SUR LES RECHERCHES RÉCENTES RELATIVES À LA MEILLEURE APPROXIMATION DES FONCTIONS CONTINUES PAR DES POLYNÔMES

PAR S. BERNSTEIN.

Vous connaissez bien le théorème classique de Weierstrass que toute fonction continue dans un intervalle donné peut être représentée avec une approximation aussi grande qu'on le veut par des polynômes de degré assez élevé.

Depuis que ce théorème a été découvert presque simultanément par Weierstrass et M. Runge plusieurs mathématiciens en ont donné des démonstrations différentes et ont construit divers polynômes approchés de degré n, $R_n(x)$, tels que le maximum de la différence

$$|f(x) - R_n(x)|$$

tend vers 0, lorsque n croît indéfiniment.

L'approximation fournie par diverses méthodes pour une même fonction et pour une même valeur du degré n n'est pas toujours la même, et il est naturel de rechercher ceux des polynômes approchés P_n pour lesquels le maximum de la différence considérée tend le plus rapidement vers zéro.

Les polynômes $P_n(x)$ jouissant de cette propriété ont reçu le nom de *polynômes d'approximation* et le maximum $E_n[f(x)]$ du module de la différence

$$|f(x) - P_n(x)|$$

le nom *de la meilleure approximation* de la fonction donnée dans l'intervalle considéré.

Je n'ai pas besoin de rappeler que, les polynômes d'approximation avaient été introduits dans la science, par Tchebischeff, encore avant la découverte de Weierstrass; mais ce n'est que ces dernières années qu'on a essayé d'étudier systématiquement la grandeur de la meilleure approximation $E_n[f(x)]$, d'une fonction donnée $f(x)$, pour des valeurs très grandes de n, et de compléter ainsi le théorème de Weierstrass qui exprime que $\lim_{n=\infty} E_n[f(x)] = 0$, quelle que soit la fonction continue $f(x)$. Le fait général qui se dégage de cette étude est l'existence d'une liaison des plus intimes entre les propriétés différentielles de la fonction $f(x)$ et la loi asymptotique de la décroissance des nombres positifs $E_n[f(x)]$. Voici, en effet, les résultats les plus essentiels qui sont obtenus dans cette voie et qui sont résumés dans le Tableau suivant :

Pour qu'une fonction de variable réelle dans un intervalle donné

	il est nécessaire que	Auteur	il est suffisant que	Auteur
1. Soit *analytique*	$\lim_{n=\infty} E_n[f(x)]\rho^n = 0$ $(\rho > 1)$	S. B.(1)	$\lim_{n=\infty} E_n[f(x)]\rho^n = 0$ $(\rho > 1)$	S.B.(1)
2. Admette des dérivées de tous les ordres	$\lim_{n=\infty} E_n[f(x)]n^p = 0$ (quel que soit p)	S. B.(1)	$\lim_{n=\infty} E_n[f(x)]n^p = 0$ (quel que soit p)	S.B.(1)
3. Admette une dérivée d'ordre p satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre α. (On posera $p=0$ lorsque c'est la fonction elle-même qui satisfait à la condition correspondante de Lipschitz.)	$E_n[f(x)]n^{p+\alpha} < k$ (k étant une constante déterminée)	D. Jackson(2)	$\sum_{n=1}^{n=\infty} E_n[f(x)]n^{p-1+\alpha}$ soit convergente	S.B.(1)
3 bis. Admette une dérivée d'ordre p continue	$E_n[f(x)]n^p < \epsilon_n$ (ϵ_n tendant vers zéro pour n infini)	D. Jackson(2)	$\sum_{n=1}^{n=\infty} E_n[f(x)]n^{p-1}$ soit convergente	S.B.(3)
4. Satisfasse à une condition de Dini-Lipschitz $\left(\lvert f(x+\delta)-f(x)\rvert < \frac{\epsilon}{\lvert\log\delta\rvert}\right.$ où ϵ tend vers zéro avec δ).	$E_n[f(x)]\log n < \epsilon_n$ (où ϵ_n tend vers zéro pour $n=\infty$).	H. Lebesgue(4)	$E_n[f(x)]\log n < \epsilon_n$ (où ϵ_n tend vers zéro pour $n=\infty$).	S.B.(3)

Avant de passer à l'analyse de ce Tableau, je voudrais dire quelques mots sur les méthodes par lesquelles ces résultats ont été obtenus. Pour établir les conditions nécessaires, on se sert de polynômes approchés convenables de la fonction considérée et l'on constate que si la fonction appartient à une des classes indiquées elle est effectivement susceptible de l'approximation correspondante. M. de la Vallée Poussin (5) a le premier suivi cette voie d'une façon systématique et c'est en se servant de ses procédés et en les perfectionnant qu'on a obtenu les résultats énoncés. Pour établir les conditions suffisantes, on procède de la façon suivante : s'il s'agit par exemple de la classe 3 bis, on démontre que lorsque la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} E_n[f(x)]n^{p-1}$ est convergente, la fonction considérée peut être développée en une série de polynômes dérivable p fois et admet par conséquent une dérivée continue d'ordre p.

La convergence uniforme des dérivées successives du développement construit résulte essentiellement de certaines propositions d'algèbre concernant les relations entre le module maximum d'un polynôme de degré donné et ceux de ses dérivées successives dans un intervalle déterminé. Ces études algébriques préliminaires forment une suite naturelle de la théorie de Tschebichev des polynômes qui s'écartent le moins de zéro, et en suivant cette voie, je me suis rencontré sur quelques points avec MM. A. et W. Markoff (6) (7), qui, il y a 20 ans, s'étaient occupés de questions semblables.

Passons à présent à l'analyse des résultats. Il suffit d'un coup d'œil superficiel sur le Tableau pour se rendre compte de l'exactitude de ce que je disais tout à l'heure, du lien étroit qui existe entre la meilleure approximation et les propriétés différentielles d'une fonction. Vous voyez d'abord qu'au point de vue réel, les fonctions analytiques laissent se définir comme des fonctions dont la meilleure approximation par des polynômes de degré donné décroît le plus rapidement possible; ce sont les fonctions qui entre toutes les fonctions continues diffèrent le moins possible des polynômes. Une théorie systématique des fonctions de variable réelle admettra donc nécessairement comme premier chapitre la théorie des fonctions analytiques.

Nous arrivons ensuite à la seconde classe de fonctions, celle des fonctions indéfiniment dérivables: cette classe est également déterminée sans ambiguïté par la nature de la décroissance de la meilleure approximation. Les résultats relatifs aux classes 3 et 3 bis paraissent, à première vue, moins satisfaisants; ici les conditions nécessaires et suffisantes ne sont plus les mêmes. Il est bien clair, en effet, qu'en posant pour fixer les idées, $p = 1$, dans la classe 3 bis, on a d'une part, $E_n n < \epsilon_n$ ou $E_n < \frac{\epsilon_n}{n}$, et d'autre part, ΣE_n convergente, conditions nullement équivalentes. On pourrait croire que de nouvelles études permettraient plus tard d'obtenir également des conditions qui soient à la fois nécessaires et suffisantes. Mais il n'en est rien. J'ai reconnu, en effet, qu'il existe des fonctions à dérivée continue et telles que ΣE_n est divergente; notre condition suffisante n'est donc certainement pas nécessaire; or, d'autre part, si l'on se donne arbitrairement une série divergente à termes positifs Σa_n, il est toujours possible de construire des fonctions $f(x)$ sans dérivées continues, telles que l'on ait $E_n[f(x)] < a_n$. Par conséquent, quelque faible que soit la divergence de la série $\Sigma E_n[f(x)]$ elle est capable de détruire la continuité de la dérivée; il est donc impossible de restreindre la condition suffisante qui, comme nous venons de le voir, n'est cependant pas nécessaire. Ainsi, en général, les fonctions des classes 3 et 3 bis ne peuvent pas être complètement distinguées par leur meilleure approximation; il existe des cas limites, où la nature de la continuité (qui n'est exprimable par aucune condition de Lipschitz) de la dérivée diffère si peu d'une certaine forme de discontinuité qu'il est impossible de décider par la seule considération de la meilleure approximation si cette dérivée est continue ou non. Je pense que l'étude de ces cas critiques, où les fonctions caractérisées par le même ordre de la meilleure approximation jouissent des propriétés différentielles en apparence différentes, pourrait contribuer à éclaircir la notion de la continuité.

Le fait que les conditions nécessaires et suffisantes ne sont pas identiques pour les classes 3 et 3 bis explique la difficulté qu'on a éprouvé à résoudre le problème posé par M. de la Vallée Poussin (8) sur l'ordre de la meilleure approximation de $|x|$. M. de la Vallée Poussin avait démontré que $E_n|x|$ est inférieur à $\frac{k}{n}$, k étant une constante, et cela résulte aussi de notre Tableau, puisque $|x|$ satisfait à une condition de Lipschitz du premier degré et par conséquent appartient à la classe 3 avec $p = 0$, $\alpha = 1$. Mais le Tableau ne permet aucunement d'affirmer que E_n est nécessairement de l'ordre de $\frac{1}{n}$. La seule chose qu'on puisse affirmer, c'est que $\Sigma E_n |x|$ est divergente, sans quoi $|x|$ aurait une dérivée continue. Ainsi le simple fait de la discontinuité de la dérivée n'exclurait pas, par exemple, la possibilité d'une inégalité de la forme $E_n |x| < \frac{1}{n \log n}$, mais on doit avoir, en général, $E_n |x| > \frac{1}{n \log n^{1+a}}$. Il est clair d'ailleurs, que malgré la divergence de la série $\Sigma E_n |x|$, il pourrait y avoir une infinité de valeurs particulières de n pour lesquelles $E_n |x|$ décroirait même beaucoup plus rapidement. Il est bien facile, en effet, de donner des exemples de fonctions $f(x)$ non dérivables dont la meilleure approximation se comporte pour une infinité de valeurs de n, comme celle des fonctions de la deuxième classe et même de la première classe, qu'on ait par exemple, pour une infinité de valeurs de n convenablement choisies, $E_n [f(x)] < \frac{1}{2^n}$, car on peut imaginer une loi de décroissance de $E_n [f(x)]$ suffisamment irrégulière, pour que la petitesse d'une infinité de termes de la série $\Sigma E_n [f(x)]$ ne l'empêche pas de diverger. La question suivante se pose alors : quelle est donc la nature de ces fonctions sans dérivées, qui pour une infinité des valeurs de n convenablement choisies sont susceptibles de la même approximation que les fonctions indéfiniment dérivables et même les fonctions analytiques ? Je n'ai fait que le premier pas de cette étude.

Le théorème que j'ai obtenu me paraît assez curieux pour être signalé ici. Désignons par $\delta_1(\epsilon)$ le maximum de l'oscillation $|f(x+h) - f(x)|$ de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle donné AB lorsque $|h|$ est inférieur ou égal à ϵ. La fonction $\delta_1(\epsilon)$ est évidemment non négative et non décroissante. La condition de Lipschitz d'ordre α s'exprime ainsi

$$\delta_1(\epsilon) < k\epsilon^{\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I})$$

quel que soit ϵ. Il est possible que la croissance de la fonction $\delta_1(\epsilon)$ relative à une certaine fonction $f(x)$ soit irrégulière et que l'inégalité (I) sans être vérifiée pour toute valeur de ϵ, soit exacte pour une infinité de valeurs de ϵ aussi petites qu'on le veut. S'il en est ainsi, nous dirons que la fonction satisfait à une condition de Lipschitz généralisée du premier ordre et de degré α.

Considérons également

$$\delta_2(\epsilon) = \mathrm{Max}\,|f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)|,$$

$$\delta_3(\epsilon) = \mathrm{Max}\,|f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)|,$$

etc. pour $|h| \leqslant \epsilon$.

Si pour une infinité de valeurs de ϵ aussi petites qu'on le veut, on a une inégalité de la forme

$$\delta_i(\epsilon) < k\epsilon^{\alpha}$$

nous dirons que la fonction $f(x)$ satisfait à une condition généralisée de Lipschitz d'ordre i, de degré α. Cela posé, voici le théorème.

Théorème. S'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles

$$E_n [f(x)] < \frac{A}{n^p},$$

la fonction $f(x)$ satisfait à des conditions de Lipschitz d'ordre i et de degré $\alpha_i = \frac{ip}{i+p}$ quel que soit i.

Ainsi par exemple, une fonction $f(x)$ qui pourrait même ne pas avoir de dérivée, mais qui jouirait de la propriété que, quel que soit p, il existe une infinité de valeurs de n telles que

$$E_n[f(x)] < \frac{1}{n^p},$$

satisferait à des conditions de Lipschitz généralisées de tout ordre i et de degré α aussi voisin de i qu'on le veut (on aurait donc, pour une infinité de valeurs de ϵ,

$$\delta_1(\epsilon) < k\epsilon^{1-\lambda},$$

$$\delta_2(\epsilon) < k\epsilon^{2-\lambda}, \ \ldots,$$

où λ est un nombre aussi petit qu'on le veut et k une constante déterminée lorsque λ est fixée).

Ce théorème montre aussi immédiatement que, quel que petit que soit η, on a nécessairement

$$E_n|x| > \frac{1}{n^{1+\eta}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(II)},$$

à partir d'une certaine valeur de n. En effet, si l'inégalité (II) n'était pas vérifiée pour une infinité de valeurs de n, on conclurait, en vertu du théorème précédent, que $|x|$ satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre i quelconque et de degré

$$\alpha = \frac{i(1+\eta)}{i+1+\eta}$$

supérieur à 1 pour i suffisamment grand. Or, on reconnait sans peine que la fonction $|x|$ ne satisfait à aucune condition généralisée de Lipschitz de degré supérieur à 1. Notre théorème est cependant insuffisant pour démontrer qu'on a, pour toute valeur de n,

$$E_n|x| > \frac{\epsilon}{n},$$

si ϵ est un nombre fixe suffisamment petit. Ce résultat n'a pu être obtenu jusqu'ici que par des considérations plus spéciales dont je parlerai plus loin, mais je crois qu'on pourra le retrouver également par des considérations générales, en introduisant des propriétés semblables aux conditions généralisées de Lipschitz qui auraient une influence encore plus sensible sur la grandeur de la meilleure approximation.

L'exemple du problème de la meilleure approximation du $|x|$ posé par M. de la Vallée Poussin donne une preuve de plus à l'appui de ce fait qu'une question particulière bien posée donne naissance à des théories d'une portée plus générale.

Avant d'aborder les considérations directes qui conduisirent à la solution complète du problème posé par l'éminent géomètre belge, je veux dire quelques mots d'un théorème fort remarquable dû à M. Lebesgue(4) qui a permis à M. Jackson(2) et à moi(1) de démontrer d'une façon indépendante que

$$E_n|x| > \frac{k}{n\log(n+1)},$$

k étant une constante convenablement choisie. Voici ce théorème:

Si $R_n f(x)$ est l'approximation fournie par une suite de Fourier d'ordre n, la meilleure approximation qu'on puisse obtenir par une suite trigonométrique quelconque du même ordre est supérieure à $\frac{kR_n[f(x)]}{\log(n+1)}$, où k est un facteur déterminé.

Je ne puis m'empêcher de rappeler à cette occasion la belle application de ce théorème faite par M. Lebesgue(4); je fais allusion à sa démonstration si simple du fait que toute fonction satisfaisant à une condition de Dini-Lipschitz est développable en une série de Fourier uniformément convergente.

Les mathématiciens qui se sont occupés de la représentation approchée des fonctions ont pu remarquer que les propriétés de l'approximation d'une fonction périodique par des suites trigonométriques limitées sont essentiellement équivalentes à celles de l'approximation des fonctions quelconques par des polynômes. Il est bien facile de voir (3), en particulier, que le théorème de M. Lebesgue s'applique au développement en série de polynômes trigonométriques ($\cos n \arccos x$). Ainsi, si $R_n[f(x)]$ est le maximum du reste $\sum_{p=n+1}^{p=\infty} A_p \cos p \arccos x$ de la série

$$f(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} A_p \cos p \arccos x,$$

on a

$$R_n[f(x)] \geqq E_n[f(x)] > \frac{kR_n[f(x)]}{\log(n+1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\text{III}),$$

où k est la constante de M. Lebesgue.

Pour $|x|$, on a

$$|x| = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \frac{\cos 2 \arccos x}{1.3} - \frac{\cos 4 \arccos x}{3.5} + \frac{\cos 6 \arccos x}{5.7} - \ldots\right],$$

donc

$$R_{2n}|x| = \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} + \ldots\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi.(2n+1)}.$$

Par conséquent, en vertu de l'inégalité (III), on a

$$\frac{2}{\pi(2n+1)} \geqq E_{2n}|x| > \frac{2k}{\pi(2n+1)\log(2n+1)}.$$

On voit que le théorème de M. Lebesgue fournit dans des cas très étendus l'ordre de la meilleure approximation, au facteur $\frac{1}{\log(n+1)}$ près, mais la question de la valeur exacte de l'ordre de la meilleure approximation reste ouverte.

Nous n'avons pas parlé jusqu'ici de la méthode qui paraît la plus naturelle. Celle qui consisterait à déterminer effectivement les polynômes d'approximation de la fonction donnée et de calculer directement la meilleure approximation E_n ainsi obtenue. Le fait est que, la détermination des polynômes d'approximation qui, en général, ne peut être faite que par approximations successives, devient de plus en plus compliquée à mesure que le degré des polynômes augmente, et il semblait extrêmement difficile de tirer des renseignements plus ou moins précis sur la grandeur de la meilleure approximation en utilisant des considérations de cette nature. C'est M. de la Vallée Poussin(9) qui osa le premier, aborder le problème par cette voie-là. Il serait trop long d'exposer ici sa méthode générale de détermination des polynômes d'approximation. Je me bornerai à signaler le théorème suivant dont l'application conduit immédiatement à des bornes inférieures pour la meilleure approximation. Soit $R_n(x)$ un polynôme de degré n; si le segment AB est divisé en $n+2$ intervalles où la différence

$$f(x) - R_n(x)$$

change successivement de signe, et tels que

$$|f(x) - R_n(x)|$$

dépasse dans chacun d'eux une certaine valeur M, la meilleure approximation $E_n[f(x)]$ de $f(x)$ sur le segment AB par un polynôme de degré n est supérieure à M. Pour appliquer le théorème, il suffit de prendre arbitrairement $n+1$ valeurs de x (appelés *nœuds* par M. de la Vallée Poussin) et de construire le polynôme de degré n, $R_n(x)$, qui en ces $n+1$ points se confond avec $f(x)$. On aura ainsi (sauf des cas exceptionnels) $n+2$ intervalles où la différence $f(x) - R_n(x)$ est de signe contraire et l'on pourra se servir du polynôme $R_n(x)$ pour donner une borne inférieure de la meilleure approximation de $f(x)$. M. de la Vallée Poussin a appliqué son théorème à la recherche d'une borne inférieure de $E_n|x|$; il obtient ainsi(9) $E_n|x| > \dfrac{k}{n(\log n)^3}$, résultat un peu moins précis que celui de tout à l'heure.

Il est évident que les bornes inférieures qu'on trouvera en appliquant le théorème énoncé dépendent essentiellement du choix des nœuds. Il y aura, en particulier, une position des nœuds pour laquelle le polynôme $R_n(x)$ sera lui-même le polynôme d'approximation et l'on conçoit que plus la position des nœuds sera voisine de celle-là, plus la borne inférieure qu'on trouvera sera voisine de la meilleure approximation. La méthode de M. de la Vallée Poussin ne donne pas d'indications pour diriger ce choix, et c'est sur ce point qu'elle doit être complétée.

Au moment où parut le Mémoire de M. de la Vallée Poussin, je venais de trouver d'une façon un peu moins simple et comme conséquence d'une méthode entièrement différente un théorème équivalent au fond à celui de M. de la Vallée Poussin. L'idée de la méthode (3) dont il s'agit consistait essentiellement à étudier les polynômes d'approximation d'une fonction donnée en utilisant convenablement les polynômes d'approximation connus déjà d'autres fonctions qui diffèrent suffisamment peu de la fonction considérée. L'avantage du point de vue auquel je me plaçais était celui de m'imposer un choix de nœuds peu différents de ceux qui correspondent aux polynômes d'approximation. Dès lors, comme je le disais plus haut, l'application du théorème de M. de la Vallée Poussin devait me conduire à une borne inférieure assez précise de la meilleure approximation. C'est ainsi qu'en revenant à la fonction $|x|$ sur le segment $-1, +1$, j'ai été conduit à prendre comme nœuds du polynôme $R_{2n}(x)$ de degré $2n$ les racines de l'équation

$$x \cos 2n \arccos x = 0$$

et que j'ai obtenu
$$E_{2n}|x| > \frac{2\sqrt{2}}{21(2n+1)}.$$

La question de l'ordre de la meilleure approximation de $|x|$ se trouve donc résolue. Mais en persévérant dans la même voie on peut aller beaucoup plus loin. Je me bornerai à indiquer le résultat le plus essentiel.

Le produit $$nE_n|x|$$ tend vers une limite λ parfaitement déterminée lorsque n croît indéfiniment. Cette limite λ peut être calculée par approximations successives et l'on a

$$\lambda = 0{\cdot}282 \text{ à } 0{\cdot}004 \text{ près.}$$

Ainsi pour n suffisamment grand,

$$\frac{0{\cdot}286}{n} > E_n|x| > \frac{0{\cdot}278}{n}.$$

La détermination plus précise de λ par la méthode que j'ai suivie ne serait maintenant qu'une question de patience et de calcul.

Il importerait cependant de perfectionner la méthode. Aussi pourrait-on trouver alors des expressions plus ou moins simples pour λ et rattacher peut-être cette constante absolue à d'autres constantes qui se rencontreront certainement dans les recherches relatives à la valeur asymptotique de la meilleure approximation d'autres fonctions que $|x|$. On rencontrera, sans doute, encore bien des difficultés dans ce genre de recherches, mais je ne les crois pas au-dessus des moyens dont dispose l'analyse moderne. Il y a des cas même, où la détermination de la valeur asymptotique de la meilleure approximation d'une fonction se fait beaucoup plus simplement que pour $|x|$. Cela a lieu, en particulier, pour un grand nombre de fonctions entières e^x, $\sin x$, etc. C'est ainsi, par exemple, qu'on trouve immédiatement, par application des théorèmes généraux,

$$\lim \frac{E_n(e^x)\, 2^n (n+1)\,!}{h^{n+1}} = 1,$$

où la meilleure approximation se rapporte au segment $(-h, +h)$.

J'ai donné une seconde démonstration encore (3), du fait que $E_n|x|$ est de l'ordre de $\frac{1}{n}$. Je me permets seulement d'attirer votre attention sur le théorème qui est à sa base, non pas pour l'appliquer à $|x|$, mais pour en indiquer certaines conséquences qui me paraissent être d'un intérêt général.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$ deux suites de nombres positifs croissants tels que

$$\alpha_1 > \beta_1, \quad \alpha_2 > \beta_2, \ldots, \quad \alpha_n > \beta_n.$$

Si k est inférieur à β_1 et qu'on ait

$$\left| x^k - \sum_{i=1}^{i=n} A_i x^{\alpha_i} \right| \leqslant \epsilon,$$

sur le segment 0, 1 ($A_1, A_2, \ldots$ étant des constantes), il est possible de déterminer des constantes

$$B_1, B_2, \ldots,$$

telles qu'on ait $$\left| x^k - \sum_{i=1}^{i=n} B_i x_{\beta_i} \right| \leqslant \epsilon$$

sur le segment 0, 1.

Si k est supérieur à α_n on peut conclure inversement qu'une inégalité de la forme

$$\left| x^k - \sum_{i=1}^{i=n} B_i x^{\beta_i} \right| \leq \epsilon,$$

entraîne nécessairement la possibilité de l'inégalité

$$\left| x^k - \sum_{i=1}^{i=n} A_i x^{\alpha_i} \right| < \epsilon.$$

On peut appliquer ce théorème à la recherche des conditions pour qu'une suite donnée de puissances positives de x

$$x^{\alpha_1}, \quad x^{\alpha_2}, \ldots, \quad x^{\alpha_n}$$

soit une suite complète, c'est-à-dire une suite telle, qu'il soit possible de rendre la différence

$$f(x) - \sum_{i=1}^{i=n} A_i x^{\alpha_i}$$

aussi petite qu'on le veut dans un intervalle déterminé 0, 1 par un choix convenable des coefficients A_i et en prenant n suffisamment grand, quelle que soit la fonction continue $f(x)$.

Voici les résultats qu'on obtient et qui montrent, comme cela était facile à prévoir, que la nature arithmétique des exposants α_i ne joue aucun rôle, mais que tout dépend de leur croissance.

1°. Si les nombres α_i tendent vers une limite finie, les fonctions x^{α_i} forment toujours une suite complète. Ce résultat un peu paradoxal prouve, par exemple, qu'une fonction continue quelconque peut être indéfiniment approchée au moyen d'une somme de la forme

$$\sum_{i=1}^{i=n} A_i x^{1-\frac{1}{i}}.$$

2°. Si les nombres α_i croissent indéfiniment il suffit pour qu'ils forment une suite complète que

$$\frac{\alpha_n}{n \log n} \text{ tende vers } 0.$$

Au contraire, la suite des puissances x^{α_n} n'est pas complète si l'on peut trouver un nombre ϵ tel que

$$\alpha_n \geqslant n\,(\log n)^{2+\epsilon}$$

ou bien

$$\alpha_n \geqslant (\log n)^2\,(\log\log n)^{1+\epsilon}, \ldots.$$

Ainsi, si la croissance des nombres α_n est trop rapide, le système des fonctions x^{α_n} ne peut être complet, il l'est, au contraire, si cette croissance est suffisamment lente, et il ne reste qu'une incertitude relativement faible au sujet du moment critique où la croissance des exposants α_n devient assez rapide pour que la suite cesse d'être complète. Il serait intéressant de savoir si la condition que la série $\Sigma \frac{1}{\alpha_n}$ diverge ne serait pas une condition nécessaire et suffisante pour que la suite des puissances x^{α_n} soit complète; il n'est pas certain, d'ailleurs, qu'une condition de cette nature doive nécessairement exister.

Vous voyez que bien des questions des plus diverses se posent dans l'ordre des idées que j'ai taché de vous exposer ici. Les théories dont nous avons parlé sont trop jeunes encore pour qu'il soit temps de juger de la place qu'elles sont appelées à occuper dans la science. Il serait intéressant de savoir si l'on ne pourrait pas en tirer profit pour l'étude des fonctions qui se présentent dans les applications, par exemple, dans les équations différentielles. On ne l'a pas essayé jusqu'ici. Des recherches de cette nature me paraîtraient cependant fort souhaitables, dans le cas de plusieurs variables surtout. On sait, en effet, que l'étude de la nature des fonctions satisfaisant à une équation aux dérivées partielles présente des difficultés considérables. Peut-être, ces difficultés seront-elles levées plus facilement si l'on utilise systématiquement la notion de la meilleure approximation. Il est vrai que les recherches sur l'approximation des fonctions de plusieurs variables sont à peine ébauchées, mais les quelques propositions que j'ai obtenues en appliquant convenablement le Tableau indiqué au début, me paraissent de nature à encourager des recherches du même genre.

Pour terminer, j'indiquerai seulement une de ces propositions: Si une fonction $f(x, y)$ à l'intérieur d'un contour C considérée comme fonction de x seulement, admet une dérivée partielle d'ordre l, $\frac{\partial^l f}{\partial x^l}$, satisfaisant par rapport à x à une condition déterminée de Lipschitz de degré α et si, considérée comme fonction de y seulement elle admet également une dérivée partielle d'ordre l, $\frac{\partial^l f}{\partial y^l}$, satisfaisant par rapport à y à une condition détérminée de Lipschitz de degré α, la fonction $f(x, y)$ admettra, à l'intérieur d'un contour quelconque S intérieur à C, toutes les dérivées partielles d'ordre l $\frac{\partial^l f}{\partial x^i \partial y^{l-i}}$, et ces dernières satisferont, en outre, par rapport aux deux variables, à des conditions de Lipschitz de degré α_1 inférieur à α et aussi voisin de α qu'on le veut.

Travaux contenant les résultats cités (dans l'ordre des citations).

(1) S. Bernstein. Sur l'approximation des fonctions continues par des polynômes. (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. clii. 27 février 1911.)

(2) D. Jackson. Über die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung. (Preisschrift und Inaugural-Dissertation, Göttingen, juillet 1911.)

(3) S. Bernstein. Sur la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné (en russe). (Communications de la Société mathématique de Charkow, 1912.)

(4) H. Lebesgue. Sur les intégrales singulières. (Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, 1909.)

(5) Ch. de la Vallée Poussin. Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier. (Bulletin de l'Académie de Belgique, 1908.)

(6) A. Markow. Sur une question de Mendeleiew (en russe). (Bulletin de l'Académie de Saint Pétersbourg, 1889.)

(7) W. Markow. Sur les fonctions qui s'écartent le moins de zéro (en russe). (Edition de l'Université de Saint Pétersbourg, 1892.)

(8) Ch. de la Vallée Poussin. Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes. (Bulletin de l'Académie de Belgique, 1908.)

(9) Ch. de la Vallée Poussin. Sur les polynômes d'approximation et la représentation approchée d'un angle. (Bulletin de l'Académie de Belgique, 1910.)

Travaux venant de paraître.

D. Jackson. On the degree of convergence of the development of a continuous function according to Legendre's polynomials. (Transactions of the American Mathematical Society. July 1912.)

S. Bernstein. Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes. (Mémoire publié par l'Académie Royale de Belgique, 1912.)

S. Bernstein. Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation des fonctions analytiques. (Comptes rendus, t. CLV. 1912.)

S. Bernstein. Sur la meilleure approximation de $|x|$. (Acta Mathematica, sous presse; paraîtra en 1913.)