дѣйствительно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} xH(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1, 3, \dots} \frac{\pi}{2n} \frac{x^2 \cos \frac{k\pi}{2n} + x}{\left(x + \cos \frac{k\pi}{2n}\right)^2} = \frac{x}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos \alpha + 1}{(x + \cos \alpha)^2} d\alpha = \frac{1}{2}.$$

Такимъ образомъ

$$|x| - R(x) = \frac{\cos 2n \arccos x}{2n} + \frac{\varepsilon_n(x) \cos 2n \arccos x}{2n}, \quad (43)$$

при чемъ $\varepsilon_n(0) = -1$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(x) = 0$, если $|x| > 0$.

48. Опредѣленіе нижней границы E'_{2n} . Многочленомъ $R(x)$ можно воспользоваться для опредѣленія нижней границы E'_{2n} при помощи обобщенной теоремы de la Vallée Poussin.

Для этого покажемъ сначала ¹⁾, что при всякомъ $x > 0$,

$$H(x) > \frac{n}{2n+1} \left[\frac{1}{x + \frac{\pi}{4n}} - \frac{1}{x + \frac{2n+1}{4n} \pi} \right]. \quad (44)$$

¹⁾ Мы предполагаемъ $n \geq 2$. Случай, когда $n=1$, не представляетъ никакихъ трудностей, какъ это уже было замѣчено ранѣе.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\begin{aligned}
 H(x) &> \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sum_{1, 3, \dots, n-1} \frac{1}{\left[x + \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2n} \right] \left[x + \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2n} \right]} \\
 &= \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sum_{1, 3, \dots} \frac{1}{\left[x + \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2n} \right] \left[x + \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2n} \right]} > \\
 &> \sin \frac{\pi}{2n} \sum_{1, 3, \dots} \frac{1}{\left(x + \frac{(2k-1)\pi}{4n} \right) \left(x + \frac{(2k+1)\pi}{4n} \right)} > \\
 &> \frac{\pi}{2n+1} \cdot \sum_{1, 3, \dots} \frac{1}{\left[x + \frac{(2k-1)\pi}{4n} \right] \left[x + \frac{(2k+1)\pi}{4n} \right]} > \\
 &> \frac{\pi}{2(2n+1)} \sum_{1, 2, \dots, n} \frac{1}{\left(x + \frac{2k-1}{4n} \pi \right) \left(x + \frac{2k+1}{4n} \pi \right)} = \\
 &= \frac{n}{2n+1} \left[\frac{1}{x + \frac{\pi}{4n}} - \frac{1}{x + \frac{2n+1}{4n} \pi} \right].
 \end{aligned}$$

Отсюда заключаемъ безъ труда, что при $x \geq \frac{\pi}{8n}$

$$x \cdot H(x) > \frac{n}{2n+1} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3} \right);$$

а потому, какъ бы мало ни было ε , можно взять n достаточно большымъ, чтобъ имѣть

$$x \cdot H(x) > \frac{1-\varepsilon}{6}.$$

Поэтому разность

$$x - R(x) = \frac{x \cdot H(x) \cdot T(x)}{n},$$

въ точкахъ

$$Z_i = \cos \frac{i\pi}{2n}, \quad (i=0, 1, \dots, n-1)$$

послѣдовательно мѣняя знакъ, становится по абсолютному значенію больше $\frac{1-\varepsilon}{6n}$ и, наконецъ, снова переменявъ знакъ, въ точкѣ $\frac{\pi}{8n}$ превышаетъ

$$\frac{1-\varepsilon}{6n} T\left(\frac{\pi}{8n}\right).$$

Примѣняя обобщенную теорему de la Vallée Poussin, заключаемъ, что

$$E'_{2n} > \frac{1-\varepsilon}{6n} \cdot T\left(\frac{\pi}{8n}\right),$$

или, полагая n достаточно большимъ, находимъ

$$E'_{2n} > \frac{1}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2n}. \quad (45)$$

Примѣчаніе. Легко было бы проверить, что $E'_{2n} > \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2n}$ для всякаго n ; но это неравенство менѣе точно, чѣмъ неравенство (33), которое получено было уже выше другимъ способомъ.

Въ прилагаемомъ ниже добавленіи къ этой главѣ рѣчь будетъ идти о приближенномъ вычисленіи E_{2n} . Что же касается E'_{2n} , то, пользуясь болѣе точнымъ вычисленіемъ $xH(x)$, для весьма большихъ значеній n , можно получить, пользуясь тѣмъ же многочленомъ $R(x)$,

$$E'_{2n} > \frac{0,34}{2n}.$$

Добавленіе ¹⁾ къ главѣ IV.

Вычисленіе $E_{2n} |x|$ для весьма большихъ значеній n .

49. Преобразование разности $|x| - R(x)$ для весьма большихъ значеній n . Согласно обозначеніямъ § 47, равенству (40) можно придать видъ ²⁾

$$|x| - R(x) = \frac{xT(x) \cdot H(x)}{n}, \quad (40^{bis})$$

гдѣ

$$H(x) = \sum_{k=1, 3, \dots, n-1} \frac{2x \sin \frac{\pi}{4n} \cos \frac{k\pi}{2n} + \sin \frac{\pi}{2n}}{\left[x + \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2n} \right] \left[x + \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2n} \right]}. \quad (41)$$

Но при безконечномъ возрастаніи n , $xH(x)$ стремится, очевидно, къ тому же предѣлу, что и

$$xH_1(x) = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1, 3, \dots} \frac{x^2 \cos \frac{k\pi}{2n} + x}{\left[x + \cos \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2n} \right] \left[x + \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2n} \right]},$$

при чемъ разность $xH(x) - xH_1(x)$ равномерно стремится къ нулю, если $0 \leq x \leq 1$. Такимъ образомъ

¹⁾ Важнѣйшіе результаты этого добавленія были сообщены мной Парижской Академіи Наукъ 22-го января 1912 года; замѣчу при этомъ, что неравенства (8) упомянутого сообщенія должны быть замѣнены неравенствами (59) печатаемаго ниже текста.

²⁾ Принимая во вниманіе, что мы имѣемъ въ виду лишь весьма большія значенія n , можно ограничиться разсмотрѣніемъ четныхъ значеній n , благодаря чему $T(x) = \cos 2n\pi x \cos x = \cos 2n\pi x \sin x$.

$$|x| - R(x) = \frac{T(x)}{n} [xH_1(x) + \alpha_n],$$

где α_n равномерно приближается къ нулю, когда n возрастаетъ безконечно.
Я говорю далѣе, что *разность*

$$\delta_n = xH_1(x) - xH_2(x),$$

иде

$$H_2(x) = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1, 3, \dots} \frac{1}{\left(x + \frac{k\pi}{2n}\right)^2 - \frac{\pi^2}{16n^2}}, \quad (46)$$

также равномерно стремится къ нулю при безконечномъ возрастаніи n , если $0 \leq x \leq 1$.

Для того, чтобы въ этомъ убѣдиться, замѣчаемъ сперва, что

$$xH_1(x) = \frac{\pi}{2n} \cdot \sum_{k=1, 3, \dots, n-1} \frac{x^2 \sin \frac{k\pi}{2n} + x}{\left[x + \sin\left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2n}\right] \left[x + \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2n}\right]}.$$

Беремъ далѣе нѣкоторое произвольно малое число x_0 . Изъ § 47 мы уже знаемъ, что, при $x \geq x_0$, $xH(x)$, а поэтому и $xH_1(x)$, при n достаточно большомъ, равномерно приближается къ $\frac{1}{2}$; но не трудно видѣть, что къ тому же предѣлу равномерно стремится (при $x \geq x_0$) и

$$F(v) = xH_2(x) = \frac{\pi}{2n} \sum_{1, 3, \dots} \frac{x}{\left(x + \frac{k\pi}{2n}\right)^2 - \frac{\pi^2}{16n^2}} = \sum_{1, 3, \dots} \frac{v}{(v+k)^2 - \frac{1}{4}}, \quad (46^{bis})$$

где $v = \frac{2nx}{\pi}$ безконечно возрастаетъ. Дѣйствительно,

$$\int_1^{\infty} \frac{v dz}{(v+z)^2 - \frac{1}{4}} < 2 \sum_{1, 3, \dots} \frac{v}{(v+k)^2 - \frac{1}{4}} < \int_1^{\infty} \frac{v dz}{(v+z)^2 - \frac{1}{4}} + 2 \frac{v}{(v+1)^2 - \frac{1}{4}};$$

поэтому, при $v = \infty$,

$$\text{пред.} \sum_{1, 3, \dots} \frac{v}{(v+k)^2 - \frac{1}{4}} = \text{пред.} \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{v dz}{(v+z)^2 - \frac{1}{4}} = \text{пред.} \frac{v}{2} \log \frac{v + \frac{3}{2}}{v + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Разсмотримъ, съ другой стороны, значенія $x < x_0$. Для этихъ значеній разобьемъ на двѣ части сумму

$$xH_1(x) = \frac{\pi}{2n} \sum_{1,3,\dots} \frac{x^2 \sin \frac{k\pi}{2n}}{\left[x + \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2n} \right] \left[x + \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2n} \right]} +$$

$$+ \frac{\pi}{2n} \sum_{1,3,\dots} \frac{x}{\left[x + \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2n} \right] \left[x + \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2n} \right]},$$

и извлекаемъ сначала часть

$$xH'_1(x) = \frac{\pi}{2n} \sum_{1,3,\dots} \frac{x}{\left[x + \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2n} \right] \left[x + \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2n} \right]}.$$

Здѣсь мы можемъ снова положить $v = \frac{2nx}{\pi}$, такъ что

$$xH'_1(x) = \sum_{1,3,\dots} \frac{v}{\left[v + \frac{2n}{\pi} \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2n} \right] \left[v + \frac{2n}{\pi} \sin \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2n} \right]}.$$

Въ этой суммѣ разсматриваемъ во первыхъ члены, у которыхъ

$$k + \frac{1}{2} \leq \frac{2n}{\pi} \sqrt{x_0}.$$

Каждый изъ этихъ членовъ напомнимъ въ видѣ

$$I_k = \frac{v}{\left\{ v + \left(k - \frac{1}{2} \right) \left[1 - \Theta \left(k - \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\pi^2}{4n^2} \right] \right\} \left\{ v + \left(k + \frac{1}{2} \right) \left[1 - \Theta_1 \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\pi^2}{4n^2} \right] \right\}},$$

гдѣ $\Theta < \frac{1}{6}$, $\Theta_1 < \frac{1}{6}$, или

$$I_k = \frac{v}{\left[v + \left(k - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \Theta' x_0 \right) \right] \left[v + \left(k + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \Theta'_1 x_0 \right) \right]},$$

при чемъ также $\Theta' < \frac{1}{6}$ и $\Theta'_1 < \frac{1}{6}$. Откуда находимъ

$$\frac{I'_k}{\left(1 - \frac{x_0}{6} \right)^2} > I_k > I'_k,$$

обозначая через

$$I'_k = \frac{v}{\left[v + \left(k - \frac{1}{2} \right) \right] \left[v + \left(k + \frac{1}{2} \right) \right]} = \frac{v}{(v+k)^2 - \frac{1}{4}}$$

соответствующий членъ ряда (46^{bis}). Такимъ образомъ и

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x_0}{6} \right)^2} \Sigma I'_k > \Sigma I_k > \Sigma I'_k$$

для значений k , удовлетворяющихъ неравенству

$$k + \frac{1}{2} \leq \frac{2n}{\pi} \sqrt{x_0}.$$

Перейдемъ теперь къ остальнымъ членамъ. Замѣчаемъ, что вообще $\sin \frac{\pi b}{2} > b$ (если $0 < b < 1$); поэтому

$$I_k < \frac{v}{\left[v + \frac{2}{\pi} \left(k - \frac{1}{2} \right) \right] \left[v + \frac{2}{\pi} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right]} = \frac{\frac{\pi}{2} v}{v + \frac{2}{\pi} \left(k - \frac{1}{2} \right)} \cdot \frac{\frac{\pi}{2} v}{v + \frac{2}{\pi} \left(k + \frac{1}{2} \right)}$$

Слѣдовательно,

$$\sum_{k=k_0}^{k=\infty} I_k < \frac{\frac{\pi}{2} v}{v + \frac{2}{\pi} \left(k_0 - \frac{1}{2} \right)}.$$

Такимъ образомъ сумма всѣхъ членовъ, для которыхъ

$$k + \frac{1}{2} > \frac{2n}{\pi} \sqrt{x_0},$$

меньше, чѣмъ

$$\frac{\frac{\pi}{2} v}{v + \frac{2}{\pi} \left(\frac{2n\sqrt{x_0}}{\pi} - 1 \right)} \leq \frac{\pi n x_0}{2n x_0 + 2 \left(\frac{2n\sqrt{x_0}}{\pi} - 1 \right)} = \frac{\frac{\pi}{2} \sqrt{x_0}}{\frac{2}{\pi} + \sqrt{x_0} - \frac{1}{n\sqrt{x_0}}};$$

поэтому, взявъ n достаточно большимъ (а именно, $n > \frac{1}{x_0}$), мы можемъ сдѣлать указанную сумму меньшею, чѣмъ $\pi \sqrt{x_0}$. Ясно, что послѣднее утверждение тѣмъ болѣе будетъ справедливо для суммы соответствующихъ членовъ ряда (46^{bis}). Отсюда слѣдуетъ, что, при $x < x_0$ и $n > \frac{1}{x_0}$,

$$xH_2(x) < xH_1'(x) < \frac{xH_2(x)}{\left(1 - \frac{x_0}{6}\right)^2} + \pi \sqrt{x_0},$$

или, замечая, что $xH_2(x) < 1$,

$$xH_2(x) < xH_1'(x) < xH_2(x) + \frac{x_0}{2} + \pi \sqrt{x_0}.$$

Остается, наконец, еще заметить, что первая часть

$$xH_1'(x) = \frac{\pi}{2n} \sum_{1,3,\dots} \frac{x^2 \sin \frac{k\pi}{2n}}{\left[x + \sin \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2n}\right] \left[x + \sin \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2n}\right]}$$

суммы $xH_1(x)$ меньше, чем $x^2H_1'(x)$; следовательно,

$$xH_2(x) < xH_1(x) < xH_2(x) + 5x_0 + \pi \sqrt{x_0}.$$

Таким образом, разность

$$\delta_n(x) = xH_1(x) - xH_2(x),$$

как для $x \geq x_0$, так и для $x < x_0$ равномерно стремится к нулю, если n возрастает бесконечно.

Поэтому для всех значений x можем написать

$$|x| - R(x) = \frac{T(x)}{n} [xH_2(x) + \beta_n], \quad (47)$$

или

$$|x| - R(x) = \frac{T(x)}{n} [F(x) + \beta_n], \quad (47bis)$$

где β_n равномерно стремится к нулю.

Слѣдствіе. Предель $xH_2(x)$ равен $\frac{1}{2}$, если nx возрастает бесконечно. Таким образом

$$|x| - R(x) = \frac{T(x)}{2n} [1 + \varepsilon_n(x)],$$

где $\varepsilon_n(x)$ стремится к нулю, если nx возрастает бесконечно.

50. Опредѣленіе верхней границы E_{2n} . Построимъ многочленъ

$$Q(x) = R(x) + \frac{T(x)}{4n} \quad (48)$$

Я говорю, что максимумъ разности $||x| - Q(x)|$ равенъ $\frac{1 + \varepsilon}{4n}$, гдѣ ε стремится къ нулю при $n = \infty$.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$|x| - Q(x) = \frac{T(x)}{n} \left[xH_2(x) - \frac{1}{4} + \beta_n \right].$$

Такимъ образомъ, наше утверждение будетъ доказано, если мы убедимся, что

$$xH_2(x) < \frac{1}{2}, \quad (49)$$

такъ какъ $|T(x)| \leq 1$.

Преобразуемъ для этого выражение

$$xH_2(x) = F(v) = \sum_{k=1,3,\dots} \frac{v}{(v+k)^2 - \frac{1}{4}} = 2v \left[\frac{1}{2v+1} - \frac{1}{2v+3} + \frac{1}{2v+5} - \frac{1}{2v+7} + \dots \right], \quad (46^{bis})$$

воспользовавшись некоторыми классическими результатами изъ теоріи функций Γ .

Извѣстно, что

$$\psi(a) = \frac{d \log \Gamma(a)}{da} = -\gamma + \left(1 - \frac{1}{a}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{a+n}\right) + \dots,$$

гдѣ γ есть постоянная (Эйлера). Поэтому

$$F(v) = \frac{v}{2} \left\{ (\gamma - \gamma) - \left[\left(1 - \frac{1}{\frac{v}{2} + \frac{1}{4}}\right) - \left(1 - \frac{1}{\frac{v}{2} + \frac{3}{4}}\right) \right] - \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{v}{2} + \frac{5}{4}}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{v}{2} + \frac{7}{4}}\right) \right] - \dots \right\} = \frac{v}{2} \left[\psi\left(\frac{v}{2} + \frac{3}{4}\right) - \psi\left(\frac{v}{2} + \frac{1}{4}\right) \right].$$

Кромѣ того, извѣстно ¹⁾ также, что

$$\psi(a+1) = -\gamma + \int_0^1 \frac{y^a - 1}{y-1} dy.$$

Слѣдовательно,

¹⁾ Encyclopedie der mathematischen Wissenschaften. Bd. II (Teil I₂). Brunel „Bestimmte Integrale“ § 12.

$$F(v) = \frac{v}{2} \int_0^1 \frac{y^{\frac{v-1}{2}} - y^{\frac{v-3}{2}}}{y-1} dy = v \int_0^1 \frac{z^{v+\frac{1}{2}} - z^{v-\frac{1}{2}}}{z^2-1} dz = v \int_0^1 \frac{z^{v-\frac{1}{2}}}{z+1} dz. \quad (50)$$

Интегрируя по частям, получим последовательно

$$F(v) = v \left[\frac{1}{2v+1} + \frac{1}{v+\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{z^{v+\frac{1}{2}} dz}{(z+1)^2} \right] = v \left[\frac{1}{2v+1} + \frac{1}{(2v+1)(2v+3)} + \frac{2}{\left(v+\frac{1}{2}\right)\left(v+\frac{3}{2}\right)} \int_0^1 \frac{z^{v+\frac{3}{2}} dz}{(z+1)^3} \right]$$

и т. д., наконец,

$$xH_2(x) = F(v) = \frac{v}{2v+1} \left[1 + \frac{1}{2v+3} + \frac{1 \cdot 2}{(2v+3)(2v+5)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(2v+3)(2v+5)(2v+7)} + \dots \right] \quad (51)$$

Замѣтимъ ¹⁾, хотя мы этимъ свойствомъ и не будемъ пользоваться, что полученный рядъ гипергеометрической и, согласно общепринятымъ обозначеніямъ (Jordan, Cours d'analyse, t. I, § 379), можно написать

$$F(v) = \frac{v}{2v+1} F\left(1, 1, v+\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (51^a)$$

Изъ формулы (51) легко вывести, что

$$xH_2(x) = F(v) < \frac{1}{2}. \quad (49)$$

Дѣйствительно, замѣняя въ формулѣ (51) все члены, слѣдующіе четвертымъ, членами геометрической прогрессіи съ знаменателемъ $\frac{1}{2}$, получимъ

$$F(v) < \frac{v}{2v+1} \left[1 + \frac{v}{2v+3} + \frac{1 \cdot 2}{(2v+3)(2v+5)} + 2 \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(2v+3)(2v+5)(2v+7)} \right]$$

неравенство же

$$\frac{v}{2v+1} \left[1 + \frac{1}{2v+3} + \frac{1 \cdot 2}{(2v+3)(2v+5)} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{(2v+3)(2v+5)(2v+7)} \right] < \frac{1}{2}$$

¹⁾ Формула (51) можетъ быть также получена непосредственно изъ (46^{bis}) при помощи преобразованія Эйлера.

приведеніемъ къ общему знаменателю приводится къ неравенству

$$2v^2 + 10v + \frac{105}{2} > 0,$$

которое, конечно, соблюдено при $v > 0$, а потому справедливо и неравенство (49).

Итакъ, уклоненіе многочлена $Q(x)$ отъ $|x|$ равно $\frac{1+\varepsilon}{4n}$, гдѣ ε стремится къ нулю при $n = \infty$.

51. Опредѣленіе нижней границы E_{2n} . Простѣйшій приемъ опредѣленія нижней границы E_{2n} заключается въ построеніи многочлена, аналогичнаго многочлену (48). Я укажу лишь ходъ вычисленій, которые легко проверить, пользуясь таблицей значеній функции $F(v)$ и, въ частности, замѣчая, что $F\left(\frac{1}{3}\right) > 0,282$.

Многочленъ

$$Q_1(x) = R(x) + \frac{F(1) \cdot T(x)}{2n},$$

при n весьма большомъ, обладаетъ свойствомъ, что разность

$$|x| - Q_1(x)$$

въ точкѣ 0 равна $-\frac{F(1)}{2n}$, и въ точкахъ $\sin \frac{k\pi}{2n}$ имѣетъ знакъ $(-1)^k$, будучи по абсолютному значенію не менѣе, чѣмъ $\frac{0,429}{2n}$. Кромѣ того, въ точкѣ $x = \frac{\pi}{6n}$ разность

$$|x| - Q_1(x) = \frac{1}{2n} \left[F\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} F(1) \right]$$

положительна и не менѣе ¹⁾, чѣмъ $\frac{0,067}{2n}$.

Отсюда слѣдуетъ, что многочленъ

$$Q_1(x) - \frac{0,181}{2n}$$

въ указанныхъ точкахъ имѣетъ уклоненія отъ $|x|$, меньшія, чѣмъ $\frac{0,248}{2n}$, и при томъ чередующихся знаковъ; поэтому, на основаніи теоремы de la Vallée Poussin, находимъ

¹⁾ Замѣняя $\frac{\pi}{6n}$ другими близкими къ этому числу значеніями, можно было бы повысить нижнюю границу, но не болѣе, чѣмъ на 2 или 3 тысячныя.

$$E_{2n} > \frac{0,248}{2n}.$$

Эту нижнюю границу можно несколько повысить, применяя другой приемъ.

52. Второй способ вычисления нижней и верхней границъ E_{2n} . Построимъ многочленъ

$$Q_2(x) = R(x) + \frac{T(x)}{4n^3} \frac{\pi^2 a}{x^2 - \sin^2 \frac{\pi}{4n}} + \frac{B \cdot T(x)}{n},$$

гдѣ a и B постоянныя величины, которыя мы постараемся опредѣлить наиболее благоприятнымъ образомъ. Для весьма большихъ значеній n , первый изъ добавочныхъ членовъ можетъ быть замѣненъ членомъ

$$\frac{a}{n} \cdot \frac{\cos \pi v}{v^2 - \frac{1}{4}},$$

гдѣ по прежнему $x = \frac{\pi v}{2n}$, такъ какъ, для конечныхъ значеній v , многочленъ $T(x)$ бесконечно мало отличается отъ $\cos \pi v$, а при бесконечномъ возрастаніи v первый членъ бесконечно малъ по сравненію съ вторымъ.

Будемъ снова разсматривать значенія $|x| = Q_2(x)$ въ тѣхъ же точкахъ. Достаточно будетъ ограничиться вычисленіемъ ихъ для $v = 0, \frac{1}{3}, 1, 2$, такъ какъ не трудно будетъ убѣдиться, что въ послѣдующихъ точкахъ уклоненіе будетъ ити увеличиваясь. Находимъ, что

$$\left. \begin{aligned} n \cdot [|x| - Q_2(x)] &= 4a - B, \text{ при } v = 0; \\ n \cdot [|x| - Q_2(x)] &= \frac{1}{2} F\left(\frac{1}{3}\right) + 3,6a - \frac{B}{2}, \text{ при } v = \frac{1}{3}; \\ n \cdot [|x| - Q_2(x)] &= -F(1) + \frac{4}{3}a + B, \text{ при } v = 1; \\ n \cdot [|x| - Q_2(x)] &= F(2) - \frac{4}{15}a - B, \text{ при } v = 2. \end{aligned} \right\} (52)$$

Постоянныя a и B опредѣляемъ такъ, чтобъ 1-е и 3-е значеніе были равны между собой, а 2-е и 4-е были равны между собой, т. е.

$$\left. \begin{aligned} 4a - B &= -F(1) + \frac{4}{3}a + B, \\ \frac{1}{2} F\left(\frac{1}{3}\right) + 3,6a - \frac{B}{2} &= F(2) - \frac{4}{15}a - B; \end{aligned} \right\} (53)$$

исключая B , получимъ

$$a = \frac{15}{272} \left[4F(2) - F(1) - 2F\left(\frac{1}{3}\right) \right],$$

откуда

$$0,049 < a < 0,0501.$$

Разность между 4-мъ и 1-мъ значеніемъ, равная

$$F(2) - \frac{64a}{15},$$

не менѣе, слѣдовательно, чѣмъ 0,26. Отсюда заключаемъ, какъ въ предыдущемъ §'ѣ, что

$$E_{2n} > \frac{0,26}{2n}.$$

Можно произвести вычисленія, замѣняя второе значеніе $v = \frac{1}{3}$ другими близкими ему, но значительнаго увеличенія нижней границы такимъ образомъ не получится.

Съ другой стороны, многочленъ $Q_2(x)$ даетъ возможность значительно понизить верхнюю границу E_{2n} . Дѣйствительно, построимъ многочленъ $Q_2(x)$, въ которомъ полагаемъ

$$B = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \dots = \frac{1}{2} \log 2, \quad a = \frac{1}{8} F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} \log 2,$$

и рассмотримъ максимумъ модуля разности

$$n \cdot [|x| - Q_2(x)] = T(x) \left[xH(x) - B - \frac{a\pi^2}{4n^2 \left(x^2 - \sin^2 \frac{\pi}{4n} \right)} \right].$$

Если n бесконечно возрастаетъ, эта разность бесконечно мало отличается отъ

$$\Phi(v) = \cos \pi v \left[F(v) - B - \frac{a}{v^2 - \frac{1}{4}} \right],$$

при конечныхъ значеніяхъ v ; а при бесконечномъ возрастаніи v максимумъ этой разности бесконечно приближается къ

$$\delta = F(\infty) - B = \frac{1}{2} - B.$$

Такъ какъ

$B > 4a$, то, при $v = 0$,

$$-\Phi(0) = B - 4a > 0.$$

Во остальных же n точках, где $T(x) = \pm 1$, рассматриваемая разность имеет знак $T(x)$, и в точках $x = \sin \frac{\pi}{4v}$, где $T(x) = 0$, она положительна. Отсюда следует, что все максимумы нашей разности положительны, а все минимумы отрицательны. Поэтому при изменении v от 0 до $\frac{1}{2}$, наибольшее значение $-\Phi(v)$ будет $B - 4a$. Наибольшее значение $+\Phi(v)$ в том же промежутке будет не больше, чем наибольшее значение

$$\frac{a \cos \pi v}{v^2 - \frac{1}{4}},$$

так как $B - F(v) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(v) > 0$. Таким образом наибольшее значение $+\Phi(v)$ в этом промежутке не больше, чем $4a$. Вследствие выбранных нами значений для B и a , находим

$$B - 4a = 4a = \frac{1}{2} F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 0,34657 \dots$$

Если, при $v > \frac{1}{2}$, знак $\Phi(v)$ отличен от знака $\cos \pi v$, то

$$|\Phi(v)| < a \left| \frac{\cos \pi v}{v^2 - \frac{1}{4}} \right|,$$

так как ¹⁾ $F(v) > B$. Но, при $v > \frac{1}{2}$,

$$a \left| \frac{\cos \pi v}{v^2 - \frac{1}{4}} \right| < a\pi.$$

¹⁾ Легко видеть, что функция $F(v)$ возрастает, пока $v < \frac{\sqrt{3}}{2}$; но это не очевидно, для больших значений v . Однако не трудно заметить, что, при $v > \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$F(v) > \frac{2v}{2v+1} > \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2} > 0,4 > F\left(\frac{1}{2}\right).$$

(См. приложенную в конце таблицы значений функцию $F(v)$).

Наконецъ, если $\Phi(v)$ имѣетъ знакъ $\cos \pi v$, то наибольшее значе-
ніе $|\Phi(v)|$ не превышаетъ

$$\frac{1}{2} - B = \frac{1}{2} - F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 0,307.$$

Такимъ образомъ, вообще

$$|\Phi(v)| < \frac{1}{2} \cdot 0,347,$$

слѣдовательно,

$$|x| - Q_2(x) < \frac{0,347}{2n}.$$

Полученный результатъ можно еще улучшить, сохранивъ значеніе B ,
но измѣнивъ a , полагая лишь пока $a < \frac{B}{7}$. Пересматривая предыдущее
вычисленіе, мы видимъ, что мы несомнѣнно преувеличили значеніе $+\Phi(v)$
въ промежуткѣ 01 ; опредѣлимъ его точнѣе. $\Phi(v)$ для малыхъ значеній v
по прежнему отрицательно; оно можетъ стать болѣе $|\Phi(0)| = B - 4a$
только, если

$$\frac{a}{\frac{1}{4} - v^2} + F(v) - B \geq B - 4a;$$

такимъ образомъ можемъ ограничиться разсмотрѣніемъ значеній v , до-
статочно большихъ, чтобы

$$\frac{a}{\frac{1}{4} - v^2} > 2B - 4a,$$

или

$$v > \sqrt{1 - \frac{2a}{B - 2a}},$$

и такъ какъ $B > 7a$, то $v > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{5}}$; въ такомъ случаѣ, $\cos \pi v < 0,4$.
Слѣдовательно, подлежащая разсмотрѣнію значенія v можно еще увели-
чить, ограничившись лишь удовлетворяющими неравенству

$$0,4 \left[\frac{a}{\frac{1}{4} - v^2} + F(v) - B \right] \geq B - 4a,$$

или

$$0,4 \left[\frac{a}{\frac{1}{4} - v^2} - B \right] > B - 4a.$$

Откуда

$$v > \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{8a}{7B - 20a}}.$$

Такъ какъ по прежнему $B > 7a$, слѣдовательно,

$$v > \frac{1}{2} \sqrt{\frac{21}{29}} > 0,425.$$

Итакъ вмѣсто промежутка $(0, \frac{1}{2})$, достаточно взять промежутокъ $(\frac{425}{1000}, \frac{1}{2})$; въ этомъ промежуткѣ

$$\Phi(v) < a \frac{\cos \pi v}{\frac{1}{4} - v^2} < a \frac{\cos \frac{42\pi}{100}}{\frac{1}{4} - 0,1764} < 3,4a.$$

Теперь положимъ

$$B - 4a = 3,4a,$$

откуда

$$a = \frac{B}{7,4} = \frac{F\left(\frac{1}{2}\right)}{7,4} = 0,04687.$$

Поэтому

$$B - 4a = 3,4a < 0,16.$$

Слѣдовательно, наконецъ

$$E_{2n} < \frac{0,32}{2n}. \quad (54)$$

53. Третій способъ вычисленія нижней границы E_{2n} . Возьмемъ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$ точки $\pm \sin \frac{i\pi}{2n}$, при $i=0, 1, \dots, n$, и $\pm \beta$, при чемъ пока оставляемъ β произвольнымъ, требуя лишь, чтобы $\beta < \sin \frac{\pi}{2n}$. Мы знаемъ, на основаніи теоремы (34), что, если уклоненіе нѣкотораго многочлена $f(x)$ степени не выше $2n+1$ отъ $|x|$ въ указанныхъ $2n+3$ точкахъ, послѣдовательно мѣняя знакъ, равно $\pm \varrho$, то $|\varrho|$ будетъ нижней границей $E_{2n+1} = E_{2n}$. Вычисленіемъ числа ϱ мы сейчасъ и займемся.

Пологая

$$S_1(x) = (x^2 - \beta^2) \cdot \sqrt{1 - x^2} \cdot \sin 2n \arcsin x = (x^2 - \beta^2) \cdot S(x),$$

находимъ, применяя формулу интерполированія Лагранжа,

$$f(x) = S_1(x) \cdot \left[\sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sin \frac{i\pi}{2n} - (-1)^i \varrho}{\left(x - \sin \frac{i\pi}{2n}\right) S_1' \left(\sin \frac{i\pi}{2n}\right)} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sin \frac{i\pi}{2n} - (-1)^i \varrho}{\left(x + \sin \frac{i\pi}{2n}\right) S_1' \left(\sin \frac{i\pi}{2n}\right)} + \frac{\varrho}{x S_1'(0)} + \frac{2(\beta - \varrho)x}{(x^2 - \beta^2) S_1'(\beta)} \right]. \quad (55)$$

Но, если степень многочлена $f(x)$ не выше $(2n + 1)$, то ϱ определяется уравненіемъ

$$2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\sin \frac{i\pi}{2n} - (-1)^i \varrho}{S_1' \left(\sin \frac{i\pi}{2n}\right)} + \frac{\varrho}{S_1'(0)} + \frac{2(\beta - \varrho)}{S_1'(\beta)} = 0. \quad (56)$$

Замѣчая затѣмъ, что

$$\begin{aligned} S_1'(x) &= 2xS(x) + (x^2 - \beta^2)S'(x) = \\ &= 2xS(x) + \left[2n \cos 2n \arcsin x - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \sin 2n \arcsin x \right] \cdot (x^2 - \beta^2), \end{aligned}$$

имѣемъ

$$S_1' \left(\sin \frac{i\pi}{2n}\right) = 2n(-1)^i \left(\sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \beta^2\right), \quad \text{при } i=0, 1, \dots, n-1,$$

$$S_1' \left(\sin \frac{\pi}{2}\right) = 4n(-1)^n (1 - \beta^2),$$

$$S_1'(\beta) = 2\beta S(\beta).$$

Поэтому уравненіе (56) преобразуется въ

$$\begin{aligned} \varrho \left[\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \beta^2} + \frac{1}{2(1 - \beta^2)} + \frac{1}{2\beta^2} + \frac{n}{\beta S(\beta)} \right] = \\ = \left[\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{(-1)^i \sin \frac{i\pi}{2n}}{\sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \beta^2} + \frac{(-1)^n}{2(1 - \beta^2)} + \frac{n}{S(\beta)} \right]. \quad (56 \text{ bis}) \end{aligned}$$

Допустимъ теперь, что n возрастаетъ безконечно, при чемъ $\beta = \frac{\lambda\pi}{2n}$, гдѣ $\lambda < 1$. Въ такомъ случаѣ, вторую часть равенства можемъ написать, вынеси n за скобки,

$$n \left[\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{(-1)^i n \sin \frac{i\pi}{2n}}{n^2 \sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \frac{\lambda^2 \pi^2}{4}} + \frac{1}{\sin \lambda\pi} + \varepsilon \right],$$

гдѣ ε стремится къ нулю вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$. Но

$$\Omega = \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{(-1)^i n \sin \frac{i\pi}{2n}}{n^2 \sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \frac{\lambda^2 \pi^2}{4}}$$

представляетъ собой знакочередующійся рядъ, въ которомъ, какъ не трудно убѣдиться, члены идутъ послѣдовательно убывая, поэтому

$$\left| \Omega - \sum_{i=1}^{i=i_0-1} \frac{(-1)^i n \sin \frac{i\pi}{2n}}{n^2 \sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \frac{\lambda^2 \pi^2}{4}} \right| < \frac{n \sin \frac{i_0 \pi}{2n}}{n^2 \sin^2 \frac{i_0 \pi}{2n} - \frac{\lambda^2 \pi^2}{4}} < \frac{\frac{i_0 \pi}{2}}{i_0^2 - \frac{\lambda^2 \pi^2}{4}};$$

слѣдовательно, можно указать, независимое отъ n , число i_0 , чтобъ рассматриваемая разность была менѣе всякой данной величины α . После того какъ i_0 выбрано, можно будетъ n взять достаточно большимъ, чтобъ сумма

$$\sum_{i=1}^{i=i_0-1} \frac{(-1)^i n \sin \frac{i\pi}{2n}}{n^2 \sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \frac{\lambda^2 \pi^2}{4}}$$

столь угодно мало отличалась отъ

$$\sum_{i=1}^{i=i_0-1} \frac{(-1)^i \frac{i\pi}{2}}{\frac{i^2 \pi^2}{4} - \frac{\lambda^2 \pi^2}{4}} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{i=i_0-1} \frac{(-1)^i i}{i^2 - \lambda^2},$$

откуда, наконецъ,

$$\text{пред. } \Omega = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^i i}{i^2 - \lambda^2}.$$

Поэтому вторая часть равенства (56^{bis}) получает форму

$$n \left[\frac{1}{\sin \lambda \pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^i i}{i^2 - \lambda^2} + \alpha \right], \quad (57)$$

гдѣ пред. $\alpha = 0$.

Аналогичнымъ образомъ коэффициентъ при q можно написать сначала

$$n^2 \left[\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{1}{n^2 \sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \frac{\lambda^2 \pi^2}{4}} + \frac{2}{\pi^2 \lambda^2} + \frac{2}{\pi \lambda \sin \lambda \pi} + \gamma \right],$$

гдѣ пред. $\gamma = 0$.

Затѣмъ мы можемъ опять указать независимое отъ n , достаточно большое число i_0 , чтобы сумма

$$\sum_{i=i_0}^{i=n-1} \frac{1}{n^2 \sin^2 \frac{i\pi}{2n} - \frac{\lambda^2 \pi^2}{4}} < \sum_{i=i_0}^{i=\infty} \frac{1}{i^2 - \lambda^2}$$

была сколь угодно мала. Поэтому коэффициентъ при q будетъ равенъ

$$\frac{4n^2}{\pi^2} \left[\sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{1}{i^2 - \lambda^2} + \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\pi}{2\lambda \sin \lambda \pi} + \gamma' \right],$$

гдѣ пред. $\gamma' = 0$.

Такимъ образомъ, обозначая черезъ q' главную часть q , т. е. полагая, что $n(q' - q)$ имѣетъ предѣломъ нуль, при $n = \infty$, получимъ

$$2nq' = \lambda \pi \cdot \frac{\frac{\pi}{\sin \lambda \pi} + 2 \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^i i}{i^2 - \lambda^2}}{\frac{\pi}{\sin \lambda \pi} + \frac{1}{\lambda} + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2\lambda}{i^2 - \lambda^2}}. \quad (58)$$

Формулу (58) удобно еще преобразовать слѣдующимъ образомъ.

Замѣтимъ, что

$$\pi \cotg \pi \lambda = \frac{1}{\lambda} + \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{2\lambda}{\lambda^2 - i^2}.$$

Поэтому въ знаменателѣ получимъ

$$\frac{\pi}{\sin \lambda \pi} + \frac{2}{\lambda} - \pi \cotg \pi \lambda = \frac{2}{\lambda} + \pi \frac{1 - \cos \lambda \pi}{\sin \lambda \pi} = \frac{2}{\lambda} + \pi \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \lambda$$

Съ другой стороны,

$$f(\lambda) = 2 \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{(-1)^i i}{i^2 - \lambda^2} = \sum_{i=1}^{i=\infty} (-1)^i i \left(\frac{1}{i+\lambda} + \frac{1}{i-\lambda} \right) = - \int_0^1 \frac{z^\lambda + z^{-\lambda}}{z+1} dz.$$

Но

$$\int_0^1 \frac{z^{\lambda-1} + z^{-\lambda}}{1+z} dz = \frac{\pi}{\sin \pi \lambda},$$

и

$$\int_0^1 \frac{z^\lambda + z^{\lambda-1}}{1+z} dz = \frac{1}{\lambda};$$

поэтому

$$\frac{\pi}{\sin \pi \lambda} + f(\lambda) = \frac{1}{\lambda} - 2 \int_0^1 \frac{z^\lambda}{1+z} dz = \frac{1}{\lambda} - \frac{2}{\lambda + \frac{1}{2}} F\left(\lambda + \frac{1}{2}\right).$$

Такимъ образомъ

$$2nq' = \frac{\lambda\pi}{2} \cdot \frac{1 - \frac{4\lambda}{2\lambda+1} F\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{1 + \frac{\lambda\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} \lambda}. \quad (58^{bis})$$

Для вычисления q' достаточно слѣдовательно знать ту же функцію F , которой мы уже пользовались въ предыдущихъ §§'ахъ.

Очевидно, нужно выбрать λ такъ, чтобъ q' было возможно большимъ. Не останавливаясь на точномъ рѣшеніи этого вопроса, ограничимся значеніемъ ¹⁾ $\lambda = \frac{2}{5}$.

Тогда

$$2nq' = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{1 - \frac{8}{9} F\left(\frac{9}{10}\right)}{1 + \frac{\pi}{5} \operatorname{tg} 36^\circ}.$$

Полагая, съ точностью до 0,00055,

$$F\left(\frac{9}{10}\right) = 0,419,$$

выходимъ

$$2nq' = \frac{\pi}{5} \cdot \frac{0,628}{1 + \frac{\pi}{5} \cdot 0,727} = \frac{1,256}{\frac{10}{\pi} + 1,454} = \frac{1,256}{4,537} = 0,2709.$$

¹⁾ Повидимому, максимумъ q' весьма мало отличается отъ полученнаго ниже значенія.

Такимъ образомъ

$$2n\sigma' > 0,27.$$

А потому

$$E_{2n} > \frac{0,27}{2n}.$$

Итакъ, наиболѣе тѣсныя границы, которыя мы нашли для E_{2n} , слѣдующія

$$\frac{0,32}{2n} > E_{2n} > \frac{0,27}{2n}. \quad (59)$$

Послѣ того, какъ для E_{2n} найдены ужъ довольно тѣсныя границы ¹⁾, вопросъ объ опредѣленіи E_{2n} , съ какою угодно точностью, теоретически не представляетъ очень большихъ трудностей.

Однако для систематическаго рѣшенія этого вопроса при помощи соответствующаго метода послѣдовательныхъ приближеній необходимо еще установить нѣкоторыя общія свойства многочленовъ, наименѣе уклоняющихся отъ $|x|$, къ выводу которыхъ мы сейчасъ перейдемъ.

54. Теорема. Если $P(x)$, при n достаточно большомъ, есть многочленъ степени $2n$, наименѣе уклоняющийся отъ $|x|$ въ промежуткѣ $(-1, +1)$, то уравненіе

$$\eta(x) = P(x) - R(x) = 0$$

имѣетъ одинъ и только одинъ корень въ каждомъ изъ $2n$ промежутковъ, заключенныхъ между $\sin \frac{k\pi}{2n}$ и $\sin \frac{(k+1)\pi}{2n}$ ($k = -n, -(n-1), \dots, 0, 1, \dots, n$).

Въ самомъ дѣлѣ, при достаточно большихъ значеніяхъ n ,

$$||x| - P(x)| < \frac{0,32}{2n},$$

но въ точкахъ $\sin \frac{k\pi}{2n}$, при всякомъ $k > 0$,

$$||x| - R(x)| > \frac{0,32}{2n},$$

и кромѣ того, для всѣхъ $k \geq 0$,

$$(|x| - R(x)) \cdot (-1)^k > 0.$$

¹⁾ Для практики было бы также интересно установить, начиная отъ какого значенія n неравенства (59) соблюдены. Если они окажутся, напримѣръ, правильными для $2n \geq 18$, то указанные неравенства позволяютъ утверждать, что иная степень многочлена, уклоняющагося отъ $|x|$ менѣе, чѣмъ на 0,015 на отрезкѣ $(-1, +1)$, равна 20 или 22.

Слѣдовательно, во всѣхъ этихъ точкахъ

$$P(x) - R(x) = \eta(x)$$

имѣеть тотъ же знакъ, что $|x| - R(x)$, а потому

$$\eta(x) \cdot (-1)^k > 0,$$

откуда заключаемъ, что между $\sin \frac{k\pi}{2n}$ и $\sin \frac{(k+1)\pi}{2n}$ есть по крайней мѣрѣ одинъ корень уравненія $\eta(x) = 0$.

Но, при $x = 0$, $P(x) > 0$ и $R(x) = 0$; поэтому между $\pm \sin \frac{\pi}{2n}$ и 0 также есть по одному корню уравненія $\eta(x) = 0$.

Такимъ образомъ уравненіе степени $2n$, $\eta(x) = 0$, имѣеть по крайней мѣрѣ по одному корню въ $2n$ промежуткахъ, а потому въ каждомъ изъ этихъ промежутковъ оно не имѣеть болѣе одного корня. Ч. и. т. д.

55. Опредѣленіе. Функции $Q_n(x)$ называются асимптотическими выраженіями многочленовъ P_n степени n наименѣе уклоняющагося отъ данной функции $f(x)$, если уклоненія E'_n функции $Q_n(x)$ отъ функции $f(x)$ удовлетворяють условію, что

$$\frac{E'_n - E_n}{E_n}$$

стремится къ нулю, при $n = \infty$.

56. Теорема. Многочленъ $P(x)$, наименѣе уклоняющійся отъ $|x|$ въ промежуткѣ $(-1, +1)$, имѣеть асимптотическимъ выраженіемъ

$$Q(x) = R(x) + \left(\frac{1}{2n} - E_{2n}\right) T(x) + \frac{\beta_n(x)}{n}, \quad (70)$$

гдѣ $\beta_n(x)$ стремится къ нулю, если nx^2 возрастаетъ безконечно.

Для доказательства припомнимъ прежде всего формулу (43), которую можемъ написать

$$2n \left[|x| - R(x) - \frac{T(x)}{2n} \right] = \varepsilon_n(x) \cdot T(x).$$

Въ такомъ случаѣ, ясно, что

$$P(x) = R(x) + \frac{1}{2n} (T(x) + \Omega(x)),$$

гдѣ $\Omega(x)$ есть многочленъ степени $2n$ наименѣе уклоняющійся отъ $\varepsilon_n(x) \cdot T(x)$; при этомъ уклоненіе $\Omega(x)$ отъ $\varepsilon_n(x) \cdot T(x)$ равно $2n \cdot E_{2n}$.

Поэтому наша теорема будет доказана, если мы покажем, что многочлен $\Omega(x)$ имеет асимптотическое выражение

$$\Omega_1(x) = -2nE_{2n}T(x) + 2\beta_n(x). \quad (60)$$

Для этого замѣчаемъ, что $\varepsilon_n(x)$ становится сколь угодно малымъ, если $n|x| > A$, гдѣ A достаточно большое число. Поэтому, выбирая A соответствующимъ образомъ, можемъ опредѣлить непрерывную функцию $\delta_n(x)$ условиями

$$\delta_n(x) = \varepsilon_n(x) \cdot T(x), \text{ при } |x| < \frac{A}{n},$$

$$\delta_n(x) = 0, \quad \text{при } |x| \geq \frac{A}{n},$$

такъ, чтобъ

$$|\delta_n(x) - \varepsilon_n(x) \cdot T(x)| < \alpha_n,$$

гдѣ α_n стремится къ нулю вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$.

Очевидно, что многочленъ $\Omega_1(x)$ степени $2n$, наименѣе уклоняющійся отъ $\delta_n(x)$, будетъ асимптотическимъ выраженіемъ для $\Omega(x)$, согласно опредѣленію § 55, такъ какъ, обозначая черезъ λ_n уклоненіе $\Omega_1(x)$ отъ $\delta_n(x)$, имѣемъ

$$|\lambda_n - 2nE_{2n}| < \alpha_n,$$

и слѣдовательно,

$$\frac{\lambda_n - 2nE_{2n}}{2nE_{2n}}$$

стремится къ нулю.

Такимъ образомъ остается показать, что многочленъ $\Omega_1(x)$, наименѣе уклоняющійся отъ $\delta_n(x)$, имѣетъ форму (60), гдѣ $\beta_n(x)$ стремится къ нулю, если $n|x|^2$ возрастаетъ безконечно. Исслѣдованіемъ многочлена

$$\Omega_1(x) = c_0 + c_1x^2 + \dots + c_nx^{2n}$$

мы теперь и займемся.

Между двумя точками отклоненія многочлена $\Omega_1(x)$ отъ $\delta_n(x)$ долженъ быть по крайней мѣрѣ одинъ корень, какъ уравненія $\Omega_1(x) - \delta_n(x) = 0$, такъ и уравненія $\Omega_1(x) - \varepsilon_n(x)T(x) = 0$. Но это послѣднее уравненіе имѣетъ форму

$$\Omega_1(x) - \varepsilon_n(x)T(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^4 + \dots + A_{n+1}x^{2n} = 0, \quad (61)$$

и потому имѣетъ не болѣе, чѣмъ $(n+1)$ положительныхъ корней. Поэтому, такъ какъ число точекъ отклоненія на отрѣзкѣ 01 не менѣе $n+2$,

то оно равно $n+2$, при чемъ концы 0 и 1 также должны быть точками отклонения. Такимъ образомъ,

$$\Omega_1(0) = -1 + \lambda_n.$$

Докажемъ, что $\Omega_1(x)$ имеетъ лишь положительные максимумы M и отрицательные минимумы m ; при этомъ

$$0,5 > M > 0,09 \text{ и } -0,73 < m < -0,09. \quad (65)$$

Прежде всего, замѣчая, что, при $x > \frac{\pi}{4n}$,

$$|\epsilon_n(x) \cdot T(x)| = |2F(v) - 1| \cdot |\cos \pi v| < 0,18,$$

выходимъ, что, при этихъ значеніяхъ x ,

$$-0,18 - \lambda_n < \Omega_1(x) < 0,18 + \lambda_n, \quad (62)$$

и между двумя корнями уравненія (61) есть, либо одинъ максимумъ M , либо одинъ минимумъ m , удовлетворяющій неравенствамъ ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} 0,5 > \lambda_n + 0,18 > M > \lambda_n - 0,18 > 0,09, \\ 0,09 > -\lambda_n + 0,18 > m > -\lambda_n - 0,18 > -0,5. \end{aligned} \right\} \quad (62^{\text{bis}})$$

Рассмотримъ два предположенія. Допустимъ сначала (что, какъ мы покажемъ дальше, имѣетъ мѣсто въ дѣйствительности), что

$$\Omega_1(x)$$

въ точкѣ 0 имѣетъ минимумъ. Слѣдовательно, на всемъ отрѣзкѣ $(-1, +1)$

$$\Omega_1(x) > -1 + \lambda_n;$$

но, такъ какъ, при $x < \frac{\pi}{4n}$,

$$\epsilon_n(x)T(x) < 0,$$

то, вслѣдствіе неравенства (62), имѣемъ также на всемъ отрѣзкѣ

$$\Omega_1(x) < \lambda_n + 0,18.$$

Такимъ образомъ на всемъ отрѣзкѣ,

$$|\Omega_1(x) + 0,41 - \lambda_n| < 0,59;$$

¹⁾ Такъ какъ $0,27 < \lambda_n < 0,32$.

и следовательно, на основании теоремы (2), вблизи $x=0$, имеем

$$\left| \frac{d\Omega_1}{dx} \right| < 1,2n. \quad (63)$$

Если бы в промежутке $0 < x < \frac{\pi}{4n}$ было бы не более одной точки отклонения, то все максимумы и минимумы должны были бы удовлетворять неравенствам (62^{bis}). Но положим, что точек отклонения в промежутке $0 < x < \frac{\pi}{4n}$ не менее двух. В ближайшей к 0 точке отклонения $x_0 = \frac{\pi v_0}{2n}$ должно быть

$$[2F(v_0) - 1] \cos \pi v_0 = \varepsilon_n(x_0) \cdot T(x_0) > -1 + 2\lambda_n > -0,46. \quad (64)$$

Но функция $[2F(v) - 1] \cos \pi v$ идет возрастая, и, при $v = 0,2$, с точностью до 0,001,

$$[2F(v) - 1] \cos \pi v = -0,466 < -0,46;$$

следовательно, $v_0 > 0,2$, или $x_0 > \frac{0,2\pi}{2n}$.

Я говорю, что в следующей точке отклонения x_1 , где $\Omega_1 - \varepsilon_n(x) \cdot T(x) > 0$, не только Ω_1 не может быть отрицательным, но, несомненно,

$$\Omega_1 > 0,09.$$

Действительно, допустим обратное; тогда в точке x_1

$$\varepsilon_n(x_1) \cdot T(x_1) < \Omega_1 - 0,27 < -0,18,$$

а потому

$$\frac{2nx_1}{\pi} = v_1 < 0,4, \text{ или } x_1 < \frac{0,4\pi}{2n},$$

так как, с точностью до 0,001,

$$[2F(0,4) - 1] \cos 0,4\pi = -0,115 > -0,18.$$

Но в таком случае, мы имеем бы

$$x_1 - x_0 < \frac{0,2\pi}{2n},$$

в то время как

$$\Omega_1(x_1) - \Omega_1(x_0) > 2\lambda_n > 0,54,$$

и, следовательно, между x_1 и x_0 существовало бы значение x , где

$$\frac{d\Omega_1}{dx} > \frac{5,4}{\pi}n,$$

что противорѣчитъ неравенству (63).

Такимъ образомъ, начиная отъ x_1 , каждой точкѣ отклоненія, гдѣ $\Omega_1 - \varepsilon_n(x)T(x) > 0$, соответствуетъ по крайней мѣрѣ одинъ положительный максимумъ Ω_1 , гдѣ $\Omega_1 > 0,09$, и каждой точкѣ отклоненія, въ которой $\Omega_1 - \varepsilon_n(x)T(x) < 0$, соответствуетъ отрицательный минимумъ Ω_1 , гдѣ $\Omega_1 < -0,09$. Съ точкой 0 число этихъ максимумовъ и минимумовъ составитъ $n + 1$, откуда слѣдуетъ, что другихъ максимумовъ и минимумовъ у многочлена Ω_1 быть не можетъ.

Допустимъ далѣе, что Ω_1 имѣетъ бы отрицательный максимумъ при $x = 0$; въ такомъ случаѣ уравненіе

$$\Omega_1 = 0$$

имѣло бы не болѣе $(n - 1)$ положительныхъ корней; въ промежуткѣ между 0 и наименьшимъ корнемъ a_1 уравненія $\Omega_1 = 0$ должно было бы быть по крайней мѣрѣ двѣ точки отклоненія (кромѣ 0), такъ какъ между двумя точками отклоненія, лежащими вправо отъ a_1 , $\Omega_1 = 0$ имѣетъ не менѣе одного корня.

Слѣдовательно, $\Omega_1 < 0$ во второй точкѣ отклоненія x_1 , а потому

$$\varepsilon_n(x_1) \cdot T(x_1) < -0,27,$$

откуда заключаемъ, что $x_1 < \frac{\pi}{6n}$.

Пусть, съ другой стороны,

$$m = -1 + 2\lambda_n - h$$

будетъ значеніе минимума Ω_1 вблизи 0; въ такомъ случаѣ полное измѣненіе (variation totale) многочлена Ω_1 , когда x , измѣняясь отъ 0 до x_1 , проходитъ сначала черезъ точку, гдѣ Ω_1 минимумъ, а затѣмъ черезъ первую точку отклоненія x_0 , будетъ болѣе, чѣмъ

$$2h + 2\lambda_n > 2h + 0,54.$$

Но, подобно предыдущему, мы замѣчаемъ, что

$$\left| \frac{d\Omega_1}{dx} \right| < (1,2 + h)n, \quad (63^{bis})$$

такъ какъ

$$-1 + \lambda_n - h \leq \Omega_1 < \lambda_n + 0,18.$$

Поэтому, x_1 долженъ былъ бы удовлетворять неравенству

$$x_1(1,2 + h)n > 2h + 0,54;$$

и тѣмъ болѣе,

$$\frac{\pi}{6}(1,2 + h) > 2h + 0,54,$$

откуда

$$h < 0,06.$$

Но въ такомъ случаѣ, $\varepsilon_n(x_0) \cdot T(x_0) > -1 + 2\lambda_n - h > -0,52$, т. е. $x_0 > \frac{0,15\pi}{2n}$, откуда $x_1 - x_0 < \frac{0,2\pi}{2n}$, что противорѣчитъ, какъ выше, неравенству (63^{bis}) слѣдовательно, Ω_1 не можетъ имѣть минимума вблизи 0, и предположеніе, что $\Omega_1(0)$ есть максимумъ, должно быть отброшено. Итакъ неравенство (65) доказано.

Такимъ образомъ въ промежуткѣ $(-1, +1)$ многочленъ $\Omega_1(x)$ имѣетъ $(2n+1)$ максимумовъ и минимумовъ; при этомъ, если $n|x| > A$, то эти максимумы и минимумы равны λ_n по абсолютному значенію; остальные же заключены между $3\lambda_n$ и $\frac{1}{4}\lambda_n$, какъ это видно изъ неравенствъ (65).

Вслѣдствіе этого, всѣ корни уравненія

$$\Omega_1^2(x) - \lambda_n^2 = 0 \tag{66}$$

и уравненія

$$\left(\frac{d\Omega_1(x)}{dx}\right)^2 (x^2 - 1) = 0 \tag{67}$$

болѣе, по абсолютному значенію, чѣмъ $\frac{A}{n}$, будутъ общіе. Кромѣ того, всѣ остальные корни уравненія (67) также вещественны, и, для определенности, рассматривая лишь положительные корни, заключены между положительными корнями $\beta_1 < \dots < \beta_k$ уравненія $\Omega_1(x) = 0$, гдѣ β_k наибольшій изъ корней $\Omega_1(x) = 0$, который не болѣе $\frac{A}{n}$. Уравненіе (66) также имѣетъ по два вещественныхъ корня между β_i и β_{i+1} , если максимумъ (или минимумъ) Ω_1 , заключенный между β_i и β_{i+1} , по абсолютному значенію не менѣе λ_n .

Случай, когда соответствующій максимумъ (или минимумъ) менѣе λ_n , приводитъ къ комплекснымъ корнямъ уравненія (66), относительно которыхъ докажемъ слѣдующее:

Внутри трапеции $\beta_i\beta_{i+1}CD$, высота которой равна $\frac{1}{n}$, и которая имеет боковыми сторонами прямыми β_iD и $\beta_{i+1}C$, образующий с основанием $\beta_i\beta_{i+1}$ внутренние углы $D\beta_i\beta_{i+1}$ и $\beta_i\beta_{i+1}C$ равные $\frac{3\pi}{2}$, есть по крайней мере один корень уравнения (66).

В самом деле, на всякой линии, соединяющей сторону β_iD с $\beta_{i+1}C$ должно быть не менее одной точки, где мнимая часть $\Omega_1(x)$ обращается в нуль, так как приращение аргумента Ω_1 при переходе от какой-нибудь точки на стороне $\beta_{i+1}C$ к точке, расположенной на β_iD , больше π . Таким образом, кривая S , на которой мнимая часть Ω_1 равна нулю, исходя из точки γ_i , расположенной между β_i и β_{i+1} , где $\frac{d\Omega_1}{dx} = 0$, будет пересекать всякую прямую параллельную CD ; и, так как внутри рассматриваемой трапеции кривая S не может иметь двойной точки (потому что все корни $\frac{d\Omega_1}{dx} = 0$ вещественные), то вещественная часть Ω_1 будет идти, возрастая по абсолютному значению, если следовать по кривой S от точки γ_i до первой точки H пересечения S со стороной CD . Поэтому для того, чтобы убедиться, что внутри трапеции $\beta_i\beta_{i+1}CD$ есть корень уравнения (66), достаточно будет доказать, что в точке H

$$\mu^2 = \Omega_1^2(H) > \lambda_n^2.$$

Для этого, берем многочлен $T(x) = \cos 2n \arccos x$; его аргумент в точке H обозначим буквой φ , и допустим, например, для определенности, что $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Затем из точки H проведем прямую, параллельную β_iD , до пересечения с вещественной осью в точке E ; пусть x_0 будет наибольший корень уравнения $T(x) = 0$, меньший, чем E ; соединим x_0 с H , и перпендикулярно к x_0H проведем из H прямую до пересечения с вещественной осью в точке E' ; в таком случае между E' и x_0 можно выбрать точку y_0 так, чтобы дробь

$$\frac{H - y_0}{H - x_0}$$

имела аргументом — φ ; при этом, модуль этой дроби будет не менее, чем $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Поэтому произведение

$$\frac{H - y_0}{H - x_0} \cdot \cos 2n \arcsin H$$

будет вещественным¹⁾. Но, полагая $0 < \theta < 1$, можем написать

$$H = \frac{\theta A}{n} + \frac{4i}{n} = \sin(a + bi) = a + bi - \frac{(a + bi)^3}{3!} + \dots;$$

и следовательно, отбрасывая безконечно малыя высшихъ порядковъ, получимъ

$$b = \frac{4}{n};$$

откуда, какъ въ § 7, находимъ

$$|\cos 2n \arcsin H| \geq \frac{1}{2} (e^s - e^{-s}) > \frac{1}{2} (e^s - 1).$$

Поэтому уравнение съ вещественными коэффициентами,

$$\Omega_1(x) = \mu'' \cdot \frac{x - y_0}{x - x_0} \cos 2n \arcsin x, \quad (68)$$

въ которомъ

$$\mu'' = \frac{H - x_0}{H - y_0} \cdot \frac{\mu}{\cos 2n \arcsin H} < \frac{2\sqrt{2}}{e^s - 1} \mu,$$

имѣетъ корень равный H .

Но не трудно замѣтить, съ другой стороны, что, если

$$\mu'' < \frac{\lambda_n}{84},$$

то уравнение (68) не можетъ имѣть комплексныхъ корней.

Дѣйствительно,

$$\frac{x - y_0}{x - x_0} \cos 2n \arcsin x = \cos 2n \arcsin x + \frac{x_0 - y_0}{x - x_0} \cos 2n \arcsin x;$$

поэтому, при $-\frac{2A}{n} \leq x \leq \frac{2A}{n}$,

$$\left| \frac{x - y_0}{x - x_0} \cos 2n \arcsin x \right| < 1 + 2n(x_0 - y_0) < 1 + 2n \left(\frac{8}{n} + \frac{\pi}{2n} \right) < 21,$$

такъ какъ разность между двумя сосѣдними корнями уравненія $T(x) = 0$ менѣе $\frac{\pi}{2n}$;

¹⁾ Напоминаю, что $\cos 2n \arccos x = \cos 2n \arcsin x$, если n четное число.

на остальной же части отрезка $(-1, +1)$, это неравенство темъ болѣе соблюдено, такъ какъ $\left| \frac{x - y_0}{x - x_0} \right| < 2$.

Такимъ образомъ, если $\mu'' < \frac{\lambda_n}{4.21}$, многочленъ

$$\Omega_1(x) - \mu'' \frac{x - y_0}{x - x_0} \cos 2n \operatorname{arcsin} x$$

имѣетъ знакъ $\Omega_1(x)$ въ точкахъ, гдѣ $\Omega_1(x)$ достигаетъ максимума или минимума, и слѣдовательно, все корни уравненія (68) вещественные.

Отсюда заключаемъ, что

$$\mu \frac{2\sqrt{2}}{e^8 - 1} > \frac{\lambda_n}{84},$$

т. е.

$$\mu > \lambda_n.$$

Такимъ образомъ уравненіе (66) имѣетъ, дѣйствительно, одинъ корень внутри трапеціи $\beta_i \beta_{i+1} CD$.

Слѣдовательно, если симметрично къ $\beta_i \beta_{i+1} CD$ построить трапецію $\beta_i \beta_{i+1} C' D'$, то внутри фигуры $\beta_i D' C' \beta_{i+1} CD$ будетъ всегда не менѣе двухъ комплексныхъ или вещественныхъ корней уравненія (66). Прибавляя еще корень уравненія (66), находящійся между 0 и β_1 , замѣчаемъ, что другихъ корней, кромѣ этихъ (и равныхъ имъ, но съ обратнымъ знакомъ), уравненіе (66) имѣть не можетъ.

Такимъ образомъ,

$$4n^2 \cdot [\Omega_1^2(x) - \lambda_n^2] = \left(\frac{d\Omega_1(x)}{dx} \right)^2 \cdot (x^2 - 1) \cdot Y(x), \quad (69)$$

гдѣ

$$Y(x) = \frac{(x^2 - \eta_0^2) [x^2 - (\beta_1 + \eta_1)^2] [x^2 - (\beta_1 + \eta_2)^2] \dots [x^2 - (\beta_{k-1} + \eta_{2k-2})^2]}{x^2 [x^2 - (\beta_1 + \varepsilon_1)^2]^2 \dots [x^2 - (\beta_{k-1} + \varepsilon_{k-1})^2]^2},$$

при чемъ, $|\varepsilon_i| < \beta_{i+1} - \beta_i$, и $|\eta_{2i-1}| < \frac{1}{n} + \beta_{i+1} - \beta_i$, $|\eta_{2i}| < \frac{1}{n} + \beta_{i+1} - \beta_i$.

Слѣдовательно,

$$Y(x) = \frac{\left[1 - \left(\frac{\eta_0}{x} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{\beta_1 + \eta_1}{x} \right)^2 \right] \dots \left[1 - \left(\frac{\beta_{k-1} + \eta_{2k-2}}{x} \right)^2 \right]}{\left[1 - \left(\frac{\beta_1 + \varepsilon_1}{x} \right)^2 \right]^2 \dots \left[1 - \left(\frac{\beta_{k-1} + \varepsilon_{k-1}}{x} \right)^2 \right]^2} =$$

$$= \left[1 - \left(\frac{\eta_0}{x} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{2(\varepsilon_1 - \eta_1)\beta_1 + \varepsilon_1^2 - \eta_1^2}{x^2} + \Theta_1 \left(\frac{\beta_2}{nx} \right)^4 \right] \dots$$

$$\dots \left[1 + \frac{2(\varepsilon_{k-1} - \eta_{2k-2})\beta_{k-1} + \varepsilon_{k-1}^2 - \eta_{2k-2}^2}{x^2} + \Theta_{2k-2} \left(\frac{\beta_k}{nx} \right)^4 \right],$$

гдѣ $|\Theta_i| < 3$, если $|nx| \geq 2A$.

Поэтому

$$Y(x) = 1 + h(1 + \varphi),$$

гдѣ

$$|h| < \left| \frac{\eta_0}{x} \right|^2 + \left| \frac{2(\varepsilon_1 - \eta_1)\beta_1 + \varepsilon_1^2 - \eta_1^2}{x^2} \right| + \dots + \left| \frac{2(\varepsilon_{k-1} - \eta_{2k-2})\beta_{k-1} + \varepsilon_{k-1}^2 - \eta_{2k-2}^2}{x^2} \right|$$

$$+ 6 \sum_{i=2}^{i=k} \left(\frac{\beta_i}{nx} \right)^4,$$

при чемъ φ стремится къ нулю вмѣстѣ съ h .

Но не трудно указать такое опредѣленное число p , чтобы, при всякомъ i ,

$$\beta_{i+1} - \beta_i > \frac{p}{n};$$

а потому можно также указать вполне опредѣленное число l такъ, чтобы

$$|h| < \frac{t}{x^2} [\beta_1^2 + \beta_2(\beta_2 - \beta_1) + \dots + \beta_k(\beta_k - \beta_{k-1})] + \frac{t}{n^2 x^4} [\beta_2^2(\beta_2 - \beta_1) + \dots + \beta_k^2(\beta_k - \beta_{k-1})]$$

$$< \frac{t}{x^2} \beta_k^2 + \frac{t}{n^2 x^4} \beta_k^3 \leq \frac{t}{x^2} \left[\frac{A^2}{n^2} + \frac{A^5}{n^3 x^2} \right] < 2t \left(\frac{A}{nx} \right)^2,$$

если $|nx| \geq 2A$.

Итакъ, полагая $Y(x) = 1 + 2l \left(\frac{A}{nx} \right)^2$, мы видимъ, что, если $\frac{A}{nx}$ стремится къ нулю, то $|l|$ остается менѣе нѣкотораго опредѣленнаго предѣла.

Но изъ уравненія (69) получаемъ

$$\frac{d\Omega_1}{2n\sqrt{\lambda_n^2 - \Omega_1^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \left[1 + l \left(\frac{A}{nx} \right)^2 \right].$$

Слѣдовательно,

$$\arccos \frac{\Omega_1(x)}{\pm \lambda_n} = 2n \int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \left[1 + l \left(\frac{A}{nx} \right)^2 \right],$$

и, принимая во вниманіе, что n четное число, передъ λ_n надо взять знакъ —; откуда

$$\arccos \frac{\Omega_1(x)}{-\lambda_n} = 2n(1 + \varepsilon) \arccos x,$$

гдѣ

$$|\varepsilon| < 1 \left(\frac{A}{nx} \right)^2.$$

Поэтому

$$\Omega_1(x) = -\lambda_n \cos 2n(1 + \varepsilon) \arccos x. \quad (60^{bis})$$

Но $n\varepsilon$ стремится къ нулю, если $\frac{A^2}{nx^2}$ стремится къ нулю; для этого достаточно (послѣ того какъ число A опредѣлено), чтобъ nx^2 возрастало безконечно. Такимъ образомъ

$$\Omega_1(x) = -\lambda_n \cos 2n \arccos x + 2\beta'_n(x),$$

гдѣ $\beta'_n(x)$ стремится къ нулю, если nx^2 возрастаетъ безконечно; и, принимая, что $\lambda_n = 2nE_{2n}$ стремится къ нулю,

$$\Omega_1(x) = -2nE_{2n}T(x) + 2\beta_n(x); \quad (60)$$

слѣдовательно, многочленъ $P(x)$ имѣетъ асимптотическимъ выраженіемъ

$$Q(x) = R(x) + \left[\frac{1}{2n} - E_{2n} \right] \cdot T(x) + \frac{\beta_n(x)}{n}, \quad (70)$$

гдѣ $\beta_n(x)$ стремится къ нулю, если nx^2 возрастаетъ безконечно. Ч. и. т. д.

Примѣчаніе. Замѣтимъ, что формула (70), которая, для определенности, доказана, при предположеніи, что n четное число, справедлива для всѣхъ значеній n , если положить $T(x) = (-1)^n \cos 2n \arccos x = = \cos 2n \arcsin x$.

57. Теорема. При безконечномъ возрастаніи n , произведеніе $2n \cdot E_{2n}$ стремится къ толику определенному предѣлу λ .

Пусть многочленъ $\Omega(x)$ степени $2n$ имѣетъ асимптотическимъ выраженіемъ

$$\Omega_1^{(n)}(x) = -\lambda_n \cos 2n \arcsin x + 2\beta_n(x);$$

требуется показать, что λ_n не зависитъ отъ n .

Наше утвержденіе будетъ, очевидно, доказано, если мы убѣдимся, что многочленъ степени $2kn$,

$$\Omega_1^{(kn)}(x) = -\lambda_n \cos 2kn \arcsin x + 2\beta_n(kx),$$

гдѣ k произвольное цѣлое число, служить асимптотическимъ выраженіемъ для многочлена $\Omega(x)$ степени $2kn$, такъ какъ изъ этого можно будетъ заключить, что $\lambda_{kn} = \lambda_n$.

Возьмемъ, для опредѣленности, $k = 2$, и обозначимъ черезъ x_1, x_2, \dots, x_h , точки отклонения (кроме 0) $\Omega_1^{(n)}(x)$ отъ $\delta_n(x)$, отстоящія не далѣе отъ 0, чѣмъ $\sqrt{\frac{A}{n}}$, гдѣ A нѣкоторое данное весьма большое число, которое однако обладаетъ свойствомъ, что $n \left(\sqrt{\frac{A}{n}} \right)^3 = \sqrt{\frac{A^3}{n}} = \gamma$ есть число весьма малое. Въ такомъ случаѣ, въ точкахъ $\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{2}x_h$ отклоненіе $\Omega_1^{(2n)}$ отъ $\delta_{2n}(x)$ будетъ сколь угодно мало отличаться отъ $\pm \lambda_n$, такъ какъ, для разсматриваемыхъ значеній $\frac{x_i}{2}$:

$$\begin{aligned} \Omega_1^{(2n)}\left(\frac{x_i}{2}\right) &= -\lambda_n \cos 4n \arcsin \frac{x_i}{2} + 2\beta_n(x_i) = -\lambda_n \cos 2n \left(x_i + \frac{\Theta x_i^3}{3}\right) + \\ &+ 2\beta_n(x_i) = \Omega_1^{(n)}(x_i) + \Theta' \gamma, \end{aligned}$$

гдѣ $|\Theta| < 1$, $|\Theta'| < 1$; и съ другой стороны, вообще,

$$\left| \delta_{2n}\left(\frac{x}{2}\right) - \delta_n(x) \right| < \gamma,$$

при достаточно большихъ значеніяхъ n .

Но, вслѣдствіе предыдущей теоремы, x_h и всѣ слѣдующія за x_h точки отклоненія: x_{h+1}, x_{h+2}, \dots и т. д. $\Omega_1^{(n)}$ отъ δ_n , должны опредѣляться формулами

$$\arcsin x_h = \frac{\pi(k_1 + \alpha_0)}{2n}, \arcsin x_{h+1} = \frac{\pi(k_1 + 1 + \alpha_1)}{2n}, \dots,$$

$$\arcsin x_{h+i} = \frac{\pi(k_1 + i + \alpha_i)}{2n}, \dots, \arcsin x_{n+1} = \frac{\pi n}{2n} = \frac{\pi}{2},$$

гдѣ α_i сколь угодно малыя величины (если A взято достаточно большимъ), такъ какъ $\beta_n(x)$ стремится къ нулю. Такимъ образомъ $k_1 = h - 1$.

Слѣдовательно, полагая

$$\arcsin x_{h+i+1}^1 = \frac{\pi(h+i)}{4n}, \quad (i=0, 1, \dots, 2n-h)$$

мы замѣчаемъ, что въ точкахъ x_{h+i+1}^1 разность $\Omega_1^{(2n)}(x) - \delta_{2n}(x)$, послѣдовательно мѣняя знакъ, безконечно мало отличается отъ $\pm \lambda_n$. Вместе съ 0 и съ предшествующими h точками $\left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_h}{2}\right)$ это составляетъ $2n + 2$ точки на отрѣзкѣ 01, гдѣ означенная разность получаетъ, по-

слѣдовательно мѣняя знакъ, значенія, сколь угодно мало отличающіяся отъ λ_n , а потому наименьшее уклоненіе многочлена степени $4n$ отъ δ_{2n} бесконечно мало отличается отъ λ_n .

Слѣдовательно, $\Omega^{(2n)}$ является асимптотическимъ выраженіемъ для многочлена, наименѣе уклоняющагося отъ δ_{2n} , ч. и. т. д.

Примѣчаніе. Мы можемъ теперь придать другую форму неравенству (59), а именно

$$0,32 > \lambda > 0,27. \quad (59^{\text{bis}})$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы видимъ, что для полученія болѣе тѣсныхъ границъ для λ , можно будетъ послѣдовательно усовершенствовать приемы § 52 и 53.

Вмѣсто одного добавочнаго члена вида $\frac{T(x)}{4n^3} \cdot \frac{\pi^2 a}{x^2 - \sin^2 \frac{\pi}{4n}}$, который мы ввели въ § 52, достаточно будетъ ввести нѣсколько членовъ вида $\frac{T(x)}{4n^3} \cdot \frac{\pi^2 a_i}{x^2 - \sin^2 \frac{\pi i}{4n}}$ ($i = 1, 2, \dots$), чтобъ получить значеніе λ , съ сколь угодно большою точностью.

Точно также, примѣняя методъ § 53, надо будетъ вмѣсто одного произвольнаго значенія β , оставить неопредѣленными нѣсколько, i_0 , точекъ отклоненія, сохранивши точки $\pm \sin \frac{i\pi}{2n}$ для $i \geq i_0$.

Я полагаю, что, примѣняя любой изъ указанныхъ методовъ, достаточно будетъ ввести одинъ добавочный членъ, чтобъ уменьшить до 0,01 разность между границами для λ .



5 (18) іюля 1912 г. скоропостижно скончался въ Парижѣ почетный членъ Харьковскаго Математическаго Общества профессоръ Сорбонны академикъ

Анри Пуанкаре.

Весь ученый міръ оплакиваетъ безвременную утрату одного изъ величайшихъ математическихъ гениевъ всѣхъ временъ и народовъ.

Г Л А В А V.

Различные приложения основных теоремъ. Обобщенія теоремы Вейерштрасса.

58. Теорема. Если производныя $(n+1)$ -го порядка двухъ функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяютъ въ промежуткѣ AB неравенствамъ

$$0 < f^{(n+1)}(x) < \varphi^{(n+1)}(x),$$

то наименьшія уклоненія $E_n[f(x)]$ и $E_n[\varphi(x)]$ разсматриваемыхъ функций отъ многочленовъ степени n на отръзкѣ AB удовлетворяютъ неравенству

$$E_n[f(x)] < E_n[\varphi(x)].$$

Въ самомъ дѣлѣ, составляя функцию

$$F(x, \lambda) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)\varphi(x) - P(x, \lambda),$$

гдѣ $P(x, \lambda)$ многочленъ степени n , наименѣе уклоняющійся отъ $\lambda f(x) + (1 - \lambda)\varphi(x)$ на отръзкѣ AB , мы видимъ, что при всякомъ λ расположе-
ніе точекъ уклоненія будетъ перваго рода, и во внутреннихъ точкахъ уклоненія $F''_{xx} \geq 0$, такъ какъ на всемъ отръзкѣ

$$\frac{\partial^{n+1} F(x, \lambda)}{\partial x^{n+1}} = \lambda f^{(n+1)}(x) + (1 - \lambda)\varphi^{(n+1)}(x) > 0,$$

и слѣдовательно, $F'_x = 0$ имѣетъ не болѣе n корней.

Такимъ образомъ мы вправѣ примѣнять теорему (36), и замѣчаемъ вмѣстѣ съ тѣмъ, что въ послѣдней точкѣ уклоненія $F > 0$, т. е. $F = L$. Но уравненіе

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = f - \varphi - P'_\lambda = 0$$

имѣетъ $(n+1)$ корней, такъ какъ

$$\frac{\partial^{n+2} F}{\partial \lambda \partial x^{n+1}} = f^{(n+1)} - \varphi^{(n+1)} < 0;$$

при этомъ, въ послѣдней точкѣ отклоненія

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} < 0.$$

Слѣдовательно,

$$L(1) = E_n[f(x)] < L(0) = E_n[\varphi(x)],$$

ч. и. т. д.

59. Слѣдствія. А. Если въ промежуткѣ AB

$$0 < \psi^{(n+1)}(x) < f^{(n+1)}(x) < \varphi^{(n+1)}(x),$$

то

$$E_n[\psi(x)] < E_n[f(x)] < E_n[\varphi(x)].$$

В. Если въ промежуткѣ AB

$$|f^{(n+1)}(x)| < \varphi^{(n+1)}(x),$$

то

$$E_n[f(x)] < 2E_n[\varphi(x)].$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$0 < \varphi^{(n+1)}(x) \pm f^{(n+1)}(x) < 2\varphi^{(n+1)}(x);$$

поэтому

$$E_n[\varphi + f] < 2E_n[\varphi], \quad E_n[\varphi - f] < 2E_n[\varphi],$$

и слѣдовательно, тѣмъ болѣе,

$$E_n[f] = E_n\left[\frac{f + \varphi + f - \varphi}{2}\right] < 2E_n[\varphi].$$

С. Если въ промежуткѣ AB , длина котораго $2h$,

$$0 < N < f^{(n+1)}(x) < M,$$

то

$$\frac{2N}{(n+1)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{n+1} < E_n[f(x)] < \frac{2M}{(n+1)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи слѣдствія (А),

$$E_n\left[\frac{Nx^{n+1}}{(n+1)!}\right] < E_n[f(x)] < E_n\left[\frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}\right];$$

а потому, замѣчая, что

$$E_n[Ax^{n+1}] = 2A \left(\frac{h}{2}\right)^{n+1},$$

получаемъ

$$\frac{2N}{(n+1)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{n+1} < E_n[f(x)] < \frac{2M}{(n+1)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}.$$

D. Если въ промежуткѣ AB длины $2h$

$$|f^{(n+1)}(x)| < M,$$

то

$$E_n[f(x)] < \frac{4M}{(n+1)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{n+1}.$$

Это вытекаетъ изъ слѣдствія (B).

E. Если въ промежуткѣ AB

$$f^{(n+1)}(x) > k |f^{(n+2)}(x)|,$$

то

$$2E_n[f(x)] > kE_n[f'(x)];$$

если же

$$|f^{(n+1)}(x)| < kf^{(n+2)}(x),$$

то

$$E_n[f(x)] < 2kE_n[f'(x)].$$

Это вытекаетъ изъ слѣдствія (B).

F. Если въ промежуткѣ $AB(x \geq 0)$

$$f^{(n+1)}(x) > 0, \quad f^{(n+2)}(x) > 0,$$

то

$$E_n[f(x)] < \frac{1}{n+1} E_n[xf'(x)].$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$\varphi(x) = \frac{xf'(x)}{n+1},$$

находимъ

$$\varphi^{(n+1)}(x) = \frac{xf^{(n+2)}(x)}{n+1} + f^{(n+1)}(x) > f^{(n+1)}(x) > 0.$$

60. Примѣры. Предыдущіе результаты, получаемые при помощи общаго метода, если ограничиваться только первымъ членомъ соответствующей строки Тэйлора, въ некоторыхъ случаяхъ даютъ довольно тѣсныя границы для наилучшаго приближенія E_n .

Разсмотримъ, напримѣръ, наилучшее на отрѣзкѣ ab приближеніе $E_n(e^x)$ функціи e^x при помощи многочлена степени n . Примѣняя слѣдствіе C, находимъ немедленно

$$\frac{2e^a}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1} < E_n(e^x) < \frac{2e^b}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}.$$

Въ частности, на отръзкѣ $(-1, +1)$

$$\frac{e^{-1}}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n < E_n(e^x) < \frac{e}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Разсмотримъ еще наилучшее приближеніе функціи $\sin x$ на отръзкѣ $(-h, +h)$, гдѣ $h < \frac{\pi}{2}$, при помощи многочленовъ степени $2m$ или $2m-1$ (нетрудно видѣть, что такъ какъ $\sin x$ есть нечетная функція, многочлены, наименѣе уклоняющіеся отъ $\sin x$ на отръзкѣ $(-h, +h)$, будутъ также нечетными функціями). На основаніи того же слѣдствія С, получимъ

$$\frac{2 \cos h}{(2m+1)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{2m+1} < E_{2m-1}(\sin x) < \frac{2}{(2m+1)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{2m+1};$$

напримѣръ, если $h = \frac{\pi}{3}$, то

$$\frac{1}{(2m+1)!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2m+1} < E_{2m-1}(\sin x) < \frac{2}{(2m+1)!} \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2m+1}.$$

Разсмотримъ, наконецъ, наилучшее приближеніе $E_n \left(\frac{1}{b+x}\right)^\alpha$, гдѣ $b > 0$ и $\alpha > 0$, на отръзкѣ 01 .

Полагая $f(x) = \left(\frac{1}{b+x}\right)^\alpha$ и $\varphi(x) = \left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha+h}$,

находимъ

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n) \left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha+n+1},$$

$$\varphi^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} (\alpha+h)(\alpha+h+1) \dots (\alpha+h+n) \left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha+h+n+1},$$

откуда

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(\alpha+h) \dots (\alpha+h+n)}{\alpha \dots (\alpha+n)} \cdot (b+x)^h \varphi^{(n+1)}(x).$$

Поэтому, применяя слѣдствіе (А), получимъ

$$\frac{(\alpha+h) \dots (\alpha+h+n)}{\alpha \dots (\alpha+n)} \cdot b^h E_n \left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha+h} < E_n \left(\frac{1}{b+x}\right)^\alpha,$$

$$E_n \left(\frac{1}{b+x}\right)^\alpha < \frac{(\alpha+h) \dots (\alpha+h+n)}{\alpha \dots (\alpha+n)} (b+1)^h E_n \left(\frac{1}{b+x}\right)^{\alpha+h},$$

полагая $h > 0$.

Въ частности, если $h = 1$, то

$$\frac{\alpha + n + 1}{\alpha} \cdot b \cdot E_n \left(\frac{1}{b+x} \right)^{\alpha+1} < E_n \left(\frac{1}{b+x} \right)^{\alpha} < \frac{\alpha + n + 1}{\alpha} \cdot (b+1) \cdot E_n \left(\frac{1}{b+x} \right)^{\alpha+1}$$

Упражнение. Показать, при помощи слѣдствія (С), что на отрѣз-
кѣ 01

$$E_n(x^{n+1+h}) < 2 \frac{(n+1+h) \dots (1+h)}{(n+1)!} \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1}$$

если $h < 0$.

60. Примѣненіе теоремы de la Vallée Poussin. Мы можемъ получить нижнюю границу $E_n(f(x))$ на отрѣзкѣ $(-1, +1)$, примѣняя неравенство (30), т. е. беря первые два члена строки Тэйлора, представляющей многочленъ степени n , наименѣе уклоняющійся отъ $\lambda f(x) + (1-\lambda)\varphi(x)$, гдѣ $\varphi(x) = x^{n+1}$.

На основаніи примѣчанія къ § 39, эти первые два члена строки Тэйлора представляютъ вмѣстѣ съ тѣмъ многочленъ $Q(x)$, наименѣе уклоняющійся отъ $f(x)$ въ $(n+2)$ точкахъ x_i , гдѣ разность $|\varphi(x) - P_n(x)|$ достигаетъ максимума (обозначая черезъ $P_n(x)$ многочленъ степени n наименѣе уклоняющійся отъ $\varphi(x)$). Въ данномъ случаѣ, $\varphi(x) = x^{n+1}$, поэтому $x_i = \cos \frac{i\pi}{n+1}$.

Пусть

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$$

имѣетъ радіусъ сходимости $R > 1$.

Многочленъ $Q(x)$ степени n удовлетворяетъ $(n+2)$ уравненіямъ

$$Q(x_i) = f(x_i) + (-1)^i \varphi,$$

причемъ $|\varphi|$, какъ мы видѣли, является нижней границей для $E_n[f(x)]$. Примѣняя формулу интерполированія Лагранжа, находимъ

$$Q(x) = S(x) \sum_{i=0}^{i=n+1} \frac{f(x_i) + (-1)^i \varphi}{(x - x_i) S'(x_i)},$$

гдѣ $S(x) = \sqrt{1-x^2} \sin(n+1) \arccos x$.

Такъ какъ степень $Q(x)$ не выше n , то

$$\sum_{i=0}^{i=n+1} \frac{f(x_i) + (-1)^i \varphi}{S'(x_i)} = 0;$$

откуда, вследствие ¹⁾ равенства $\sum_{i=0}^{i=n+1} \frac{(-1)^i}{S'(x_i)} = \pm 1$, получаемъ

$$\varrho = \pm \sum_{i=0}^{i=n+1} \frac{f(x_i)}{S'(x_i)}.$$

Но

$$\sum_{i=0}^{i=n+1} \frac{f(x_i)}{S'(x_i)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(x) dx}{S(x)},$$

гдѣ C какой нибудь контуръ, окружающій отръзокъ $(-1, +1)$, но не заключающій ни одной особой точки функции $f(x)$.

Поэтому, замѣчая, что

$$\begin{aligned} S(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot \sin(n+1) \arccos x = & -2^n \left[x^{n+2} - \frac{n+3}{2^2} x^n + \right. \\ & + \frac{n^2+3n-2}{2^4 \cdot 2!} x^{n-2} - \frac{(n-3)(n^2+3n-4)}{2^6 \cdot 3!} x^{n-4} + \\ & \left. + \frac{(n-4)(n-5)(n^2+3n-6)}{2^8 \cdot 4!} x^{n-6} - \dots \right], \end{aligned}$$

получаемъ

$$\begin{aligned} -\frac{1}{S(x)} = & \frac{1}{2^n} \left[\frac{1}{x^{n+2}} + \frac{n+3}{2^2} \frac{1}{x^{n+4}} + \frac{(n+4)(n+5)}{2^4 \cdot 2!} \frac{1}{x^{n+6}} + \right. \\ & \left. + \frac{(n+5)(n+6)(n+7)}{2^6 \cdot 3!} \frac{1}{x^{n+8}} + \dots \right]; \end{aligned}$$

и слѣдовательно,

$$\begin{aligned} \pm \varrho = & \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots)}{2^n} \cdot \left[\frac{1}{x^{n+2}} + \frac{n+3}{2^2} \cdot \frac{1}{x^{n+4}} + \dots \right] dx = \\ = & \frac{1}{2^n} \left[a_{n+1} + \frac{n+3}{2^2} a_{n+3} + \frac{(n+4)(n+5)}{2^4 \cdot 2!} a_{n+5} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Такимъ образомъ, на отръзкѣ $(-1, +1)$

$$E_n[f(x)] > \frac{1}{2^n} \left[a_{n+1} + \frac{n+3}{2^2} a_{n+3} + \frac{(n+4)(n+5)}{2^4 \cdot 2!} a_{n+5} + \dots \right]. \quad (71)$$

Въ частности, на отръзкѣ $(-1, +1)$ имѣемъ

¹⁾ См. § 46.

$$\left. \begin{aligned} E_n[x^{n+3}] &= E_{n-1}[x^{n+3}] > \frac{n+3}{2^{n+2}}, \\ E_n[x^{n+5}] &= E_{n-1}[x^{n+5}] > \frac{(n+4)(n+5)}{2^{n+4}2!}, \\ \dots\dots\dots \\ E_n[x^{n+2k+1}] &= E_{n-1}[x^{n+2k+1}] > \frac{(n+k+2)\dots(n+2k+1)}{2^{n+2k}k!} \end{aligned} \right\} (72)$$

61. Преобразование строкъ Тэйлора въ ряды тригонометрическихъ многочленовъ.

Изъ тождества

$$\begin{aligned} (\cos t)^m &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^m = \frac{1}{2^{m-1}} \left[\cos mt + m \cos(m-2)t + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m(m-1)\dots(m-l+1)}{l!} \cos(m-2l)t + \dots \right] \end{aligned}$$

выводимъ, полагая $x = \cos t$ и $T_n(x) = \cos n \arccos x$,

$$x^m = \frac{1}{2^{m-1}} \left[T_m(x) + m T_{m-2}(x) + \frac{m(m-1)}{2!} T_{m-4}(x) + \dots \right]; \quad (73)$$

и слѣдовательно,

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots = \\ &= a_0 + \frac{2}{2^2} a_2 + \frac{4 \cdot 3}{2^4 \cdot 2!} a_4 + \dots + \frac{2l(2l-1)\dots(l+1)}{2^{2l} l!} a_{2l} + \dots \\ &+ T_1(x) \left[a_1 + \frac{3}{2^2} a_3 + \frac{5 \cdot 4}{2^4 \cdot 2!} a_5 + \dots + \frac{(2l+1)\dots(l+2)}{2^{2l} l!} a_{2l+1} + \dots \right] + \\ &+ T_2(x) \left[\frac{a_2}{2} + \frac{4}{2^3} a_4 + \frac{6 \cdot 5}{2^5 \cdot 2!} a_6 + \dots + \frac{(2l+2)(2l+1)\dots(l+3)}{2^{2l+1} l!} a_{2l+2} + \dots \right] + \\ &\dots\dots\dots \\ &+ T_n(x) \left[\frac{a_n}{2^{n-1}} + \frac{n+2}{2^{n+1}} a_{n+2} + \frac{(n+4)(n+3)}{2^{n+3} 2!} a_{n+4} + \dots + \frac{(2l+n)\dots(l+n+1)}{2^{2l+n-1} l!} a^{2l+n} + \dots \right] \end{aligned} \right\} (74)$$

Въ частности, изъ формулы (73) видно, что

$$\left. \begin{aligned} E_n(x^{n+3}) &= E_{n-1}(x^{n+3}) < \frac{n+3}{2^{n+2}} \left[1 + \frac{1}{n+3} \right], \\ E_n(x^{n+5}) &= E_{n-1}(x^{n+5}) < \frac{(n+4)(n+5)}{2^{n+4} 2!} \left[1 + \frac{2}{n+4} + \frac{2 \cdot 1}{(n+4)(n+5)} \right] \\ \dots\dots\dots \\ E_n(x^{n+2k+1}) &= E_{n-1}(x^{n+2k+1}) < \frac{(n+2k+1)\dots(n+k+2)}{2^{n+2k} k!} \left[1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k}{n+k+2} + \frac{k(k-1)}{(n+k+2)(n+k+3)} + \dots \right]. \end{aligned} \right\} (75)$$

о не

ix =

(71)

Сопоставление неравенствъ (72) съ неравенствами (75) показываетъ, что каково бы ни было *определенное* цѣлое число k , на отрезкѣ $(-1, +1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(x^{n+2k+1}) \cdot 2^{n+2k} \cdot k!}{(n+k+2)(n+k+3)\dots(n+2k+1)} = 1. \quad (76)$$

Вообще, полагая

$$\lambda_n = \frac{1}{2^n} \left[a_{n+1} + \frac{n+3}{2^2} a_{n+3} + \frac{(n+4)(n+5)}{2^4 2!} a_{n+5} + \dots \right],$$

замѣчаемъ, что остатокъ, получаемый, если отбросить въ разложеніи (74) члены степени выше n , не болѣе, чѣмъ

$$|\lambda_n| + |\lambda_{n+1}| + \dots;$$

поэтому

$$|\lambda_n| < E_n[f(x)] < |\lambda_n| + |\lambda_{n+1}| + \dots \quad (77)$$

(первое изъ неравенствъ (77) есть ничто иное, какъ неравенство (71)).

62. Слѣдствія. А. Если $\frac{|\lambda_{n+1}| + |\lambda_{n+2}| + \dots}{\lambda_n}$ стремится къ нулю, при $n = \infty$, то на отрезкѣ $(-1, +1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n[f(x)]}{\lambda_n} = 1.$$

В. На отрезкѣ $(-h, +h)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(e^x) \cdot 2^n (n+1)!}{h^{n+1}} = 1.$$

Въ самомъ дѣлѣ, $E_n(e^x)$ на отрезкѣ $(-h, +h)$ равно $E_n(e^{hx})$ на отрезкѣ $(-1, +1)$. Но

$$e^{hx} = \sum \frac{h^n x^n}{n!},$$

поэтому

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{h^{n+1}}{2^n \cdot (n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+2} \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot (n+2)(n+3)} \left(\frac{h}{2}\right)^4 + \dots \right] \\ &= \frac{h^{n+1}}{2^n \cdot (n+1)!} [1 + \varepsilon_n], \end{aligned}$$

гдѣ ε_n стремится къ нулю при $n = \infty$; и слѣдовательно, $\frac{|\lambda_{n+1}| + |\lambda_{n+2}| + \dots}{\lambda_n}$ также стремится къ нулю.

С. На отрезкѣ $(-h, +h)$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_{2k}(\sin x) \cdot 2^{2k}(2k+1)!}{h^{2k+1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_{2k-1}(\sin x) \cdot 2^{2k}(2k+1)!}{h^{2k+1}} = 1,$$

и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_{2k}(\cos x) \cdot 2^{2k+1}(2k+2)!}{h^{2k+2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_{2k+1}(\cos x) \cdot 2^{2k+1}(2k+2)!}{h^{2k+2}} = 1.$$

Доказательство подобно предыдущему ¹⁾.

D. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{R^n} = 1,$$

то на отрезке $(-1, +1)$, при n достаточно большом,

$$\frac{R^{n+1}}{2^n} F\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + \frac{3}{2}, n + 2, R^2\right) < E_n[f(x)] < \frac{R^{n+1}}{2^n(1-R)} F\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + \frac{3}{2}, n + 2, R^2\right),$$

где F означает гипергеометрическую функцию.

Для простоты письма, положим $a_n = R^n$ (что соответствует $f(x) = \frac{1}{1-Rx}$). В таком случае,

$$\begin{aligned} \lambda_n = & \frac{R^{n+1}}{2^n} \left[1 + (n+3) \left(\frac{R}{2}\right)^2 + \frac{(n+4)(n+5)}{2!} \left(\frac{R}{2}\right)^4 + \right. \\ & \left. + \frac{(n+5)(n+6)(n+7)}{3!} \left(\frac{R}{2}\right)^6 + \dots \right] = \frac{R^{n+1}}{2^n} F\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + \frac{3}{2}, n + 2, R^2\right); \end{aligned}$$

и следовательно,

$$\begin{aligned} \lambda_n + \lambda_{n+1} + \dots = & \frac{R^{n+1}}{2^n} \left[F\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + \frac{3}{2}, n + 2, R^2\right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{R}{2}\right) F\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}, \frac{n}{2} + 2, n + 3, R^2\right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Но нетрудно убедиться, что

$$\frac{F\left(\frac{n}{2} + 1, \frac{n}{2} + \frac{3}{2}, n + 2, R^2\right)}{F\left(\frac{n}{2} + \frac{3}{2}, \frac{n}{2} + 2, n + 3, R^2\right)} > \frac{1}{2},$$

¹⁾ Согласно терминологии, предложенной в добавлении к IV главе, преобразование § 61 приводит во всех этих случаях к асимптотическим выражениям многочленов, наименее уклоняющихся от рассматриваемых функций.

если замѣтить, что отношеніе $(p+1)$ -го члена числителя къ $(p+1)$ -му члену знаменателя равно

$$\frac{\left(\frac{n}{2}+1\right)(n+p+2)}{(n+2)\left(\frac{n}{2}+p+1\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+p+2}{\left(\frac{n}{2}+p+1\right)} > \frac{1}{2};$$

слѣдовательно,

$$\begin{aligned} \lambda_n + \lambda_{n+1} + \dots &< \frac{R^{n+1}}{2^n} (1+R+R^2+\dots) \cdot F\left(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+\frac{3}{2}, n+2, R^2\right) = \\ &= \frac{R^{n+1}}{2^n(1-R)} F\left(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+\frac{3}{2}, n+2, R^2\right); \end{aligned}$$

а потому

$$\begin{aligned} \frac{R^{n+1}}{2^n} F\left(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+\frac{3}{2}, n+2, R^2\right) &< E_n[f(x)] < \\ &< \frac{R^{n+1}}{2^n(1-R)} F\left(\frac{n}{2}+1, \frac{n}{2}+\frac{3}{2}, n+2, R^2\right). \end{aligned}$$

Интересно сравнить полученный результат съ теоремой (29). Не останавливаясь на этомъ, перейдемъ къ разсмотрѣнью не аналитическихъ функций.

62. Теорема Вейерштрасса. Выведемъ нѣкоторыя слѣдствія изъ неравенства

$$E_{2n}|x| < \frac{0,32}{2^n}, \quad (54)$$

имѣющаго мѣсто на отрѣзкѣ $(-1, +1)$ для достаточно большихъ значеній n .

Хорошо извѣстно, что изъ того, что

$$\text{пред.}_{n \rightarrow \infty} E_n|x| = 0,$$

вытекаетъ теорема Вейерштрасса, т. е.

$$\text{пред.}_{n \rightarrow \infty} E_n[f(x)] = 0,$$

для какой угодно непрерывной функции ¹⁾ Я хочу замѣтить только, что при помощи формулъ, указанныхъ мной въ 1905 г. въ Bulletin de la

¹⁾ Не бесполезно обратить вниманіе на то, что непрерывность функции $f(x)$ есть условіе необходимое и достаточное для того, чтобы пред. $E_n[f(x)] = 0$.

Société Mathématique de France, изъ неравенства (54) можно вывести въ некоторыхъ случаяхъ довольно точную верхнюю границу для $E_{2n}[f(x)]$.

Пусть $f(x)$ будетъ непрерывная на отрезкѣ 01 функция, и пусть $y = f_n(x)$ будетъ уравненіемъ ломанной линіи, имѣющей вершинами точки на линіи $y = f(x)$, съ абсциссами $x_k = \frac{k}{n}$ ($x = 0, 1, \dots, n$).

Упомянутыя мною формулы заключаются въ томъ, что

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{k=n-1} A_k |x - x_k| + A + Bx,$$

гдѣ

$$A_k = \frac{n}{2} \left[f\left(\frac{k-1}{n}\right) + f\left(\frac{k+1}{n}\right) - 2f\left(\frac{k}{n}\right) \right],$$

$$A = \frac{1}{2} \left[f(0) + nf\left(\frac{n-1}{n}\right) - (n-1)f(1) \right],$$

$$B = \frac{n}{2} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f(1) - f(0) - f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right].$$

Замѣняя $|x - x_k|$ приближенными многочленами $f_{n,p}(x)$ степени p , получаемъ приближенный многочленъ степени p для $f_n(x)$ и заключаемъ, что, при p достаточно большомъ, ошибка $|f_{n,p}(x) - f_n(x)|$ и, тѣмъ болѣе, $E_p[f_n(x)]$ будетъ удовлетворять неравенству

$$E_p[f_n(x)] < \frac{0,32}{p} \sum_{k=1}^{k=n-1} |A_k|. \quad (78)$$

Ограничимся только разсмотрѣннемъ случая, когда функция $f(x)$ удовлетворяетъ условію Дини-Липшица, а именно, пусть

$$|f(x+h) - f(x)| < \frac{\delta(h)}{|\log h|},$$

гдѣ $\delta(h)$ стремится къ нулю вмѣстѣ съ h .

Въ такомъ случаѣ, очевидно,

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{2\delta\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n};$$

и, съ другой стороны,

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{k=n-1} |A_k| < \frac{n^2}{p} \cdot \frac{\delta\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n},$$

такъ какъ $|A_k| < \frac{n\delta\left(\frac{1}{n}\right)}{\log n}$. Поэтому, полагая $p = n^2$, находимъ

$$E_p[f(x)] < |f(x) - f_{n,p}| < 4,64 \frac{\delta\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)}{\log p}. \quad (79)$$

Аналогичное неравенство далъ Lebesgue въ цитированной выше работѣ изъ Annales de Toulouse. Замѣтимъ, что въ случаѣ существованія обобщеннаго условія Дини-Липшица, неравенство (79) соблюдается не для всѣхъ, но для бесчисленнаго множества значений p . Слѣдовательно, принимая во вниманіе результатъ § 27, находимъ, что *условіе необходимое и достаточное, чтобы функція $f(x)$ удовлетворяла обыкновенному условію Дини-Липшица заключается въ томъ, чтобы, при всякомъ $n > n_0$, пред. $E_n[f(x)] \cdot \log n = 0$; условіе необходимое и достаточное, чтобы функція $f(x)$ удовлетворяла обобщенному условію Дини-Липшица, заключается въ томъ, чтобы, при бесчисленномъ множествѣ значений $n > n_0$, пред. $E_n[f(x)] \log n = 0$.*

64. Первое обобщеніе теоремы Вейерштрасса. Если данъ бесконечный рядъ чиселъ

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots,$$

обладающій свойствомъ, что $H < a_i < K$, гдѣ H и K два независимыхъ отъ i положительныхъ числа, то для всякой непрерывной на отрезкѣ $O1$ функціи $f(x)$ можно составить сумму $\sum_{i=1}^{i=n} A_i x^{a_i}$ такъ, чтобы на всемъ отрезкѣ

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{i=n} A_i x^{a_i} \right| < \varepsilon,$$

какъ бы мало ни было число ε .

(Указаннымъ свойствомъ обладаютъ, напримѣръ, числа $a_i = 1 - \frac{1}{2^i}$).

Наша теорема будетъ, очевидно, доказана, если мы покажемъ, что она справедлива для $f(x) = x^p$, гдѣ p произвольное цѣлое число, большее, чѣмъ единица.

Для этого замѣчаемъ сначала, что, на основаніи разсужденія совершенно подобнаго доказательству теоремы (43), можно утверждать, что наилучшее приближеніе x^p на отрезкѣ $O1$ при помощи суммы вида $\sum_{i=1}^{i=n} A_i x^{a_i}$ всегда меньше наилучшаго приближенія при помощи суммы вида $\sum_{i=1}^{i=n} B_i x^{\beta_i}$, если $p > a_i > \beta_i > 0$.

Съ другой стороны, полагая въ неравенствахъ (75) $x^2 = y$, выведемъ изъ нихъ, что на отръзкѣ 01

(79)

$$E_{m-1}(x^{m+k}) < \frac{(2m+2k)\dots(2m+k+1)}{2^{2m+2k-1}k!} \left[1 + \frac{k}{2m+k+1} + \frac{k(k-1)}{(2m+k+1)(2m+k+2)} + \dots \right],$$

и, тѣмъ болѣе, обозначая черезъ $E'_n(x^p)$ наилучшее приближеніе x^p на отръзкѣ 01 при помощи суммы $\sum_{i=1}^{i=n} A_i x^i$, имѣемъ

$$E'_n(x^p) < \frac{2p\dots(p+n+2)}{2^{2p-2}(p-n-1)!} \left[1 + \frac{p-n-1}{p+n+2} + \frac{(p-n-1)(p-n-2)}{(p+n+2)(p+n+3)} \dots \right] = I_{n+1} + I_{n+2} + \dots + I_p,$$

гдѣ

$$I_s = \frac{2p\dots(p+s+1)}{2^{2p-2}(p-s)!} = I_0 \frac{p(p-1)\dots(p-s+1)}{(p+1)\dots(p+s)}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \log I_s &= \log I_0 + \log \frac{p(p-1)\dots(p-s+1)}{(p+1)\dots(p+s)} = \\ &= \log I_0 + \left[\log \left(1 - \frac{1}{p} \right) - \log \left(1 + \frac{1}{p} \right) \right] + \dots \\ &+ \left[\log \left(1 - \frac{s-1}{p} \right) - \log \left(1 + \frac{s-1}{p} \right) \right] - \log \left(1 + \frac{s}{p} \right) < \\ &< \log I_0 - \frac{2}{p} - \frac{4}{p} - \dots - \frac{2(s-1)}{p} - \frac{s}{p} + \frac{s^2}{2p^2} = \\ &= \log I_0 - \frac{s^2}{p} + \frac{s^2}{2p^2}. \end{aligned}$$

Откуда

$$I_s < I_0 e^{-\frac{s^2}{p} + \frac{s^2}{2p^2}} < \frac{4}{\sqrt{p\pi}} e^{-\frac{s^2}{p} + \frac{s^2}{2p^2}},$$

такъ какъ

$$I_0 = \frac{2p!}{2^{2p-2}(p!)^2} = \frac{1 \cdot 3 \dots 2p-1}{2 \cdot 4 \dots 2p} \cdot 4 < \frac{4}{\sqrt{p\pi}}.$$

Но, при $p > 1$, $s > 0$,

$$e^{-\frac{s^2}{p} + \frac{s^2}{2p^2}} < \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{(s-\frac{1}{2})^2}{p}} + e^{-\frac{s^2}{p}} \right]. \quad (80)$$

Дѣйствительно, это неравенство равнозначно неравенству

$$e^{\frac{s^2}{2p^2}} < \frac{1}{2} \left[e^{\frac{s}{p} - \frac{1}{4p}} + 1 \right],$$

или, полагая $u = \frac{s}{p}$, $\alpha = \frac{1}{4p}$, равнозначно неравенству

$$f(u) = 2e^{\frac{u^2}{2} - u} - e^{-u} < e^{-2\alpha},$$

справедливость которого нужно, следовательно, доказать при предположеніи, что $\alpha \leq \frac{1}{8}$, $1 \geq u \geq 4\alpha$. Но нетрудно видѣть, что, при разсматриваемых значеніях u , $f''(u) > 0$; поэтому наибольшее значеніе $f(u)$ будетъ равно $f(1)$ или $f(4\alpha)$, такъ что достаточно замѣтить, что, при $\alpha \leq \frac{1}{8}$,

$$f(1) = 2e^{-\frac{1}{2}} - e^{-1} < e^{-2\alpha} \quad \text{и} \quad f(4\alpha) = 2e^{8\alpha^2 - 4\alpha} - e^{-4\alpha} < e^{-2\alpha}.$$

Изъ неравенства (80) заключаемъ, что

$$e^{-\frac{s^2}{p} + \frac{s^2}{2p^2}} < \int_{s-1}^s e^{-\frac{z^2}{p}} dz,$$

а потому

$$I_s < \frac{4}{\sqrt{p\pi}} \int_{s-1}^s e^{-\frac{z^2}{p}} dz = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{s-1}{\sqrt{p}}}^{\frac{s}{\sqrt{p}}} e^{-z^2} dz.$$

Слѣдовательно ¹⁾, наконецъ,

¹⁾ Указанное здѣсь вычисленіе аналогично тому, которое я сдѣлалъ въ замѣткѣ „Sur le calcul approché des probabilités par la formule de Laplace“ (Сообщ. X. М. О. Т. XII н^о 3) и приводитъ къ слѣдующему результату для теоріи вѣроятностей: *если вѣроятность событія равна $\frac{1}{2}$, то, при $2p(p > 1)$ испытаній, вѣроятность, что число появленій событія удовлетворяетъ неравенству $|m - p| \leq z_0 \sqrt{p}$, больше, чѣмъ $\Phi(z_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z_0} e^{-z^2} dz$.*

(80)

$$E'_n(x^p) < \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\frac{1}{p}}^{\infty} e^{-z^2} dz. \quad (81)$$

Такимъ образомъ $E'_n(x^p)$ стремится къ нулю, если $\frac{n}{\sqrt{p}}$ возрастаетъ безконечно. Поэтому, въ частности $E'_n(x^{pn})$ стремится къ нулю, если, при данномъ p , n возрастаетъ безконечно. Но, полагая $x^n = y$, мы видимъ, что $E'_n(x^{pn})$ есть вмѣстѣ съ тѣмъ наилучшее приближеніе функціи x^p при помощи суммы $\sum_{i=1}^{i=n} B_i x^{\frac{i}{n}}$ на томъ же отрезкѣ 01. Слѣдовательно, благодаря замѣчанію, сдѣланному въ началѣ доказательства, приближеніе x^p при помощи суммы вида $\sum_{i=1}^{i=n} A_i x^{2i}$ стремится къ нулю вмѣстѣ съ $\frac{1}{n}$, такъ какъ (введя, если понадобится, переменную x^k вмѣсто x) всегда можно предположить, что $1 \leq H < a_i$, ч. и. т. д.

Примѣчаніе. Отрезокъ 01 можетъ быть замѣненъ произвольнымъ отрезкомъ AB на положительной оси; и кромѣ того, нетрудно убѣдиться, что, если отрезокъ AB не доходить до 0, то условіе, чтобы $H > 0$, $K > 0$, можетъ быть отброшено.

65. Второе обобщеніе теоремы Вейерштрасса. Если показатели a_n возрастаютъ безконечно вмѣстѣ съ n , то наилучшее приближеніе непрерывной функціи $f(x)$ на отрезкѣ 01 при помощи $\sum A_n x^{a_n}$ стремится къ нулю, если $\frac{a_n}{n \log n}$ стремится къ нулю; напротивъ, наилучшее приближеніе не можетъ стремиться къ нулю, если есть такое число ε , что $a_n \geq n(\log n)^{2+\varepsilon}$ или $a_n \geq n(\log n)^2(\log \log n)^{1+\varepsilon}$ и т. д.

Займемся сначала доказательствомъ первой части теоремы.

Достаточно будетъ рассмотретьъ случай, когда $f(x) = x^p$, гдѣ p произвольное цѣлое положительное число, если брать только тѣ a_i , которые больше p , и, тѣмъ болѣе, достаточно будетъ доказать, что, какъ бы мало ни было число δ , возможно на всемъ отрезкѣ 01 удовлетворить неравенству

$$\left| x - \sum_{i=i_0+1}^{i=i_0+n} A_i x^{a_i-p+1} \right| < \delta, \quad (82)$$

ибо, если это неравенство имѣетъ мѣсто, то, конечно,

$$\left| x^p - \sum_{i=i_0+1}^{i=i_0+n} A_i x^{2i} \right| < \delta x^{p-1} \leq \delta.$$

Пусть

оло-
мат-
) бу-
 $\leq \frac{1}{8}$,

гткѣ
М. О.
олт-
ло т
z_0) =

$$a_n = \varepsilon_n n \log(n+1);$$

въ такомъ случаѣ, по предположенію, какъ бы мало ни было число γ , можно указать достаточно большое число n_0 , чтобы, при $n \geq n_0$, имѣть $\varepsilon_n < \gamma$.

На основаніи теоремы (43), неравенство (82) можетъ быть осуществлено, если извѣстно, что

$$\left| x - \sum_{h=1}^{h=n} B_h x^{\beta_h} \right| < \delta,$$

гдѣ

$$\beta_h > a_{i_0+h} - p + 1.$$

Положимъ $\beta_h = kh$; тогда

$$\left| x - \sum_{h=1}^{h=n} B_h x^{kh} \right| = \left| y^{\frac{1}{k}} - \sum_{h=1}^{h=n} B_h y^h \right|.$$

Мы увидимъ въ слѣдующей главѣ (и это вытекаетъ также изъ примѣчанія c къ теоремѣ (16)), что эта разность можетъ быть сдѣлана меньше $\frac{b}{n^{i_0 k}}$, гдѣ b — независимая отъ n и k постоянная. Такимъ образомъ

$$\delta < \frac{b}{n^{i_0 k}},$$

если

$$k > \frac{a_{i_0+h} - p + 1}{h} = \frac{\varepsilon_{i_0+h}(i_0 + h) \log(i_0 + h) - p + 1}{h}. \quad (83)$$

Для значеній h , которыя меньше, чѣмъ i_0 , и меньше, чѣмъ $n_0 - i_0$, неравенству (83) можно удовлетворить, взявши для k нѣкоторое вполне определенное число k_0 ; для остальныхъ же значеній h , неравенство будетъ соблюдено, если взять

$$k = 2\gamma \log 2n.$$

Можно предположить n настолько большимъ, что $2\gamma \log 2n > k_0$. Слѣдовательно,

$$\delta < \frac{b}{n^{\frac{1}{2\gamma \log 2n}}} = \frac{b}{e^{\frac{\log n}{2\gamma \log 2n}}} < b e^{-\frac{1}{4\gamma}};$$

поэтому δ можетъ быть сдѣлано сколь угодно малой, и первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы замѣчаемъ, что наилучшее приближеніе x на отрезкѣ 01 при помощи суммы $\sum_{i=1}^{i=n} A_i x^{\alpha_i}$ (гдѣ $\alpha_i > 1$), β_n , удовлетворяетъ, при всякомъ положительномъ значеніи μ , неравенству

$$\beta_n > \beta_{n-1} \frac{(1 + \mu)^{\alpha_n - 1} - 1}{(1 + \mu)^{\alpha_n} + 1}. \quad (84)$$

Дѣйствительно, изъ

$$|x + A_1 x^{\alpha_1} + \dots + A_n x^{\alpha_n}| < \beta_n$$

заключаемъ, что и

$$\left| \frac{x}{1 + \mu} + A_1 \left(\frac{x}{1 + \mu} \right)^{\alpha_1} + \dots + A_n \left(\frac{x}{1 + \mu} \right)^{\alpha_n} \right| < \beta_n;$$

а потому

$$|x(1 + \mu)^{\alpha_n - 1} + \dots + A_n x^{\alpha_n}| < \beta_n (1 + \mu)^{\alpha_n},$$

откуда

$$|x[(1 + \mu)^{\alpha_n - 1} - 1] + \dots + A_{n-1} x^{\alpha_{n-1}}| < \beta_n [(1 + \mu)^{\alpha_n} + 1],$$

и

$$|x + B_1 x^{\alpha_1} + \dots + B_{n-1} x^{\alpha_{n-1}}| < \beta_n \cdot \frac{(1 + \mu)^{\alpha_n} + 1}{(1 + \mu)^{\alpha_n - 1} - 1},$$

слѣдовательно,

$$\beta_{n-1} < \beta_n \cdot \frac{(1 + \mu)^{\alpha_n} + 1}{(1 + \mu)^{\alpha_n - 1} - 1},$$

или

$$\beta_n > \beta_{n-1} \cdot \frac{(1 + \mu)^{\alpha_n - 1} - 1}{(1 + \mu)^{\alpha_n} + 1}. \quad (84)$$

Изъ неравенства (84) получаемъ немедленно

$$\beta_n > \beta_{n_0} \cdot \prod_{i=n_0+1}^{i=n} \frac{(1 + \delta_i)^{\alpha_i - 1} - 1}{(1 + \delta_i)^{\alpha_i} + 1}, \quad (85)$$

гдѣ δ_i какія угодно положительные числа. Достаточно теперь будетъ показать, что при соответствующемъ выборѣ чиселъ δ_i , произведеніе, стоящее во второй части неравенства, не стремится къ нулю, при $n = \infty$, если $\alpha_n \geq m(\log n)^{2+\varepsilon}$ или $\alpha_n \geq n(\log n)^2(\log \log n)^{1+\varepsilon}$ и т. д.

1) Если бы одно изъ чиселъ α_i было бы равно 1, то вмѣсто наилучшаго приближенія x можно было бы разсматривать наилучшее приближеніе x^p , гдѣ $p \geq \alpha_i$.

Но

$$\frac{(1 + \delta_i)^{2i-1} - 1}{(1 + \delta_i)^{2i} + 1} = \frac{1}{1 + \delta_i} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1 + \delta_i)^{2i-1}}}{1 + \frac{1}{(1 + \delta_i)^{2i}}}$$

Поэтому рассматриваемое произведение не может стремиться къ нулю, если оба ряда

$$\sum \delta_i, \quad \sum \frac{1}{(1 + \delta_i)^{2i}}$$

будутъ сходящимися. Для сходимости перваго ряда, достаточно взять

$$\delta_n = \frac{2}{n(\log n)^{1+\varepsilon}}, \quad \text{или} \quad \delta_n = \frac{2}{n \log n (\log \log n)^{1+\varepsilon}} \text{ и т. д.};$$

возьмемъ, наиримѣръ, первое изъ этихъ значений. Въ такомъ случаѣ, и рядъ

$$\sum \frac{1}{(1 + \delta_i)^{2i}}$$

будетъ сходящимся, если $\alpha_i \geq i(\log i)^{2+\varepsilon}$.

Въ самомъ дѣлѣ, общій членъ этого ряда меньше, чѣмъ

$$\frac{1}{\left[1 + \frac{2}{i(\log i)^{1+\varepsilon}}\right]^{i(\log i)^{2+\varepsilon}}},$$

т. е., при i достаточно большомъ, меньше, чѣмъ

$$\frac{1}{e^{2 \log i}} = \frac{1}{i^2},$$

а потому рядъ $\sum \frac{1}{(1 + \delta_i)^{2i}}$ сходящійся, и слѣдовательно, вторая часть теоремы доказана.

Примѣчаніе. Отрѣзокъ OB можетъ быть замѣненъ произвольнымъ отрѣзкомъ AB положительной оси.

Добавленіе къ главѣ V.

Разложеніе произвольныхъ функцій въ нормальные ряды.

66. Нормальные ряды. Нормальнымъ рядомъ на отръзкѣ 01 называется рядъ вида

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} \sum_{q=0}^{q=\infty} A_{p,q} x^p (1-x)^q,$$

абсолютно и равномерно сходящійся на этомъ отръзкѣ. Въ моемъ сочиненіи «Исслѣдованіе и интегрированіе дифференціальныхъ уравненій съ частными производными 2-го порядка эллиптическаго типа» дано (во II главѣ) разложеніе въ нормальный рядъ, пригодное для всякой функціи, имѣющей непрерывную производную на отръзкѣ 01. Естественно задать себѣ вопросъ, можетъ ли совершенно произвольная непрерывная функція быть разложена въ нормальный рядъ.

Отвѣтъ на этотъ вопросъ, какъ мы увидимъ далѣе, оказывается утвердительнымъ. А именно, мы укажемъ приѣмъ для преобразованія произвольнаго, равномерно сходящагося ряда многочленовъ въ нормальный рядъ. Съ этой цѣлью разрѣшимъ предварительно слѣдующую алгебраическую задачу.

Задача. Преобразовать многочленъ

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

въ выраженіе

$$P(x) = \sum_{p=0}^{p+q=m} \sum_{q=0} A_{p,q} x^p (1-x)^q,$$

гдѣ $m \geq n$, такъ, чтобы максимумъ суммы

$$\sum_{p=0}^{p+q=m} \sum_{q=0} |A_{p,q}| x^p (1-x)^q$$

на отръзкѣ 01 былъ возможно малъ.

Въ виду того, что число коэффициентовъ $A_{p,q}$ ограничено, задача, очевидно, имѣетъ рѣшеніе, т. е. можно выбрать эти коэффициенты такъ чтобъ максимумъ суммы

$$\sum_{p=0}^{p+q=m} \sum_{q=0} |A_{p,q}| x^p (1-x)^q$$

достигалъ своего низшаго предѣла; этому минимальному значенію максимума мы для краткости дадимъ названіе *нормальною максимумомъ степени m* данного многочлена на отрѣзкѣ 01.

Весьма замѣчательно, что поставленная задача разрѣшается совершенно элементарно, при чемъ обнаруживается интересный фактъ, что *нормальный максимумъ степени m любого многочлена $P(x)$ имѣетъ предѣлъ, при $m = \infty$, максимумъ $P(x)$ на данномъ отрѣзкѣ*. Искомое рѣшеніе вытекаетъ изъ простаго замѣчанія: допустимъ, что задача рѣшена, и пусть выраженіе

$$P(x) = \sum_{p=0}^{p+q=m} \sum_{q=0} a_{p,q} x^p (1-x)^q$$

есть одно изъ возможныхъ рѣшеній. Я говорю, что, если среди членовъ $a_{p,q} x^p (1-x)^q$ есть такіе, степень которыхъ $p + q = m - k$, гдѣ $k > 0$, то рѣшеніемъ задача будетъ служить и то выраженіе, которое получится отъ замѣны $a_{p,q} x^p (1-x)^q$ суммой членовъ степени m ,

$$a_{p,q} x^p (1-x)^q [x + (1-x)]^k = a_{p,q} [x^{p+k} (1-x)^q + k x^{p+k-1} (1-x)^{q+1} + \dots + x^p (1-x)^{q+k}].$$

Въ самомъ дѣлѣ,

$$|a_{p,q}| x^p (1-x)^q = |a_{p,q}| x^{p+k} (1-x)^q + |k a_{p,q}| x^{p+k-1} (1-x)^{q+1} + \dots + |a_{p,q}| x^p (1-x)^{q+k};$$

поэтому сумма модулей преобразованнаго выраженія не можетъ превысить суммы модулей даннаго выраженія.

Отсюда слѣдуетъ, что среди рѣшеній задачи всегда есть одно рѣшеніе, въ которомъ сумма показателей $p + q = m$. Другими словами, задача будетъ рѣшена, если представимъ $P(x)$ въ видѣ

$$P(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} (1-x) + \dots + A_0 (1-x)^m.$$

Остается вычислить коэффициенты A_i такъ, чтобы имѣть тождественно

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} (1-x) + \dots + A_0 (1-x)^m = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0.$$

Откуда находимъ для опредѣленія $(m+1)$ коэффициента $(m+1)$ уравненіе

$$\begin{aligned}
 A_0 &= a_0, \\
 A_1 - mA_0 &= a_1, \\
 &\dots\dots\dots \\
 A_k - (m-k+1)A_{k-1} + \dots + (-1)^k \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1.2\dots k} A_0 &= a_k, \\
 &\dots\dots\dots \\
 A_m - A_{m-1} \dots\dots\dots + (-1)^m A_0 &= a_m,
 \end{aligned}
 \tag{86}$$

гдѣ $a_k = 0$, если $k > n$.

Рѣшеніе уравненій (86) не представляетъ труда и даетъ немедленно

$$\begin{aligned}
 A_0 &= a_0, \\
 A_1 &= a_1 + ma_0, \\
 A_2 &= a_2 + (m-1)a_1 + \frac{m(m-1)}{2} a_0, \\
 &\dots\dots\dots \\
 A_k &= a_k + C_{m-k+1}^1 a_{k-1} + \dots + C_m^k a_0, \\
 &\dots\dots\dots \\
 A_m &= a_m + a_{m-1} + \dots\dots\dots + a_0,
 \end{aligned}
 \tag{87}$$

гдѣ

$$C_m^k = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1.2\dots k}.$$

Итакъ поставленная задача рѣшена; *нормальный максимумъ степени m даннаго многочлена равенъ максимуму суммы*

$$\sum_{k=0}^{k=m} |A_k| x^k (1-x)^{m-k},$$

гдѣ коэффициенты A_k определяются формулами (87).

67. Изслѣдованіе величины нормального максимума. Формулу, определяющую A_k можно преобразовать слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{aligned}
 A_k &= C_m^k \left[a_0 + \frac{C_{m-1}^{k-1}}{C_m^k} a_1 + \frac{C_{m-2}^{k-2}}{C_m^k} a_2 + \dots \right] = C_m^k \left[a_0 + \frac{k}{m} a_1 + \frac{k(k-1)}{m(m-1)} a_2 + \dots \right] = \\
 &= C_m^k \left[a_0 + \frac{k}{m} a_1 + \left(\frac{k}{m}\right)^2 a_2 \cdot \frac{1-\frac{1}{k}}{1-\frac{1}{m}} + \dots + \left(\frac{k}{m}\right)^n a_n \cdot \frac{\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{k}\right)}{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{m}\right)} \right].
 \end{aligned}$$

Изъ полученной формулы видно, что, при безконечномъ возрастаніи m ,

$$\text{пред. } \frac{A_k}{C_m^k} = \text{пред. } P\left(\frac{k}{m}\right). \quad (88)$$

Дѣйствительно, если k есть определенное число, то все члены суммы, состоящей изъ данного числа $n + 1$ слагаемыхъ,

$$\frac{A_k}{C_m^k} = a_0 + \frac{k}{m} a_1 + \left(\frac{k}{m}\right)^2 a_2 \frac{1 - \frac{1}{k}}{1 - \frac{1}{m}} + \dots,$$

кроме a_0 , стремятся къ нулю, поэтому

$$\text{пред. } \frac{A_k}{C_m^k} = a_0 = P(0) = \text{пред. } P\left(\frac{k}{m}\right).$$

Если же k также возрастаетъ безконечно, то

$$\text{пред. } \frac{A_k}{C_m^k} = \text{пред. } \left[a_0 + a_1 \frac{k}{m} + a_2 \left(\frac{k}{m}\right)^2 + \dots + a_n \left(\frac{k}{m}\right)^n \right] = \text{пред. } P\left(\frac{k}{m}\right).$$

Слѣдуетъ прибавить, что разность

$$\delta_k = \frac{A_k}{C_m^k} - P\left(\frac{k}{m}\right)$$

равномерно стремится къ нулю, при безконечномъ возрастаніи m .

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\delta_k = \left(\frac{k}{m}\right)^2 a_2 \left[\frac{1 - \frac{1}{k}}{1 - \frac{1}{m}} - 1 \right] + \dots + \left(\frac{k}{m}\right)^n a_n \left[\frac{\left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(1 - \frac{2}{k}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{k}\right)}{\left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right)} - 1 \right];$$

поэтому

$$\begin{aligned} |\delta_k| &< \left(\frac{k}{m}\right)^2 |a_2| \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right) \right] + \dots + \left(\frac{k}{m}\right)^n |a_n| \left[1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{k}\right) \right] < \\ &< \left(\frac{k}{m}\right)^2 |a_2| \cdot \frac{1}{k} + \dots + \left(\frac{k}{m}\right)^n |a_n| \cdot \frac{(n-1)^2}{k} < \frac{B}{m}, \end{aligned}$$

гдѣ

$$B = |a_2| + 4|a_3| + \dots + (n-1)^2 |a_n|;$$

итакъ

$$A_k = C_m^k \left[P\left(\frac{k}{m}\right) + \delta_k \right], \quad (88^{\text{bis}})$$

гдѣ

$$|\delta_k| < \frac{B}{m}.$$

Слѣдовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=m} |A_k| x^k (1-x)^{m-k} &= \sum_{k=0}^{k=m} P\left(\frac{k}{m}\right) \div \phi_k \cdot C_m^k x^k (1-x)^{m-k} < \\ < \left(M + \frac{B}{m}\right) \sum_{k=0}^{k=m} C_m^k x^k (1-x)^{m-k} &= \left(M + \frac{B}{m}\right) [x + (1-x)]^m = M + \frac{B}{m}, \end{aligned}$$

обозначая через M максимумъ многочлена $P(x)$ на отрезкѣ 01. Такимъ образомъ обозначая черезъ M_m нормальный максимумъ степени m многочлена $P(x)$ на отрезкѣ 01, имѣемъ

$$M_m < M + \frac{B}{m}, \quad (89)$$

Слѣдствіе. Если многочленъ $P(x)$ положителенъ на отрезкѣ 01, то, при m достаточно большомъ, все коэффициенты A_k положительны.

68. Теорема. Всякая непрерывная на отрезкѣ 01 функция разлагается въ нормальный рядъ на этомъ отрезкѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи теоремы Вейерштрасса, всякую непрерывную функцию $f(x)$ можно представить въ видѣ равномерно сходящагося ряда многочленовъ

$$f(x) = Q_0(x) + Q_1(x) + \dots + Q_s(x) + \dots \quad (90)$$

Написанный рядъ можно будетъ преобразовать въ нормальный рядъ слѣдующимъ образомъ: соединяя вмѣстѣ, если это понадобится, по нѣсколько членовъ, рядъ (90) преобразуемъ въ рядъ

$$f(x) = \tilde{P}_0(x) + P_1(x) + \dots + P_s(x) + \dots \quad (90^{bis})$$

въ которомъ все многочлены $P_s(x)$ (при $s > 0$) удовлетворяютъ условію

$$|P_s(x)| < \frac{1}{2^s}.$$

Послѣ этого представимъ все многочлены $P_s(x)$ въ видѣ

$$P_s(x) = \sum_{k=0}^{k=m} A_k^{(s)} x^k (1-x)^{m-k}.$$

Полагая m достаточно большимъ, чтобъ нормальный максимумъ $M_m^{(s)}$ многочлена P_s не превышалъ болѣе, чѣмъ въ 2 раза его обыкновеннаго максимума, получимъ

$$\sum_{k=0}^{k=m} |A_k^{(s)}| x^k (1-x)^{m-k} < \frac{1}{2^{s-1}}.$$

Дѣлая тоже преобразование для всѣхъ s , мы, очевидно, преобразуемъ рядъ $f(x)$ въ нормальный рядъ; ч. н. т. д.

Слѣдствіе. Для всякой непрерывной функции имѣетъ мѣсто равенство ¹⁾

$$f(x) = \text{пред.} \sum_{m=\infty}^{k=m} f\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k x^k (1-x)^{m-k}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, если $f(x) = P(x)$ есть многочленъ, то на основаніи равенства (88^{bis}),

$$\left| P(x) - \sum_{k=0}^{k=m} P\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k x^k (1-x)^{m-k} \right| < \frac{B}{m}. \quad (91)$$

Если же $f(x)$ есть произвольная функция (90^{bis}), то, полагая

$$P_0 + P_1 + \dots + P_s = P,$$

имѣемъ

$$|f - P| < \frac{1}{2^s} \quad (92)$$

поэтому, применяя къ многочлену $P(x)$ неравенство (91) заключаемъ, что

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{k=m} f\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k x^k (1-x)^{m-k} \right| < \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{B}{m}.$$

Такимъ образомъ, какъ бы мало ни было число α , выбираемъ s достаточно большимъ, чтобы

$$\frac{1}{2^{s-1}} < \frac{\alpha}{2};$$

послѣ выбора s , многочленъ P и коэффициентъ B будутъ опредѣлены, и слѣдовательно, выбирая m достаточно большимъ, найдемъ

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{k=m} f\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k x^k (1-x)^{m-k} \right| < \alpha,$$

т. е.

$$f(x) = \text{пред.} \sum_{m=\infty}^{k=m} f\left(\frac{k}{m}\right) C_m^k x^k (1-x)^{m-k}.$$

Ч. н. т. д.

¹⁾ Эта формула выведена мною при помощи теории вѣроятностей въ маленькой замѣткѣ «Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités», помѣщенной въ Сообщ. Харьк. Математ. Общ. Т. XIII н^о 1, 1912 г.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ.

Разложение непрерывных функций въ ряды тригонометрическихъ многочленовъ.

Г л а в а VI.

О приближеніи, осуществляемомъ посредствомъ разложенія функций въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ.

69. Средняя квадратичная ошибка. Отысканіе многочлена данной степени, наименѣе уклоняющагося отъ нѣкоторой функции $f(x)$, представляетъ, какъ это видно изъ предшествующихъ главъ, задачу чрезвычайной трудности. Поэтому интересно выяснитъ, какую выгоду для рѣшенія этой задачи, можно извлечь изъ рѣшенія другой аналогичной, но несравненно болѣе легкой, задачи отысканія многочлена $R_n(x)$ степени n по условію, чтобы *средняя квадратичная ошибка*

$$\int_a^b p(x) \cdot [f(x) - R_n(x)]^2 dx$$

(при данномъ *вѣсъ* $p(x) \geq 0$) была бы возможною малой. Полагая, для опредѣленности, $a = -1$, $b = +1$, мы ограничимся разсмотрѣніемъ случая ¹⁾, когда $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Но

$$d_n^2 = \int_{-1}^{+1} [f(x) - R_n(x)]^2 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^\pi [f(\cos\theta) - R_n(\cos\theta)]^2 d\theta; \quad (93)$$

¹⁾ Обобщеніе результатовъ, которые будутъ получены въ этомъ случаѣ, не представляетъ серьезныхъ трудностей. См. *Haar* „Orthogonale Funktionensysteme“ *Mathemat. Annalen* V. 69. 1910, и въ *Запискахъ Академіи Наукъ*, *В. А. Стеклова* „Sur la théorie de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales“, 1911.

и, замѣчая (§ 10), что

$$R_n(\cos\theta) = A_0 + A_1 \cos\theta + \dots + A_n \cos n\theta,$$

находимъ условия необходимыя и достаточныя для минимума δ :

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos\theta) d\theta \quad (94)$$

и

$$A_p = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos\theta) \cdot \cos p\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos\theta) \cdot \cos p\theta d\theta.$$

Формулы (94) даютъ ничто иное, какъ хорошо извѣстные коэффициенты Фурье ¹⁾ разложения функции $g(\theta) = f(\cos\theta)$ въ тригонометрическій рядъ. Эти же коэффициенты мы находимъ и для разложения $f(x)$ въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ $T_n(x) = \cos n \arccos x$,

$$f(x) = A_0 + A_1 T_1(x) + \dots + A_n T_n(x) + \dots; \quad (95)$$

а многочленъ

$$R_n(x) = A_0 + A_1 T_1(x) + \dots + A_n T_n(x), \quad (95 \text{ bis})$$

обращающій въ минимумъ среднюю квадратичную ошибку, получается, если въ разложеніи (95) отбросить члены степени выше n .

Въ V главѣ (§ 61) мы уже разсматривали приближенные многочлены $R_n(x)$ и видѣли, что въ нѣкоторыхъ рѣдкихъ случаяхъ они даютъ асимптотическія выраженія многочленовъ наименѣе уклоняющихся отъ данной функции. Во многихъ случаяхъ, какъ будетъ показано дальше,

$$1 < \frac{I_n[f(x)]}{E_n[f(x)]} < k, \quad (96)$$

гдѣ k независимая отъ n постоянная, а $I_n[f(x)]$ есть максимумъ разности $|f(x) - R_n(x)|$. Но уже одинъ тотъ фактъ, что существуютъ непрерывныя функции, которыя не могутъ быть разложены въ сходящійся тригонометрическій рядъ, показываетъ, что неравенство (96) не всегда имѣетъ мѣсто, такъ какъ возможно, что $E_n[f(x)]$ стремится къ нулю, между тѣмъ какъ $I_n[f(x)]$ возрастаетъ безконечно. Изслѣдованіе условий, какимъ должна удовлетворять функция $f(x)$, чтобы неравенство (96) было соблюдено, является такимъ образомъ непосредственнымъ продолженіемъ классической теоріи разложения функций въ тригонометрическій рядъ.

¹⁾ Коэффициенты при синусахъ равны нулю.

70. Нѣкоторыя слѣдствія изъ теоремы Рисса. Прежде чѣмъ перейти къ изученію наименьшаго отклоненія съ новой точки зрѣнія, на которую мы становимся въ этой главѣ, сдѣлаемъ нѣсколько замѣчаній о минимумѣ средней квадратичной ошибки, не имѣющія прямого отношенія къ дальнѣйшему. Напомню сначала теорему Фридриха Рисса ¹⁾: для того, чтобы функція $\varphi(\theta)$ была квадратично интегрируема (т. е. чтобы интегралъ $\int_a^b \varphi^2(\theta) d\theta$, при $0 \leq a < b \leq 2\pi$, существовалъ въ смыслѣ Лебега ²⁾) необходимо и достаточно, чтобы рядъ $\sum_{p=0}^{p=\infty} A_p^2$ былъ сходящимся, обозначая черезъ A_p коэффициенты Фурье (94) функціи $\varphi(\theta)$; при этомъ,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi^2(\theta) d\theta = \sum_{p=0}^{p=\infty} A_p^2.$$

Примѣняя теорему Рисса къ функціи

$$-\varphi'(\theta) = f'(\cos\theta) \cdot \sin\theta = f'(x) \sqrt{1-x^2},$$

у которой коэффициенты Фурье равны pA_p , находимъ, что условіе необходимое и достаточное для того, чтобы интегралъ

$$\int_a^b [f'(x)]^2 (1-x^2) dx$$

существовалъ (въ смыслѣ Лебега), при $-1 \leq a < b \leq 1$, заключается въ томъ, чтобы рядъ $\sum_{p=1}^{p=\infty} p^2 A_p^2$ былъ сходящимся (коэффициенты A_p даны формулами (94)), т. е. чтобы сумма

$$\beta_{p_0} = \sum_{p=p_0+1}^{p=\infty} p^2 A_p^2$$

стремилась къ нулю съ возрастаніемъ p_0 .

Но

$$\delta_{p_0}^2 = \pi \sum_{p=p_0+1}^{p=\infty} A_p^2; \quad (93^{bis})$$

поэтому

$$(p_0 + 1)^2 \delta_{p_0}^2 < \pi \beta_{p_0} < (p_0 + 1)^2 \delta_{p_0}^2 + \sum_{p=p_0+1}^{p=\infty} (2p + 1) \delta_p^2.$$

¹⁾ Fr. Riesz „Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen“ Mathem. Annalen B. 69.

²⁾ Lebesgue „Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives“.

Такимъ образомъ, полагая $\delta_p = \frac{\varepsilon_p}{p+1}$, видимъ, что для существованія интеграла $\int_a^b [f'(x)]^2(1-x^2)dx$ необходимо, чтобы $\varepsilon_p = \delta_p \cdot (p+1)$ стремилось къ нулю, и достаточно, чтобы рядъ $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_p^2}{p+1} = \sum_{p=1}^{\infty} (p+1)\delta_p^2$ былъ сходящимся. Последнее условіе соблюдается, если $\varepsilon_p \leq \frac{1}{(\log p)^{\frac{1}{2}+\alpha}}$ или $\leq \frac{1}{(\log p)^{\frac{1}{2}}(\log \log p)^{\frac{1}{2}+\alpha}}$ и т. д. Аналогичные результаты можно получить и для послѣдующихъ производныхъ; не останавливаясь на этомъ, замѣтимъ только, что величина минимума средней квадратичной ошибки δ_n^2 такъ же тѣсно связана съ интегрально-дифференціальными свойствами функціи на всемъ промежуткѣ, какъ наименьшее уклоненіе $E_n[f(x)]$ связано съ дифференціальными свойствами функціи въ каждой отдѣльной точкѣ (глава II).

Примѣчаніе. Изъ равенствъ (93) и (93^{bis}) видно что $\delta_n < E_n \cdot \sqrt{\pi}$; поэтому

$$\sqrt{A_{n+1}^2 + A_{n+2}^2 + \dots} < E_n[f(x)] < |A_{n+1}| + |A_{n+2}| + \dots; \quad (77^{\text{bis}})$$

это неравенство немного точнее неравенства (77), если замѣтить, что $A_{n+1} = \lambda_n$.

71. Теорема. Для всякой непрерывной функціи $f(x)$ имѣетъ мѣсто неравенство (сохраня обозначенія § 69)

$$\frac{I_n[f(x)]}{E_n[f(x)]} < k_1 \log(n+1), \quad (97)$$

гдѣ k_1 независима отъ n и отъ функціи $f(x)$ постоянная.

Эта теорема вытекаетъ изъ аналогичной теоремы, доказанной Лебегомъ въ цитированной уже ранѣе работѣ „Sur les intégrales singulières“¹⁾, отличающейся отъ нашей теоремы тѣмъ, что у него I_n есть максимумъ разности $|f(x) - \sum_{p=0}^{n-1} A_p \cos px + B_p \sin px|$, гдѣ A_p и B_p коэффициенты Фурье, а E_n наилучшее приближеніе $f(x)$ при помощи тригонометрической суммы n -аго порядка. Такимъ образомъ, считая теорему Лебега для тригонометрическихъ суммъ доказанной, мы получимъ неравенство (97), если, какъ въ § 69, сдѣлаемъ подстановку $x = \cos \theta$.

¹⁾ Annales de Toulouse, t. I (1909 г.). См. также упомянутую выше работу D. Jackson. Въ работѣ „Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihe“, Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. 138, L. Fejer производитъ вычисленіе, изъ котораго вытекаетъ, что коэффициентъ k_1 въ формулѣ (97) имѣетъ предѣломъ $\frac{8}{\pi^2}$, при $n \rightarrow \infty$.

72. Слѣдствія. 1) Лебегъ выводитъ изъ своей теоремы и изъ того, что наилучшее приближеніе E_n функций, удовлетворяющихъ условію Дини-Липшица, менѣе, чѣмъ $\varepsilon_n \log(n+1)$, гдѣ пред. $\varepsilon_n = 0$, что эти функции разлагаются въ сходящіеся тригонометрическіе ряды. Мы можемъ, слѣдовательно, также утверждать на основаніи неравенствъ (97) и (79), что *всякая функция, удовлетворяющая условію Дини-Липшица, разлагается въ сходящийся рядъ тригонометрическихъ многочленовъ.* Замѣтимъ кромѣ того, что, вслѣдствіе замѣчанія, заканчивающаго § 63, *функция, удовлетворяющая обобщенному условію Дини-Липшица, разлагается въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ, который можно сдѣлать сходящимся простой группировкой членовъ.*

2) Теорема (71) показываетъ намъ, что, если, вообще, порядокъ убыванія E_n равенъ I_n , тѣмъ не менѣе онъ всегда опредѣляетъ порядокъ E_n , съ точностью до множителя $\log(n+1)$. Укажемъ, напримѣръ, верхнюю и нижнюю границу для $E_{2n} |x|$ въ промежуткѣ $-1, +1$. Для этого, раскладываемъ $|x|$ въ строку тригонометрическихъ многочленовъ. Применяя формулы (94), находимъ

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos \theta| d\theta = \frac{2}{\pi}, \quad A_{2k+1} = 0,$$

$$A_{2k} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\cos \theta| \cos 2k\theta d\theta = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \cos 2k\theta d\theta =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(2k+1)\theta + \cos(2k-1)\theta] d\theta = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)(2k+1)}.$$

Слѣдовательно,

$$|x| = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{T_2}{1 \cdot 3} - \frac{T_4}{3 \cdot 5} + \frac{T_6}{5 \cdot 7} - \dots \right]; \quad (98)$$

поэтому

$$I_{2n} = \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} + \dots \right] = \frac{2}{\pi(2n+1)}. \quad (99)$$

Такимъ образомъ, на основаніи теоремы (71),

$$\frac{k_1}{(2n+1)\log(2n+1)} < E_{2n} < \frac{2}{\pi(2n+1)}.$$

Первая часть этого неравенства ¹⁾, разумѣется, несравненно менѣе удовлетворительна, чѣмъ результаты, найденные нами ранѣе; но вторая

¹⁾ Это неравенство имѣется и въ упомянутой работѣ Джексона, который, независимо отъ меня, получилъ его аналогичнымъ образомъ.

часть неравенства дает довольно точную верхнюю границу $E_{2n} < \frac{0,637}{2n}$. Другими словами, приближение $|x|$, которое дает столь простое разложение (98) лишь незначительно хуже наилучшего приближения; а именно, припоминая, неравенства (59), имеем (по крайней мере, для весьма больших значений n)

$$1,99 < \frac{I_{2n}|x|}{E_{2n}|x|} < 2,36. \quad (100)$$

73. Теорема. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица степени $\alpha < 1$, то

$$E_n[f(x)] < \frac{k}{n^\alpha}, \quad (101)$$

где k независимый от n коэффициент; при этом, многочлены степени n , осуществляющие приближение $\frac{k}{n^\alpha}$, получаются посредством применения способа суммирования Фейера к разложению размаатриваемой функции в ряд тригонометрических многочленов. (То же самое *mutatis mutandis* имеет место и для тригонометрических сумм).

В самом деле, полагая $x = \cos \theta$ и обозначая через

$$S_n = A_0 + A_1 T_1(x) + \dots + A_n T_n(x) = A_0 + A_1 \cos \theta + \dots + A_n \cos n\theta$$

сумму $(n+1)$ члена разложения $f(x) = f(\cos \theta) = \varphi(\theta)$, мы получим приближенную сумму Фейера $(n-1)$ -го порядка

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n};$$

и, при этом, остаток R_n равен ¹⁾

$$R_n = \sigma_n - \varphi(\theta) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 [\varphi(\theta + 2t) + \varphi(\theta - 2t) - 2\varphi(\theta)] dt.$$

По предположению,

$$|f(x+h) - f(x)| < Nh^\alpha,$$

где N данное число; а следовательно и

$$|\varphi(\theta + 2t) - \varphi(\theta)| < N \cdot (2t)^\alpha = Mt^\alpha.$$

Поэтому,

¹⁾ Lebesgue. Leçons sur les séries trigonométriques (стр. 94).

$$|R_n| < \frac{2M}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^2 t^2 dt < \\ < \frac{2M}{n\pi} \left[\int_0^{\frac{1}{n}} n^2 t^2 dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2 dt}{\sin^2 t} \right] < \frac{2M}{\pi n^2} \left[\frac{1}{1-\alpha} + \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \right].$$

Такимъ образомъ, при $\alpha < 1$,

$$|f(x) - \sigma_n| < \frac{k}{n^\alpha},$$

гдѣ k независимый отъ n коэффициентъ, ч. и. т. д.

Примѣчаніе. Изъ доказательства видно, что, выводъ не нарушится, если даже N не постоянная величина, а возрастаетъ безконечно при $x = \pm 1$. Съ тѣмъ обстоятельствомъ, что одна и также особенность функцій внутри отрѣзка и на концахъ его не одинаково вліяетъ на приближеніе функцій при помощи многочленовъ, мы уже встрѣчались во второй главѣ. Не останавливаясь на подробномъ изслѣдованіи этого вопроса, укажемъ лишь одинъ простой примѣръ, на которомъ отчетливо видна сущность этой разницы: изъ доказанной теоремы вытекаетъ, что $E_{2n}|x|^\alpha < \frac{k}{(2n)^\alpha}$, гдѣ $\alpha < 1$; при этомъ, ясно, что многочленъ степени $2n$, наименѣе уклоняющійся отъ $|x|^\alpha$, не содержитъ нечетныхъ степеней x ; поэтому, полагая $x^2 = y$, мы видимъ, что наименьшее уклоненіе $E'_n\left(y^{\frac{\alpha}{2}}\right)$ на отрѣзкѣ 01 также удовлетворяетъ неравенству $E'_n\left(y^{\frac{\alpha}{2}}\right) = E_{2n}|x|^\alpha < \frac{k}{(2n)^\alpha}$. Другими словами, условіе Липшица степени α внутри отрѣзка имѣетъ существенно тоже значеніе для наименьшаго уклоненія, что условіе Липшица степени $\frac{\alpha}{2}$ въ концахъ отрѣзка.

74. Результаты Джексона ¹⁾. Нетрудно замѣтить, что остатокъ, получаемый при примѣненіи способа Фейера въ случаѣ, когда $\alpha = 1$, не подчиняется закону, выраженному предшествующей теоремой: въ этомъ случаѣ, можно утверждать только, что

$$R_n < \frac{k \log n}{n}.$$

¹⁾ *D. Jackson. Uber die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen.* Этотъ §, разумѣется, не могъ войти въ первоначальную редакцію моего сочиненія, какъ и всѣ ссылки на работу Джексона.

Джексонъ, независимо отъ меня, и при помощи другого метода, получилъ болѣе законченный результатъ: а именно, онъ показалъ, что при $\alpha = 1$,

$$E_n[f(x)] < \frac{k}{n}. \quad (101^{\text{bis}})$$

Кромѣ того, онъ доказалъ еще, что, если $f(x)$ имѣетъ производную p -аго порядка, удовлетворяющую условию Липшица степени $\alpha \leq 1$, то

$$E_n[f(x)] < \frac{k}{n^{p+\alpha}}, \quad (102)$$

гдѣ k , какъ всегда, независимая отъ n постоянная.

Слѣдствіе. Если функция $f(x)$ удовлетворяетъ условию Липшица степени ($\alpha \leq 1$), то

$$I_n[f(x)] < \frac{k_2 \log n}{n^\alpha}. \quad (103)$$

Это вытекаетъ изъ неравенствъ (101) и (101^{bis}), благодаря неравенству (97).

Примѣчаніе. Этотъ результатъ, для тригонометрическихъ суммъ, былъ полученъ непосредственно Лебегомъ ¹⁾, который показалъ также что верхняя граница $I_n[f(x)]$ не можетъ быть понижена, если о функции $f(x)$ ничего болѣе не извѣстно. Отсюда слѣдуетъ, что и верхняя граница $E_n[f(x)]$, найденная Джексономъ и мной, также не можетъ быть понижена, если взять неопредѣленную функцию, удовлетворяющую данному условию Липшица. Если принять неравенство (102), то изъ него точно также можно получить, что

$$I_n[f(x)] < \frac{k \log n}{n^{p+\alpha}} \quad (103^{\text{bis}})$$

для функций, имѣющихъ p -ую производную, удовлетворяющую условию Липшица степени α .

Но я воспроизведу съ небольшимъ упрощеніемъ свой первоначальный выводъ неравенства (103^{bis}), который представляетъ, быть можетъ, нѣкоторый принципиальный интересъ.

75. Доказательство неравенства (103^{bis}). Замѣтимъ прежде всего, что условіе, что $\frac{d^p f(x)}{dx^p}$ удовлетворяетъ условию Липшица степени α , влечетъ за собой существованіе условія Липшица степени α для $\frac{d^p \varphi(\theta)}{d\theta^p}$.

¹⁾ *Lebesgue*. Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz. *Bullet. de la Société Math. de France*. 1910.

Разсмотримъ сперва четныя значенія $p = 2\mu$. Пусть

$$q(\theta) = f(\cos \theta) = A_0 + A_1 \cos \theta + \dots + A_n \cos n\theta + \dots;$$

въ такомъ случаѣ,

$$\frac{d^p q(\theta)}{d\theta^p} = \pm [A_1 \cos \theta + \dots + n^p A_n \cos n\theta + \dots].$$

Полагая

$$Q_n = (n+1)^p A_{n+1} \cos(n+1)\theta + (n+2)^p A_{n+2} \cos(n+2)\theta + \dots,$$

мы заключаемъ изъ неравенства (103), что

$$|Q_n| < \frac{k \log n}{n^\alpha}.$$

А потому, на основаніи извѣстной леммы Абеля,

$$|R_n| = |A_{n+1} \cos(n+1)\theta + A_{n+2} \cos(n+2)\theta + \dots| < \frac{|Q_n|}{(n+1)^p} < \frac{k \log n}{n^{p+\alpha}}.$$

Для разсмотрѣнія случая, когда $p = 2\mu - 1$ нечетное число, выведемъ предварительно слѣдующее неравенство, справедливое для всякаго значенія $s > 1$: если

$$|R_n| = |A_{n+1} \cos(n+1)\theta + A_{n+2} \cos(n+2)\theta + \dots| < \frac{k \log n}{n^s}, \quad (104)$$

то

$$|R'_n| = |(n+1)A_{n+1} \sin(n+1)\theta + (n+2)A_{n+2} \sin(n+2)\theta + \dots| < \frac{2^{s+1}k \cdot \log n}{(2^{s-1}-1)^2 n^{s-1}}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, изъ (104) вытекаетъ, что

$$|A_{n+1} \cos(n+1)\theta + \dots + A_{2n} \cos 2n\theta| < \frac{2k \log n}{n^s},$$

а потому, вслѣдствіе § 10,

$$|(n+1)A_{n+1} \sin(n+1)\theta + \dots + 2n A_{2n} \sin 2n\theta| < \frac{4k \log n}{n^{s-1}}.$$

Слѣдовательно,

$$\begin{aligned} |R'_n| &< \frac{4k}{n^{s-1}} \left[\log n + \frac{\log 2n}{2^{s-1}} + \frac{\log 4n}{4^{s-1}} + \dots \right] = \frac{4k \log n}{n^{s-1}} \cdot \frac{2^{s-1}}{2^{s-1}-1} + \\ &+ \frac{4k \log 2}{n^{s-1}} \cdot \frac{2^{s-1}}{(2^{s-1}-1)^2} < \frac{2^{s+1}k \cdot \log n}{(2^{s-1}-1)^2 n^{s-1}}. \end{aligned} \quad (105)$$

Само собой понятно, что тоже самое неравенство мы получимъ и въ томъ случаѣ, когда R_n состоитъ изъ синусовъ.

Послѣ этого, беремъ функцію

$$\Phi(\theta) = \int_0^\theta \varphi(\theta) d\theta$$

гдѣ, по прежнему, $\varphi(\theta) = f(\cos \theta)$.

Въ такомъ случаѣ, остатокъ R_n тригонометрическаго разложения функціи $\Phi(\theta)$, имѣющей производную четнаго порядка $p+1 = 2\mu$, удовлетворяетъ неравенству

$$|R_n| < \frac{k \log n}{n^{p+1+\alpha}},$$

а слѣдовательно, остатокъ $|R'_n|$ въ разложеніи $\varphi(\theta)$, вслѣдствіе (105), будетъ менше

$$\frac{2^{p+2} k \log n}{(2^p - 1)^2 \cdot n^{p+\alpha}};$$

такимъ образомъ неравенство (103^{bis}) справедливо, для всякаго p .

Слѣдствія. а) Если функція $f(x)$ въ промежуткѣ $(-1, +1)$ имѣетъ производныя всѣхъ порядковъ, то ея разложение въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ равномерно сходится, такъ же какъ и ряды, получаемые отъ дифференцированія, какое угодно число разъ, рассматриваемаго разложения.

б) Если функція $f(x)$ имѣетъ производныя всѣхъ порядковъ въ промежуткѣ $(-1, +1)$, то

$$\text{пред.}_{n=\infty} n^p I_n [f(x)] = \text{пред.}_{n=\infty} n^p E_n [f(x)] = 0,$$

при всякомъ p (теорема 22).

76. Теорема ¹⁾. Если модуль аналитической функціи $f(x)$ меньше M внутри эллипса E , имѣющаго фокусами точки -1 и $+1$ и полусумму осей равную $\frac{1}{\rho}$, то

$$E_n [f(x)] < I_n [f(x)] < \frac{2M\rho^{n+1}}{1-\rho}$$

на отрезкѣ $(-1, +1)$.

Въ самомъ дѣлѣ, согласно формуламъ (94),

$$A_p = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\cos \theta) \cdot \cos p\theta d\theta,$$

или, полагая $z = e^{i\theta}$,

¹⁾ См. теорему 29.

$$A_p = \frac{1}{2\pi i} \int_C f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right) \cdot \frac{z^p + z^{-p}}{z} dz,$$

при чемъ послѣдній интеграль взять по окружности C радиуса равнаго единицѣ. Въ то время, какъ комплексная переменная x описываетъ эллипсъ E , комплексная переменная z описываетъ, либо окружность C_1 радиуса ρ , либо окружность C_2 радиуса $\frac{1}{\rho}$, такъ какъ

$$x = \cos \theta = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

Но $f(x)$, по предположенію, остается голоморфной внутри эллипса E ; поэтому $f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)$ также голоморфна между окружностями C_1 и C_2 . Слѣдовательно,

$$\left| \int_C f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right) z^{p-1} dz \right| = \left| \int_{C_1} f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right) z^{p-1} dz \right| < 2\pi M \rho^p$$

и

$$\left| \int_C f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right) \cdot \frac{dz}{z^{p+1}} \right| = \left| \int_{C_2} f\left(\frac{z^2+1}{2z}\right) \cdot \frac{dz}{z^{p+1}} \right| < 2\pi M \rho^p,$$

откуда

$$|A_p| < 2M \rho^p.$$

И, наконецъ,

$$I_n[f(x)] < [|A_{n+1}| + |A_{n+2}| + \dots] < \frac{2M \rho^{n+1}}{1-\rho},$$

ч. н. т. д.

Примѣчаніе. Въ предшествующей теоремѣ, такъ же какъ и въ условіяхъ теоремъ (22) и (29), наименьшее уклоненіе E_n можетъ быть замѣнено минимумомъ средней квадратичной ошибки δ_n .

77. Различныя слѣдствія и приложенія.

А) Если функція $f(x)$ въ промежуткѣ $(-1, +1)$ имѣетъ производную порядка k , полное измѣненіе (variation totale) которой ограничено (bornée), то

$$I_n[f(x)] < \frac{h'}{n^k},$$

гдѣ h' независима отъ n постоянная.

Въ самомъ дѣлѣ, согласно формулѣ (94),

$$A_p = \int_0^{2\pi} f(\cos \theta) \cdot \cos p\theta d\theta = \frac{1}{\pi \rho^k} \int_0^{2\pi} \frac{d^k f(\cos \theta)}{d\theta^k} \cos \left(p\theta - \frac{k\pi}{2} \right) d\theta,$$

а потому

$$|A_p| < \frac{h}{p^{k+1}},$$

гдѣ h независимый отъ p коэффициентъ; следовательно,

$$I_n [f(x)] < h \left[\frac{1}{(n+1)^{k+1}} + \frac{1}{(n+2)^{k+1}} + \dots \right] < \frac{h'}{n^k}$$

В) Если линия $y = f(x)$ имѣетъ одну или нѣсколько точекъ излома, а между точками излома угловой коэффициентъ касательной удовлетворяетъ какому нибудь условию Липшица, то

$$\frac{a}{n} < E_n [f(x)] < I_n [f(x)] < \frac{b}{n}, \quad (96^{\text{bis}})$$

идѣ a и b два независимыхъ отъ n числа.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть x_0 и x_1 будутъ абсциссы точекъ излома. Въ такомъ случаѣ,

$$f(x) = M|x-x_0| + N|x-x_1| + \varphi(x),$$

гдѣ M и N постоянные коэффициенты, а $\varphi(x)$ удовлетворяетъ условию Липшица на всемъ промежуткѣ. Поэтому

$$E_n [f(x)] < I_n [f(x)] < MI_n |x-x_0| + NI_n |x-x_1| + I_n [\varphi(x)] < \frac{b}{n}.$$

Съ другой стороны, ясно, что наименьшее уклоненіе E_n на всемъ отрѣзкѣ не меньше, чѣмъ наименьшее уклоненіе E'_n на части его, содержащей лишь одну точку излома, следовательно,

$$E_n [f(x)] > E'_n [f(x)] > ME'_n |x-x_0| - E_n [\varphi(x)] > \frac{a}{n}.$$

С) Если

$$\left| \sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \cos p\theta \right| < \frac{\lambda_n}{n^\alpha},$$

при чемъ

$$\frac{\lambda_n}{n^\varepsilon} \geq \frac{\lambda_{n+1}}{(n+1)^\varepsilon},$$

идѣ $\varepsilon < \alpha$, то

$$\left| \sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \sin p\theta \right| < \frac{2^{2+\alpha}}{2^\alpha - 2^\varepsilon} \cdot \frac{\lambda_n}{n^\alpha}.$$

Въ самомъ дѣлѣ, пригнѣняя лемму Абеля, замѣчаемъ, что

$$\left| \sum_{p=n}^{p=\infty} \frac{A_p}{p} \cos p\theta \right| < \frac{\lambda_n}{n^{1+\alpha}}.$$

Въ такомъ случаѣ,

$$\left| \sum_{p=n}^{p=2n-1} \frac{A_p}{p} \cos p\theta \right| < \frac{2\lambda_n}{n^{1+\alpha}},$$

а потому, вслѣдствіе § 10,

$$\left| \sum_{p=n}^{p=2n-1} A_p \sin p\theta \right| < \frac{4\lambda_n}{n^\alpha};$$

откуда

$$\left| \sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \sin p\theta \right| < \frac{4}{n^\alpha} \left[\lambda_n + \frac{\lambda_{2n}}{2^\alpha} + \frac{\lambda_{4n}}{4^\alpha} + \dots \right] < \frac{4\lambda_n}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{1-2^{\epsilon-\alpha}} = \frac{2^{2+\alpha}}{2^\alpha-2^\epsilon} \cdot \frac{\lambda_n}{n^\alpha}.$$

Напримѣръ, если $\lambda_n = \log n$, или $\lambda_n = 1$, то $\epsilon = 0$, (по крайней мѣрѣ, для весьма большихъ значеній n), такъ что изъ неравенства

$$\left| \sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \cos p\theta \right| < \frac{\log n}{n}$$

вытекаетъ

$$\left| \sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \sin p\theta \right| < \frac{8 \log n}{n};$$

а изъ

$$\left| \sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \cos p\theta \right| < \frac{1}{n}$$

вытекаетъ

$$\left| \sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \sin p\theta \right| < \frac{8}{n}.$$

Само собой понятно, что \cos и \sin могутъ быть взаимно перемѣнены. Этотъ результатъ заслуживаетъ вниманія потому, что, вообще, изъ сходимости ряда \cos нельзя вывести сходимости ряда \sin , и наоборотъ. Напримѣръ, сумма

$$\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\sin px}{p} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$$

конечна, а между тѣмъ, не только $\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos px}{p}$, но $\sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{\cos px}{p \log p}$ возрастаетъ бесконечно.

Относительно медленно сходящихся рядовъ, при помощи предыдущаго разсужденія, не трудно показать, что, если ¹⁾

$$\left| \sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \cos p\theta \right| < \varepsilon_n,$$

гдѣ числа ε_n идутъ не возрастая, то

$$\left| \sum_{p=n}^{p=\infty} A_p \sin p\theta \right| < 4(\varepsilon_n + \varepsilon_{2n} + \dots);$$

такимъ образомъ, только въ томъ случаѣ изъ сходимости ряды косинусовъ можно вывести сходимость ряда синусовъ, когда рядъ $\varepsilon_n + \varepsilon_{2n} + \dots$ сходится, т. е., напримѣръ если $\varepsilon_n < \frac{1}{(\log n)^{1+\alpha}}$.

Упражненіе. Показать, что рядъ $\sum_{n=3}^{n=\infty} \frac{(\log \log n)^\alpha}{n} \sin nx$, при $\alpha > 0$, не можетъ быть сходящимся для всѣхъ значеній x .

¹⁾ Для опредѣленности, мы разсматриваемъ все время всѣ значенія θ ; но аналогичныя неравенства могутъ быть даны если вмѣсто всѣхъ значеній θ брать въ данномъ неравенствѣ $a \leq \theta \leq b$, а въ томъ, которое изъ него вытекаетъ, предполагать $a < a' \leq \theta \leq b' < b$.

Г л а в а VII.

О некоторых свойствах функций двух переменных.

78. Введение. Въ настоящее время еще весьма мало изученъ вопросъ о томъ, какова зависимость между свойствами функций $f(x, y)$, рассматриваемой, какъ функция двухъ переменныхъ и свойствами той же функции, рассматриваемой, какъ функция одного только x и одного только y .

Некоторые простые примѣры, вродѣ функций $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, дали поводъ преувеличить трудность этого вопроса. Дѣйствительно, функция z вещественной переменной x голоморфна при всякомъ определенномъ значеніи вещественнаго параметра y , и точно также функция z голоморфна относительно y при всякомъ x , а между тѣмъ таже функция z , рассматриваемая, какъ функция x и y одновременно, при $x = y = 0$, не только не голоморфна, но не стремится ни къ какому предѣлу.

Пользуясь соотношеніями между приближеніемъ функции посредствомъ многочленовъ или тригонометрическихъ суммъ и ея дифференціальной природой, можно однако указать рядъ теоремъ, которыя во многихъ случаяхъ позволяютъ свести изслѣдованіе функции двухъ (или n) переменныхъ къ изслѣдованію двухъ (или n) функций одной переменной.

79. Теорема. Пусть

$$f(x, y) = f(\cos u, \cos v) = \sum_{p=0, q=0}^{p=\infty, q=\infty} A_{p, q} \cos pu \cos qv,$$

и ряды

$$\frac{\partial^k f}{\partial u^k} = \sum_{p=0, q=0}^{p=\infty, q=\infty} p^k A_{p, q} \cos \left(pu + \frac{k\pi}{2} \right) \cos qv,$$

$$\frac{\partial^k f}{\partial v^k} = \sum_{p=0, q=0}^{p=\infty, q=\infty} q^k A_{p, q} \cos pu \cos \left(pv + \frac{k\pi}{2} \right)$$

абсолютно сходятся; въ такомъ случаѣ все частныя производныя порядка $\frac{\partial^k f}{\partial u^i \partial v^{k-i}}$ конечны и непрерывны, и ряды

$$\frac{\partial^k f}{\partial u^l \partial v^{k-l}} = \sum_{p=0, q=0}^{p=\infty, q=\infty} p^l q^{k-l} A_{pq} \cos\left(pu + \frac{l\pi}{2}\right) \cos\left(qv + \frac{(k-l)\pi}{2}\right)$$

абсолютно сходится,

Въ самомъ дѣлѣ, если

$$\sum_{p=0, q=0}^{p=\infty, q=\infty} p^k |A_{p,q}| < M, \quad \sum_{p=0, q=0}^{p=\infty, q=\infty} q^k |A_{p,q}| < M,$$

то

$$\sum_{p=0, q=0}^{p=\infty, q=\infty} p^l q^{k-l} |A_{p,q}| < 2M,$$

такъ какъ

$$p^l q^{k-l} < p^k + q^k.$$

80. Теорема. Если периодическая относительно (u, v) функция $\varphi(u, v)$, имѣетъ вторыя частныя производныя $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}$ и $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}$ квадратично интегрируемая, т. е.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\right)^2 du dv < M, \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right)^2 dudv < M,$$

то она имѣетъ также квадратично интегрируемую частную производную $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}$, а именно,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}\right)^2 dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} dudv < M.$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$\begin{aligned} A_{p,q} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(u, v) \cos pu \cos qv du dv, \\ B_{p,q} &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(u, v) \cos pu \cos qv dudv, \end{aligned} \tag{106}$$

и т. д., получаемъ

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\right)^2 dudv &= \pi^2 \sum_{p=\infty, q=\infty}^{p=\infty, q=\infty} p^4 [A_{p,q}^2 + B_{p,q}^2 + \dots] < M \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\right)^2 dudv &= \pi^2 \sum_{p=0, q=0}^{p=\infty, q=\infty} q^4 [A_{p,q}^2 + B_{p,q}^2 + \dots] < M. \end{aligned}$$

На основаніи теоремы Рисса, для того, чтобы $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}$ была квадратично интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы рядъ

$$S = \pi^2 \sum_{p=0, q=0}^{p=\infty, q=\infty} p^2 q^2 [A_{p,q}^2 + B_{p,q}^2 + \dots]$$

былъ сходящимся, и тогда

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right)^2 dudv = S.$$

Но

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} dudv < M.$$

81. Теорема. Если периодическая функция $\varphi(u, v)$, рассматриваемая, какъ функция u , имѣетъ частную производную $\frac{\partial^l \varphi}{\partial u^l}$, удовлетворяющую определенному условию Липшица степени α , и точно также, рассматриваемая, какъ функция v , имѣетъ производную $\frac{\partial^l \varphi}{\partial v^l}$, удовлетворяющую условию Липшица степени α , то функция $\varphi(u, v)$ имѣетъ все частныя производныя порядка l , и эти послѣднія также удовлетворяютъ условіямъ Липшица какой угодно степени $\alpha_1 < \alpha$ (относительно обѣихъ переменныхъ).

Пусть

$$\varphi(u, v) = \sum_{p=0, q=0}^{p=\infty, q=\infty} A_{p,q} \cos p u \cos q v,$$

гдѣ, для сокращенія письма, мы записываемъ только членъ, составленный изъ косинусовъ.

Припоминая значеніе коэффициентовъ $A_{p,q}$ (106), находимъ

$$S_n = \sum_{p=0, q=0}^{p=n, q=n} A_{p,q} \cos p u \cos q v = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \cdot \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} \cdot [\varphi(u+2t, v+2\theta) + \\ + \varphi(u-2t, v+2\theta) + \varphi(u+2t, v-2\theta) + \varphi(u-2t, v-2\theta)] dt d\theta.$$

Откуда

$$R_n = \varphi(u, v) - S_n = \frac{-1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \cdot \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} \left\{ [\varphi(u+2t, v+2\theta) + \right. \\ + \varphi(u-2t, v+2\theta) - 2\varphi(u, v+2\theta)] + [\varphi(u+2t, v-2\theta) + \\ + \varphi(u-2t, v-2\theta) - 2\varphi(u, v-2\theta)] + 2[\varphi(u, v+2\theta) + \\ \left. + \varphi(u, v-2\theta) - 2\varphi(u, v)] \right\} dudv. \quad (107)$$

Но

$$\varphi(u, v+2\theta) = \sum_{p=0}^{p=\infty} a_p(v+2\theta)\cos pu,$$

$$\varphi(u, v-2\theta) = \sum_{p=0}^{p=\infty} a_p(v-2\theta)\cos pu, \quad \varphi(u, v) = \sum_{p=0}^{p=\infty} b_p(u)\cos pv,$$

гдѣ

$$a_p(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(u, z)\cos pu \, du, \quad b_p(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(u, v)\cos pv \, dv;$$

поэтому

$$\begin{aligned} \varrho_n(u, v+2\theta) &= \sum_{p=n+1}^{p=\infty} a_p(v+2\theta)\cos pu = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} [\varphi(u+2t, v+2\theta) + \\ &+ \varphi(u-2t, v+2\theta) - 2\varphi(u, v+2\theta)] dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varrho_n(u, v-2\theta) &= \sum_{p=n+1}^{p=\infty} a_p(v-2\theta)\cos pu = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} [\varphi(u+2t, v-2\theta) + \\ &+ \varphi(u-2t, v-2\theta) - 2\varphi(u, v-2\theta)] dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varrho'_n(u, v) &= \sum_{p=n+1}^{p=\infty} b_p(u)\cos pv = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin \theta} [\varphi(u, v+2\theta) + \\ &+ \varphi(u, v-2\theta) - 2\varphi(u, v)] d\theta. \end{aligned}$$

Слѣдовательно, на основаніи неравенства (103^{bis}),

$$|\varrho_n(u, v+2\theta)| < \frac{k \log n}{n^{l+\alpha}}, \quad |\varrho_n(u, v-2\theta)| < \frac{k \log n}{n^{l+\alpha}},$$

$$|\varrho'_n(u, v)| < \frac{k \log n}{n^{l+\alpha}}.$$

А потому

$$|R_n| < \frac{4k \log n}{\pi n^{l+\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \right| dt.$$

Послѣдній интеграль вычисленъ Фейеромъ ¹⁾; но намъ достаточно замѣтить, что

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \right| dt < \int_0^{\frac{1}{2n+1}} (2n+1) dt + \int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} < 1 + \frac{\pi}{2} \log(2n+1).$$

¹⁾ См. выноски къ § 71.

Слѣдовательно, (для достаточно больших n)

$$|R_n| < \frac{2k \log^2 n}{n^{l+\alpha}}$$

и при всякомъ $\alpha_1 < \alpha$, можно выбрать k_1 такъ, чтобъ

$$|R_n| < \frac{k_1}{n^{l+\alpha_1} (\log n)^2}.$$

Но въ такомъ случаѣ, примѣняя результаты 2-й главы (§§ 15—17), убеждаемся въ существованіи всѣхъ частныхъ производныхъ $\frac{\partial^l \varphi}{\partial u^i \partial v^{l-i}}$ и въ томъ, что онѣ удовлетворяютъ условію Липшица степени α_1 . Ч. и. т. д.

Примѣчаніе. Въ частности, если функція $\varphi(u, v)$ удовлетворяетъ условію Липшица степени α по отношенію къ каждой переменнй въ отдѣльности, то она удовлетворяетъ также условію Липшица степени α_1 относительно обѣихъ переменныхъ.

82. Слѣдствія. А. Если функція $f(x, y)$ (не періодическая), разсматриваемая, какъ функція одного только x и одного только y , имѣетъ внутри некотораго контура C производную порядка l , удовлетворяющую условію Липшица степени α , то функція $f(x, y)$ имѣетъ всѣ частныя производныя порядка l , и эти послѣднія, во всякой области S внутри контура C , удовлетворяютъ условіямъ Липшица любой степени $\alpha_1 < \alpha$.

Въ самомъ дѣлѣ, всю область S можно помѣстить внутри нѣсколькихъ квадратовъ C_1 , стороны которыхъ не выходятъ изъ контура C . Для опредѣленности, положимъ, что прямыя, на которыхъ расположены стороны квадрата C_1 , имѣютъ уравненіями: $x = \pm 1, y = \pm 1$. Въ такомъ случаѣ, полагая $x = \cos u, y = \cos v$,

$$f(x, y) = f(\cos u, \cos v) = \varphi(u, v)$$

есть періодическая функція u, v , которая удовлетворяетъ условіямъ только что доказанной теоремы. А потому частныя производныя $\frac{\partial^l \varphi}{\partial u^i \partial v^{l-i}}$ существуютъ и удовлетворяютъ условіямъ Липшица степени α_1 .

Но

$$\frac{\partial^l f}{\partial x^i \partial y^{l-i}} = \sum_{h+k \leq l} A_{h,k} \frac{\partial^{h+k} \varphi}{\partial u^h \partial v^k},$$

гдѣ всѣ коэффициенты $A_{n,k}$ суть вполне опредѣленныя функции x, y , которыя голоморфны внутри квадрата C_1 , (на сторонахъ квадрата онѣ дѣлаются безконечными). Следовательно, внутри S всѣ частныя производныя $\frac{\partial^l f}{\partial x^i \partial y^{l-i}}$ существуютъ и удовлетворяютъ условію Липшица степени ϵ_1 .

В. Если функция $f(x, y)$ внутри контура S , не имѣющаго острыхъ угловъ ¹⁾ разматриваемая, какъ функция одного только x и одного только y , имѣетъ ограниченныя производныя каждаго порядка, то она имѣетъ также внутри области S ограниченныя частныя производныя любого порядка.

Изъ предыдущаго слѣдствія вытекаетъ непосредственно существованіе и ограниченность всѣхъ производныхъ внутри всякой области S_1 , расположенной внутри S . Чтобы показать, что производныя ограничены во всякой точкѣ M контура S , строимъ квадратъ C_1 , не выходящій изъ S и имѣющій одну изъ вершинъ въ точкѣ M . Для опредѣленности, можно предположить снова, что квадратъ C_1 составленъ прямыми $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. Разлагая функцию $f(x, y)$ въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ внутри C_1 , и отбрасывая члены степени выше n относительно x или относительно y находимъ, на основаніи формулъ (103^{bis}) и (107) что, для достаточно большихъ значеній n , ошибка

$$|R_n| < \frac{1}{n^p},$$

каково бы ни было число p . А потому наше утвержденіе есть прямое слѣдствіе изъ теоремы (22).

83. Теорема. Пусть $f(x, y)$ будетъ некоторая функция двухъ вещественныхъ переменныхъ (x, y) , данная внутри прямоугольника C_1 , образованнаго прямыми $x = \pm h$, $y = \pm k$. Если, при всякомъ вещественномъ x_0 ($-h \leq x_0 \leq h$), функция $f(x_0, y)$, голоморфна относительно y , и $|f(x_0, y)| < M$, когда комплексная переменная y находится внутри эллипса E , имѣющаго фокусами $(-k, +k)$ и полуоси $\frac{k}{\rho}$; и, при всякомъ вещественномъ y_0 ($-k \leq y_0 \leq k$), функция $f(x, y_0)$ голоморфна относительно x , и $|f(x, y_0)| < M$, когда комплексная переменная x находится внутри эллипса E_1 , имѣющаго фокусами $(-h, +h)$

¹⁾ Изъ доказательства будетъ видно, что это условіе вводится для того, чтобы внутри S можно было помѣстить квадратъ, имѣющій вершину въ любой точкѣ контура S ; но, замѣнивъ прямоугольныя координаты косоугольными, можно квадратъ замѣнить ромбомъ; такимъ образомъ существенно только, чтобы контуръ S не имѣлъ точекъ возврата.

и полуэллипсу осей $\frac{h}{\rho_1}$: то функция двух переменных $f(x, y)$ аналитична, и $|f(x, y)| < \frac{4M}{(1-\lambda)^2}$, ($\lambda < 1$), в то время как комплексная переменная y находится внутри эллипса E' гомофокального с E и имеющего полуэллипсом осей $\frac{h}{R}$, а комплексная переменная x находится внутри эллипса E_1' гомофокального с E_1 и имеющего полуэллипсу осей $\frac{h}{R_1}$, причём

$$\frac{\log \lambda R_1}{\log \rho_1} + \frac{\log \lambda R}{\log \rho} = 1.$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая $x = h \cos u$, $y = h \cos v$, и раскладывая функцию

$$f(x, y) = \sum_{p=0, q=0}^{p=\infty, q=\infty} A_{p, q} T_p\left(\frac{x}{h}\right) T_q\left(\frac{y}{h}\right)$$

въ рядъ тригонометрическихъ многочленовъ, мы выводимъ изъ формулъ (106), при помощи рассуждений § 76, что

$$|A_{p, q}| < 4M \rho_1^p, \quad |A_{p, q}| < 4M \rho^q.$$

А потому, на основаніи неравенства (9), заключаемъ, что, если y находится внутри эллипса E' , а x находится внутри эллипса E_1' , то

$$|f(x, y)| < \sum_{p=0, q=0}^{p=\infty, q=\infty} \frac{4M \rho_1^{\frac{ap}{a+b}} \rho^{\frac{bq}{a+b}}}{R_1^p R^q},$$

каковы бы ни были положительныя числа a и b .

Полагая

$$\frac{\rho_1^{\frac{a}{a+b}}}{R_1} = \frac{\rho^{\frac{b}{a+b}}}{R} = \lambda,$$

получимъ

$$|f(x, y)| < 4M \sum_{p=0, q=0}^{p=\infty, q=\infty} \lambda^p \lambda^q = \frac{4M}{(1-\lambda)^2};$$

при этомъ, очевидно,

$$\frac{a}{a+b} = \frac{\log \lambda R_1}{\log \rho_1}, \quad \frac{b}{a+b} = \frac{\log \lambda R}{\log \rho},$$

откуда

$$\frac{\log \lambda R_1}{\log \rho_1} + \frac{\log \lambda R}{\log \rho} = 1. \tag{108}$$

Слѣдствіе. Если $\varrho = \varrho_1$ то

$$\lambda^2 = \frac{\varrho}{RR_1}, \quad (108^{bis})$$

это вытекает из формулы (108), въ которой полагаемъ $\varrho = \varrho_1$.

84. Примѣненіе къ уравненіямъ съ частными производными. Результаты предшествующихъ §§ находятся въ тѣсной связи съ теоріей уравненій съ частными производными, и было бы интересно вывести изъ нихъ систематически свойства уравненій эллиптическаго типа. Я ограничусь только двумя замѣчаніями.

1) Уравненіе эллиптическаго типа

$$Ar + 2Bs + Ct = 0 \quad (AC - B^2 > 0)$$

гдѣ A, B, C какія угодно функции x, y, z, p, q не имѣютъ иныхъ рѣшеній періодическихъ относительно x, y , обладающихъ конечными производными первыхъ двухъ порядковъ¹⁾, кромѣ постоянной величины.

Въ самомъ дѣлѣ, изъ теоремы (80) мы знаемъ, что

$$\iint s^2 dx dy = \iint r t dx dy = - \iint \frac{t(Ct + 2Bs)}{A} dx dy,$$

откуда

$$\iint \frac{As^2 + 2Bst + Ct^2}{A} dx dy = 0,$$

а потому

$$t = s = r = 0;$$

слѣдовательно, z есть постоянная величина.

2) Если производныя функции z , до порядка k включительно, удовлетворяютъ въ некоторой области S какому нибудь условію Лишница, и кромѣ того, функция z удовлетворяетъ двумъ уравненіямъ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{k+1} z}{\partial x^{k+1}} &= f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k z}{\partial y^k}\right), \\ \frac{\partial^{k+1} z}{\partial y^{k+1}} &= \varphi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k z}{\partial y^k}\right), \end{aligned} \quad (109)$$

гдѣ f и φ имѣютъ конечныя производныя всѣхъ порядковъ при конечныхъ значеніяхъ переменныхъ, то функция z имѣетъ также конечныя производныя всѣхъ порядковъ во всякой области S_1 внутри S .

¹⁾ Это вытекаетъ также изъ обобщенной теоремы Лувилля, указанной мной въ Comptes Rendus, 10-го октября 1910 г.

Дѣйствительно, изъ уравненій (109) выводимъ непосредственно, что $\frac{\partial^{k+1}z}{\partial x^{k+1}}$ и $\frac{\partial^{k+1}z}{\partial y^{k+1}}$ существуютъ и удовлетворяютъ условію Липшица. Поэтому, на основаніи слѣдствія (А) § 82, тѣмъ же свойствомъ обладаютъ всѣ производныя порядка $(k+1)$ во всякой области S_1' внутри S . Дифференцируя первое уравненіе относительно x , а второе относительно y , мы можемъ тоже разсужденіе примѣнить къ производнымъ $(k+2)$ -го порядка; послѣдовательное дифференцированіе, оказывающееся возможнымъ, приводитъ такимъ образомъ къ доказательству высказаннаго утвержденія.

Таблица значений функций:

$$F(v) = 2v \left[\frac{1}{2v+1} - \frac{1}{2v+3} + \frac{1}{2v+5} - \dots \right] \quad (\text{с точностью до } 0,00055)$$

$$F'(v) = \frac{2}{(2v+1)^2} - \frac{6}{(2v+3)^2} + \frac{10}{(2v+5)^2} - \dots \quad (\text{с точностью до } 0,001).$$

v	$F(v)$	v	$F(v)$	v	$F(v)$	v	$F(v)$
0	0,000	0,45	0,332	1,2	0,445	2,1	0,477
0,05	0,070	0,5	0,347	1,3	0,451	2,2	0,478
0,1	0,127	0,55	0,360	1,4	0,456	2,3	0,480
0,15	0,173	0,6	0,371	1,5	0,460	2,4	0,481
0,2	0,212	0,7	0,391	1,6	0,464	2,5	0,483
0,25	0,244	0,8	0,406	1,7	0,467	3	0,488
0,3	0,271	0,9	0,419	1,8	0,470	4	0,493
0,35	0,294	1	0,429	1,9	0,473	5	0,495
0,4	0,314	1,1	0,438	2	0,475	6	0,497

v	$F'(v)$	v	$F'(v)$
0	1,571	0,46	0,314
0,3	0,502	0,48	0,297
0,32	0,471	0,5	0,282
0,34	0,443	0,52	0,268
0,36	0,417	0,54	0,254
0,38	0,393	0,56	0,241
0,4	0,371	0,58	0,230
0,42	0,350	0,6	0,219
0,44	0,331	1	0,093

ПОПРАВКА.

Доказательство неравенства (54) на стр. 126-й, начиная отъ словъ «Полученный результатъ можно еще улучшить» (стр. 125), должно быть измѣнено слѣдующимъ образомъ:

Сохраняя значеніе $B = F\left(\frac{1}{2}\right) = 0,34657\dots$, и полагая $a = 0,047$, замѣчаемъ, что функція $\Phi(v)$, при измѣненіи v отъ 0 до 0,42, возрастаетъ. Дѣйствительно, функція $\Phi(v)$ не можетъ имѣть больше одного максимума въ промежуткѣ $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, такъ какъ абсолютное значеніе разности $|x| - Q_2(x)$ имѣетъ въ промежуткѣ $\left(\frac{\pi}{4n}, 1\right)$ не менѣе n максимумовъ; поэтому достаточно замѣтить, что, при $v = 0,42$,

$$\frac{\Phi'(v)}{\Phi(v)} = \frac{F'(v) + \frac{2av}{\left(\frac{1}{4} - v^2\right)^2}}{F(v) - B + \frac{1}{\frac{1}{4} - v^2}} - \pi \operatorname{tg} \pi v > \frac{7,637}{0,615} - \pi \operatorname{tg} 75^{\circ} 36' > 0,18 > 0.$$

Но, $F'(v) < B$, при $v < \frac{1}{2}$; слѣдовательно, при $v < \frac{1}{2}$,

$$\Phi(v) < \frac{a \cos \pi v}{\frac{1}{4} - v^2} < \frac{a \cos \frac{42\pi}{100}}{\frac{1}{4} - 0,1764} < 3,38a = 3,38 \cdot 0,047 < 0,16.$$

А потому

$$E_{2n} < \frac{0,32}{2n}. \quad (54)$$

ОПЕЧАТКИ.

Стран.	Строка.	Напечатано:	Вместо:
50	3 снизу	трехъ	двухъ
53	9 сверху	$P_n(x)$	$ P_n(x) $
64	последнія четыре строки напечатаны курсивомъ вмѣсто обыкновеннаго прифта		
76	7 снизу	45	77
77	1	Legons	Leçons
79	9	<	>
—	4	функція	функціи
83	7 сверху	заказана	доказана
93	20	F''_{x^2}	F''_{x^2}
120	4	$z^{v+\frac{3}{4}}$	$z^{v+\frac{3}{2}}$
130	2	$i\left(\frac{1}{i+\lambda} + \frac{1}{i-\lambda}\right)$	$\left(\frac{1}{i+\lambda} + \frac{1}{i-\lambda}\right)$
—	3 снизу	4,537	4,637
—	2	неравенства	неравенства
132	2	$I(x)$	$T(x)$
142	14	$I(x)$	$T(x)$
147	24	60	59bis
148	4—5	или или	или
151	17	a_{l+n}^2	a_{2l+n}
152	22	$\lambda_n =$	$\lambda_n =$
153	13	62	63
154	12	многочленами $f_{n,p}(x)$	многочленами степени
—	13	степени	многочленъ $f_{n,p}(x)$
—	13	многочленъ степени	степени
158	12	$f - P_i$	$ f - P $
