COMMUNICATIONS
DE L'INSTITUT DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET MÉCANIQUES DE L'UNIVERSITÉ DE KHARKOFF ET DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE KHARKOFF

SÉRIE 4, t. XIII, fasc. 1

TOME PUBLIÉ A L'OCCASION DU JUBILÉ DE 130 ANS DE LA FONDATION DE L'UNIVERSITÉ DE KHARKOFF

НАРОДНИЙ КОМІСАРІАТ ОСВІТИ УСРР

Харківський Державний Університет

ЗАПИСКИ
НАУКОВО-ДОСЛІДНОГО ІНСТИТУТУ МАТЕМАТИКИ Й МЕХАНІКИ ТА ХАРКІВСЬКОГО МАТЕМАТИЧНОГО ТОВАРИСТВА

ЦЕЙ ТОМ ПРИСВЯЧУЄТЬСЯ 130-РІЧНОМУ ЮВІЛЕЮ ХАРКІВСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ

СЕРІЯ 4 | ТОМ XIII | ВИП. 1

ОНТИ ДЕРЖАВНЕ НАУКОВО ТЕХНІЧНЕ ВИДАВНИЦТВО УКРАЇНИ НКТП

Verallgemeinerung einer Korkine-Zolotareffschen Minimum-Aufgabe

N. ACHYESER (*Charkow*)

§ 1. Will man irgend eine im Intervalle $<-1, 1>$ stetig erklärte Funktion $f(x)$ vermöge eines Polynoms approximieren, so definiert man zunächst die „Abweichung“ zwischen zwei in $<-1, 1>$ stetigen Funktionen und man sucht nachdem die Koeffizienten des Polynoms $P_n(x)$ derart, dass die Abweichung zwischen $f(x)$ und $P_n(x)$ möglichst klein wird.

Gewöhnlich nimmt man, als Abweichung, entweder die Grösse

$$\max_{-1\leq x\leq 1} |f(x)-P_n(x)|$$

oder die Grösse

$$\int_{-1}^{1} [f(x)-P_n(x)]^2 p(x)\, dx$$

wo $p(x)$ eine im Intervalle $<-1, 1>$ nicht negative feste Funktion (Belegungsfunktion) bezeichnet.

Aber auch die Abweichung

$$\int_{-1}^{1} |f(x)-P_n(x)|\, p(x)\, dx, \tag{1}$$

welche einen einfachen geometrischen Sinn für $p(x)=1$ hat, wurde mehrmals in der Literatur betrachtet[1]. Es ist bemerkenswert, dass für eine grosse Klasse von Funktionen $f(x)$, welche u. a. auch $f(x)=x^{n+1}$ enthält, dasjenige Polynom $P_n(x)$, welches das Integral (1) zum Minimum macht, einfach das Interpolationspolynom für $f(x)$ ist in bezug auf ein festes (von $f(x)$ unabhängiges) Knotensystem.

Daraus geht hervor die Bedeutung der folgenden Aufgabe: *Unter allen Polynomen $P_n(x)=x^n+p_1x^{n-1}+\ldots+p_n$ soll dasjenige bestimmt werden, für welches das Integral*

$$\int_{-1}^{1} |P_n(x)|\cdot p(x)\cdot dx \tag{2}$$

den kleinsten Wert hat.

Zum ersten Male wurde diese Aufgabe gelöst (für $p(x)=1$) in der Arbeit: „Sur un certain minimum“ von A. Korkine und G. Zolotaref.

---

[1] *Tchebyschef*, Sur l'interpolation dans le cas d'un grand nombre de données (Mémoires de l'Académie de Petersbourg, 185[illegible]);
Korkine et Zolotaref, Sur un certain minimum (Nouvelles Annales, 1873);
Stieltjes, Iets over de benaderde voorstelling van eene functie door eene andere (Delft, 1876);
A. A. Марков, О предельных величинах интегралов в связи с интерполированием (Mémoires de l'Académie de Petersbourg, 18[illegible]8);
S. Bernstein, Sur une propriété des polynomes de Tchébychef (Comptes rendus de l'Académie de l'U. R. S. S., 1927).

Der Fall einer beliebigen Belegunsfunktion ist unseres Wissens nicht untersucht.

Auch die asymptotischen Eigenschaften (für $n \to \infty$) desjenigen Polynoms $P_n(x)$, welches das Integral (2) zum Minimum macht, sind uns unbekannt. Es gibt nur die Vermutung von S. N. Bernstein [2]), dass

$$\lim_{n \to \infty} \frac{H_n[t(x)]}{L_n[t(x)]} = 2,$$

wo

$$H_n[t(x)] = \operatorname{Min} \int_{-1}^{1} |x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n| \frac{t(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

und

$$L_n[t(x)] = \operatorname{Min} \left\{ \underset{-1 \leq x \leq 1}{\operatorname{Max}} |t(x)(x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n)| \right\},$$

während $t(x)$ eine gewissen Bedingungen unterworfene und sonst beliebige Funktion (trigonometrische Belegungsfunktion nach S. Bernstein) bedeutet.

In dieser Arbeit wollen wir die vollständige Lösung der oben gestellten Aufgabe geben für den Fall, dass

$$p(x) = \begin{cases} 1 \text{ für } -1 \leqslant x \leqslant \alpha \text{ und } \beta \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \text{ für } \quad \alpha < x < \beta \end{cases}$$

wo α und $\beta (-1 < \alpha < \beta < 1)$ zwei gegebene Zahlen sind.

Dieser Fall scheint uns prinzipiell interessant zu sein, da hier die Belegungsfunktion in einem Teilintervalle des Integrationsintervalls identisch verschwindet während in entsprechenden Untersuchungen über orthogonale Polynome das Verschwinden der Belegungsfunktion gewöhnlich nur auf einer Menge vom Masse Null erlaubt wird (S. Bernstein, G. Szegö)

Die Lösung drückt sich in elliptischen Funktionen aus, und es ist bemerkenswert, dass hier die elliptischen Funktionen ausreichen, um die genaue Lösung für jedes n und jede α, β zu erhalten, während in entsprechenden Aufgaben über die beste gleichmässige Approximation in zwei Intervallen die elliptischen Funktionen nur die asymptotischen (für $n \to \infty$) Beziehungen und nur für spezielle Lage der Punkte α, β die genauen Beziehungen liefern [3]).

§ 2. Unsere Aufgabe besteht also im folgendem:

Unter allen Polynomen

$$f(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n$$

soll dasjenige bestimmt werden, für welches der Ausdruck

$$I[f] = \int_{-1}^{\alpha} |f(x)| dx + \int_{\beta}^{1} |f(x)| dx = \int_E |f(x)| dx$$

den kleinsten Wert hat, wo α, $\beta (-1 < \alpha < \beta < 1)$ *gegebene Zahlen bedeuten und E die aus den Intervallen*

$$< -1, \alpha >, \; < \beta, 1 >$$

bestehende Punktmenge bezeichnet [4]).

---

[2]) *S. Bernstein*, Sur les polynomes orthogonaux relatifs à un segment fini (Journ. de Math., t. IX, 1 30; p. 135)

[3]) *N. Achyeser*, Über einige Funktionen, welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen (Bul. de l'Académie de l'URSS, 1932 — 33)

N. Achyeser, Über eine Eigenschaft der „elliptischen" Polynome (Comm. de la Soc. Math. de Kharkof, Sér. 4, t. IX, 1934).

[4]) Den Anlass zu dieser Arbeit hat mir die Abhandlung von K. Possé, Об одном вопросе о наименьших величинах (Приложение к XXXVIII-му тому Записок Академии Наук, 1880), gegeben.

Dort ist eine spezielle Aufgabe gestellt und gelöst, welche mit der hier betrachteten verwandt ist.

Dass unsere Aufgabe mindestens eine Lösung besitzt, ist klar und bedürft keinen Beweis.

Ferner zeigt eine Wiederholung der Korkine-Zolotareffschen Überlegungen, dass alle Nullstlelen des gesuchten Polynoms einfach sind und in dem Intervalle $<-1, 1>$ liegen. Endlich kann das gesuchte Polynom zwischen α und β nicht mehr als eine Nullstelle besitzen; in der Tat, wäre

$$f(x)=(x-\xi)(x-\eta)\varphi(x),$$

wo $\alpha<\xi<\eta<\beta$, so könnten wir das Polynom

$$f_1(x)=f(x)-h\varphi(x)$$

bilden, wo

$$0<h<\mu=\operatorname*{Min}_{x\subset E}(x-\xi)(x-\eta)$$

und wir hätten offenbar

$$I[f_1]=I[f-h\varphi]=I[f]-hI[\varphi]<I[f].$$

Aber auch eine Nullstelle im Intervalle (α, β) kann das gesuchte Polynom $f(x)$ nur in ausgezeichneten Fällen haben. In der Tat, ist

$$f(x)=(x-\xi)\varphi(x) \qquad (\alpha<\xi<\beta)$$

so haben wir

$$I[f]=\int_{-1}^{\alpha}(\xi-x)|\varphi(x)|\,dx+\int_{\beta}^{1}(x-\xi)|\varphi(x)|\,dx=$$

$$=\xi\left\{\int_{-1}^{\alpha}|\varphi(x)|\,dx-\int_{\beta}^{1}|\varphi(x)|\,dx\right\}-\int_{-1}^{\alpha}x|\varphi(x)|\,dx+\int_{\beta}^{1}x|\varphi(x)|\,dx.$$

Wäre nun der Ausdruck in Klammern von Null verschieden, so könnte man bei passender Änderung der Zahl ξ die Grösse $I[f]$ kleiner machen, so dass $f(x)$ die Lösung der Aufgabe nicht sein könnte; daher muss in diesem Fall die Gleichung

$$\int_{-1}^{\alpha}|\varphi(x)|\,dx=\int_{\beta}^{1}|\varphi(x)|\,dx$$

statt finden[6]).

Hat also das gesuchte Polynom $f(x)$ eine Nullstelle ξ zwischen α und β, so besteht die Gleichung

$$\int_{-1}^{\alpha}\frac{|f(x)|}{\xi-x}\,dx=\int_{\beta}^{1}\frac{|f(x)|}{x-\xi}\,dx$$

und in diesem Falle besitzt unsere Aufgabe offenbar unendlich viele Lösungen der Gestalt

$$F(x)=\frac{x-\vartheta}{x-\xi}f(x),$$

wo ϑ eine beliebige der Ungleichung

$$\alpha\leqslant\vartheta\leqslant\beta$$

genügende Zahl bedeutet.

Die Form dieser Lösungen zeigt, dass wir ohne Änderung der Grösse $I[f]$ die Nullstelle ξ durch α oder β ersetzen können, so dass wir berechtigt sind, nur solche Polynome su betrachten, welche ausschliesslich einfache und in den Intervallen $<-1, \alpha>$, $<\beta, 1>$ gelegene Nullstellen besitzen.

§ 3. Es seien

$$\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_n \qquad (-1\leqslant\xi_1,\ \xi_n\leqslant 1)$$

[6]) Vgl. K. Possé, a. a. O.

sämtliche Nullstellen des gesuchten Polynoms und es sei ferner

$$\xi_k \leqslant \alpha, \quad \beta \leqslant \xi_{k+1},$$

wo k irgend eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n$ ist und im Falle $k=0$ (bzw. $k=n$) $\xi_0 = -1$ (bzw. $\xi_{n+1} = 1$) zu verstehen ist.

Das Integral (3) nimmt die Gestalt

$$I[f] = (-1)^n \Big\{ \int_{-1}^{\xi_1} f dx - \int_{\xi_1}^{\xi_2} f dx + \ldots + (-1)^k \int_{\xi_k}^{\alpha} f dx +$$
$$+ (-1)^k \int_{\beta}^{\xi_{k+1}} f dx + \ldots + (-1)^n \int_{\xi_n}^{1} f dx \Big\}$$

an. Bezeichnen also $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die Koeffizienten des Polynoms $f(x)$, so nehmen die gewöhnlichen Bedingungen

$$\frac{\partial}{\partial p_i} I[f] = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

für das Extremum die Gestalt folgender Gleichungen an, welche zur Bestimmung der Nullstellen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ dienen können:

$$\int_{-1}^{\xi_1} x^i dx - \int_{\xi_1}^{\xi_2} x^i dx + \ldots + (-1)^k \int_{\xi_k}^{\alpha} x^i dx +$$
$$+ (-1)^k \int_{\beta}^{\xi_{k+1}} x^i dx + (-1)^{k+1} \int_{\xi_{k+1}}^{\xi_{k+2}} x^i dx + \ldots + (-1)^n \int_{\xi_n}^{1} x^i dx = 0 \tag{4}$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Die Lösung dieser Gleichungen ist eine sehr schwere Aufgabe. Wir wollen daher nach Tchébyscheff und Korkine-Zolotareff beachten[6], dass auf Grund der Gleichungen (4) die Beziehung

$$\int_{-1}^{\xi_1} \frac{dz}{x-z} - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{dz}{x-z} + \ldots + (-1)^k \int_{\xi_k}^{\alpha} \frac{dz}{x-z} +$$
$$+ (-1)^k \int_{\beta}^{\xi_{k+1}} \frac{dz}{x-z} + (-1)^{k+1} \int_{\xi_{k+1}}^{\xi_{k+2}} \frac{dz}{x-z} + \ldots + (-1)^n \int_{\xi_n}^{1} \frac{dz}{x-z} =$$
$$= \frac{M_1}{x^{n+1}} + \frac{M_2}{x^{n+2}} + \ldots$$

stattfindet.

Es ist daher

$$\frac{(x+1)(x-\xi_2)^2(x-\xi_4)^2\ldots}{(x-\xi_1)^2(x-\xi_3)^2(x-\xi_5)^2\ldots} = e^{2\frac{M_1}{x^{n+1}} + \frac{M_2}{x^{n+2}} + \ldots} = 1 + \frac{M_1}{x^{n+1}} + \ldots$$

und wenn wir also für $n = 2m+1$

$$(x-\xi_2)(x-\xi_4)\ldots(x-\xi_{2m}) = U_m(x)$$
$$(x-\xi_1)(x-\xi_3)\ldots(x-\xi_{2m+1}) = V_{m+1}(x) \tag{5}$$

setzen, so erhalten wir, dass für gerades k:

$$(x+1)(x-\beta)(x-1)U_m^2(x) - (x-\alpha)V_{m+1}^2(x) = Ax + B. \tag{5_1}$$

---

[6]) Vgl. auch K. Possé a. a. O.

und ungerades k:

$$(x+1)(x-\alpha)(x-1)\,U_m^2(x)-(x-\beta)\,V_{m+1}^2(x)=Ax+B \tag{5$_2$}$$

Ist dagegen $n=2m$ eine gerade Zahl und wird

$$\begin{aligned}(x-\xi_2)(x-\xi_4)\ldots(x-\xi_{2m})&=P_m(x)\\(x-\xi_1)(x-\xi_3)\ldots(x-\xi_{2m-1})&=Q_m(x)\end{aligned} \tag{6}$$

gesetzt, so erhalten wir ganz ebenso, dass für gerades k:

$$(x+1)(x-\beta)P_m^2(x)-(x-\alpha)(x-1)\,Q_m^2(x)=Ax+B \tag{6$_1$}$$

und ungerades k:

$$(x+1)(x-\alpha)P_m^2(x)-(x-\beta)(x-1)\,Q_m^2(x)=Ax+B. \tag{6$_2$}$$

§ 4. Wir wollen jetzt die unbestimmten Gleichungen des vorigen Paragraphs in elliptischen Funktionen lösen.

Dabei werden wir uns auf den Fall $n=2m+1$ beschränken.

Wir setzen

$$k^2=\frac{2(\beta-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\beta)} \tag{7}$$

und nehmen $k\,(0<k<1)$ als Modul der Jacobi'schen Funktionen.

Ferner bestimmen wir die Grösse ρ aus der Gleichung

$$\alpha=1-2\,\mathrm{sn}^2\rho \tag{8}$$

und der Nebenbedingung

$$O<\rho<K$$

Aus (7) und (8) folgt dann, dass

$$\beta=2\frac{\mathrm{cn}^2\rho}{\mathrm{dn}^2\rho}-1 \tag{9}$$

Endlich setzen wir

$$x=\frac{\mathrm{sn}^2u\cdot\mathrm{cn}^2\rho+\mathrm{cn}^2u\cdot\mathrm{sn}^2\rho}{\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\rho}, \tag{10}$$

so dass

$$\begin{aligned}x+1&=\frac{2\,\mathrm{sn}^2u\cdot\mathrm{cn}^2\rho}{\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\rho}, & x-\beta&=\frac{(1-\beta^2)\,dn^2u\cdot dn^2\rho}{2(1-k^2)(\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\rho)},\\ x-\alpha&=\frac{1-\alpha^2}{2(\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\rho)}, & x-1&=\frac{2\,\mathrm{sn}^2\rho\cdot\mathrm{cn}^2u}{\mathrm{sn}^2u-\mathrm{sn}^2\rho}.\end{aligned} \tag{11}$$

Die Beziehung (10) gibt die konforme Abbildung der zweiblättrigen Riemannschen Fläche mit den Verzweigungspunkten $D\,(x=-1)$, $A\,(x=\alpha)$, $B\,(x=\beta)$, $C\,(x=1)$ und den Übergangslinien DA, BC auf das Periodenparallelogramm mit den Ecken

$$u=K\pm iK',\ -K\pm iK'.$$

Dabei entspricht das Rechteck $AB''B'''A'$ (Fig. 1) dem oberen Blatte der Riemannschen Fläche und das Rechteck $ABB'A'$ dem unteren

Wir nehmen die Funktion

$$\Phi(u)=\sqrt{\frac{(x+1)(x-\beta)(x-1)}{x-\alpha}}\,U_m(x)-V_{m+1}(x),$$

wo $U_m(x)$, $V_{m+1}(x)$ der Gleichung (5$_1$) genügende Polynome sind, und die Wurzel derart bestimmt ist, dass $\Phi(u)$ in dem oberen Blatte der Riemannschen Fläche und also im Rechtecke $AB''B'''A'$ endlich bleibt.

Aus dieser Definition der Funktion $\Phi(u)$ folgt, dass der Punkt $u=\rho$ ein $(m+1)$ — fache Nullstelle der Funktion $\Phi(u)$ ist.

Anderseits zeigen die Gleichungen (11), dass

$$\Phi(u)=\frac{2\,\mathrm{sn}\,\rho\cdot\mathrm{cn}\,\rho\cdot\mathrm{sn}\,u\cdot\mathrm{cn}\,u\cdot dn\,u}{\mathrm{sn}^2 u-\mathrm{sn}^2\rho}\,U_m(x)-V_{m+1}(x)$$

Daraus folgt erstens, dass

$$\Phi(u+2K)=\Phi(u+2iK')=\Phi(u)$$

und zweitens, dass

$$\Phi(-u)=-\sqrt{\frac{(x+1)(x-\beta)(x-1)}{x-\alpha}}\,U_m(x)-V_{m+1}(x)=-\frac{Ax+B}{(x-\alpha)\,\Phi(u)}.$$

Diese letzte Eigenschaft zeigt uns, dsss der Punkt $u=-\rho$ für $\Phi(u)$ ei $(m+1)$ — facher Pol ist; ausserdem hat $\Phi(u)$ einen Pol erster Ordnung i Punkte $u=iK'$.

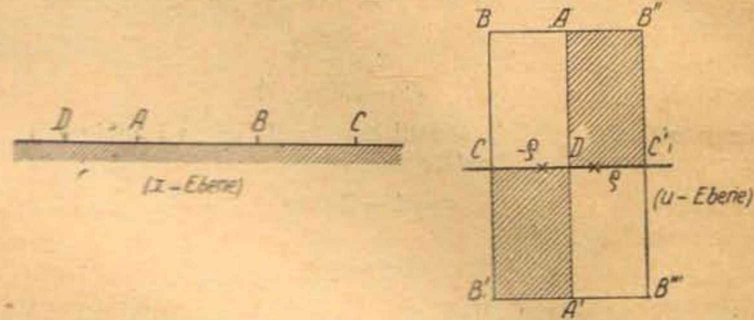

Fig. 1

Alle diese Tatsachen und die doppelte Periodizität der Funktion $\Phi(u$ ermöglichen, diese Funktion folgendermassen darzustellen:

$$\Phi(u)=\mathrm{Const.}\left[\frac{H(\rho-u)}{H(\rho+u)}\right]^{m+1}\frac{\Theta(u+\overline{2m+2}\rho)}{\Theta(u)}.$$

Wir haben daher die beiden Gleichungen:

$$V_{m+1}(x)-\sqrt{\frac{(x+1)(x-\beta)(x-1)}{x-\alpha}}\,U_m(x)=C\left[\frac{H(\rho-u)}{H(\rho+u)}\right]^{m+1}\frac{\Theta(u+\overline{2m+2}\rho}{\Theta(u)}$$

$$V_{m+1}(x)+\sqrt{\frac{(x+1)(x-\beta)(x-1)}{x-\alpha}}\,U_m(x)=C\left[\frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)}\right]^{m+1}\frac{\Theta(u-\overline{2m+2}\rho}{\Theta(u)}$$

und können folglich die in Rede stehende Lösung der unbestimmten Gleichung (5_1) in der Gestalt

$$V_{m+1}(x)=\frac{C}{2}\left\{\left[\frac{H(\rho-u)}{H(\rho+u)}\right]^{m+1}\frac{\Theta(u+\overline{2m+2}\rho)}{\Theta(u)}+\left[\frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)}\right]^{m+1}\frac{\Theta(u-\overline{2m+2}\rho)}{\Theta(u)}\right\}$$

(12_1)

$$U_m(x)=\frac{C}{2}\sqrt{\frac{x-\alpha}{(x+1)(x-\beta)(x-1)}}\left\{\left[\frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)}\right]^{m+1}\frac{\Theta(u-\overline{2m+2}\rho)}{\Theta(u)}-\right.$$
$$\left.-\left[\frac{H(\rho-u)}{H(\rho+u)}\right]^{m+1}\frac{\Theta(u+\overline{2m+2}\rho)}{\Theta(u)}\right\}$$

darstellen.

Ebenso erhalten wir, dass die in Rede stehende Lösung der Gleichung (,)5 die Form

$$V_{m+1}(x)=\frac{D}{2}\left\{\left[\frac{H(\rho-u)}{H(\rho+u)}\right]^{m+1}\frac{\Theta_1(u+\overline{2m+2\rho})}{\Theta_1(u)}+\left[\frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)}\right]^{m+1}\frac{\Theta_1(u-\overline{2m+2\rho})}{\Theta_1(u)}\right\}$$

$$U_m(x)=\frac{D}{2}\sqrt{\frac{x-\beta}{(x+1)(x-\alpha)(x-1)}}\left\{\left[\frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)}\right]^{m+1}\frac{\Theta_1(u-\overline{2m+2\rho})}{\Theta_1(u)}-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{H(\rho-u)}{H(\rho+u)}\right]^{m+1}\frac{\Theta_1(u+\overline{2m+2\rho})}{\Theta_1(u)}\right\} \tag{12$_2$}$$

hat.

Dass umgekehrt die rechts in diesen Formeln stehenden Funktionen von u zufolge der Transformation (10) als Polynome von x, und zwar Polynome der Grade $m+1$, bzw m, sich erweisen, ist evident, aber a priori weiss man nicht, ob die Nullstellen dieser Polynome den im § 3 besprochenen Ungleichungen genügen.

Wir können aber schon jetzt auf Grund unserer Überlegungen behaupten, dass unter allen Umständen mindestens ein Funktionenpaar (12_1) oder (12_2) für $n=2m+1$ die Lösung

$$f(x)=U_m(x)\,V_{m+1}(x)$$

unserer Aufgabe geben muss.

Im folgenden Paragraphe werden wir zeigen, wie bei gegebenen α und β entschieden werden kann, welche unter den Funktionenpaaren (12_1), (12_2) die Lösung liefert.

§ 5. Es sei

$$(2m+2)\rho=pK+\sigma$$

wo p eine ganze Zahl bedeutet und σ der Ungleichung

$$0\leqslant\sigma\leqslant K$$

genügt.

Es ist zweckmässig, drei folgende Fälle zu unterscheiden: 1) $0<\sigma<K$ p — ungerade Zahl; 2) $0<\sigma<K$, p — gerade Zahl; 3) $\sigma=0$ oder $\sigma=K$.

Erster Fall: $0<\sigma<K$, p — ungerade Zahl.

Wir nehmen die Funktionen (12_2) und schreiben sie in der Gestalt

$$V_{m+1}(x)=\frac{D}{2}\left[\frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)}\right]^{m+1}\frac{\Theta_1(u-\overline{2m+2\rho})}{\Theta_1(u)}\{1+\Omega(u)\},$$

$$U_m(x)=\frac{D}{2}\sqrt{\frac{x-\beta}{(x+1)(x-\alpha)(x-1)}}\left[\frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)}\right]^{m+1}\frac{\Theta_1(u-\overline{2m+2\rho})}{\Theta_1(u)}\{1-\Omega(u)\}$$

wo

$$\Omega(u)=\left[\frac{H(\rho-u)}{H(\rho+u)}\right]^{2m+2}\frac{\Theta_1(u+\overline{2m+2\rho})}{\Theta_1(u-\overline{2m+2\rho})}$$

gesetzt ist.

Eine leichte Rechnung zeigt, dass

$$\Omega(0)=1,\quad \Omega(iK')=1,\quad \Omega(K+iK')=-1,\quad \Omega(K)=1;$$

man erkennt aber leicht, dass die Grössen $x=-1$, α, β, 1 keine Nullstellen der Polynome $V_{m+1}(x)$, $U_m(x)$ sind.

Ferner sehen wir, dass in den Intervallen $<-1, \alpha>$, $<\beta, 1>$ die Funktion $\Omega(u)$ dem Modul nach gleich Eins ist.

Die Nullstellen der Polynome $U_m(x)$ $V_{m+1}(x)$ in den Intervallen $(-1, \alpha)$, $(\beta, 1)$ entsprechen daher denjenigen Stellen der offenen Strecken DA und $B''C$, an welchen $\Omega(u)=\pm 1$.

Um die Anzahl dieser Stellen zu finden wollen wir mit dem Punkt den Weg $DAMB''C'ND$ (Fig. 2) beschreiben; und wir setzen $\omega = iK' + \sigma$. Nach diesem Umlaufe erfährt $\arg \Omega(u)$ den Zuwachs

$$-(2m+2)2\pi + 2\pi$$

Setzt man

$$\arg\Omega(0)=0,$$

so wird also

$$\arg\Omega(K) = -\pi(2m+2)+2\pi = -2m\pi.$$

Wir haben ferner

$$\arg\Omega(iK'+K) = \arg\Omega(iK')+\pi$$

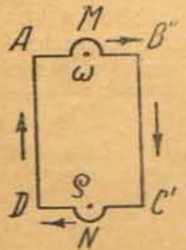

Fig. 2

und

$$\arg\Omega(iK') = (2m+2)\arg\frac{H(\rho-u)}{H(\rho+u)} + \arg\frac{\Theta(u+\sigma)}{\Theta(u-\sigma)}\Big|_{u=iK'}$$

Nun ist aber

$$\frac{H(\rho-iK')}{H(\rho+iK')} = -e^{\frac{\pi i}{K}\rho}$$

$$\frac{\Theta(iK'+\sigma)}{\Theta(iK'-\sigma)} = -e^{-\frac{\pi i}{K}\sigma}$$

und da im Punkte A bei Erreichung dieser Stelle längs DA $\arg\frac{H(\rho-u)}{H(\rho+u)}$ negativ und absolut kleiner als 2π sein muss, so ist

$$\arg\frac{H(\rho-u)}{H(\rho+u)}\Big|_{u=iK'} = -\pi+\frac{\pi}{K}\rho;$$

ähnlich sieht man, dass

$$\arg\frac{\Theta(u+\sigma)}{\Theta(u-\sigma)}\Big|_{u=iK'} = \pi - \frac{\pi}{K}\sigma.$$

Folglich ist

$$\arg\Omega(iK') = -(2m+2)\pi+\pi+\frac{\pi}{K}[(2m+2)\rho-\sigma] = -\pi(2m+1-p).$$

und daher

$$\arg\Omega(iK'+K) = -\pi(2m-p).$$

Die Änderung, welche $\arg\Omega(u)$ auf der Strecke DA erfährt, ist $\pi(2m+1-p)$, und auf der Strecke $B''C'$ ist diese Änderung πp.

Nun ist p eine ungerade Zahl, es sei $p=2q+1$; dann haben gewiss beide Polynome $U_m(x)$, $V_{m+1}(x)$ im Intervalle $(\beta, 1)$ je q Nullstellen und diese Nullstellen trennen sich; wenn in diesem Intervalle weitere Nullstellen dieser Polynome gelegen hätten, so müsste entweder in irgend einem Punkte $(u=u_0)$ dieses Intervalls $\Omega(u_0)=\pm1$ und $\Omega'(u_0)=0$ sein, oder in zwei Punkten $(u=u_1,\ u=u_2)$ müssten die Gleichungen $\Omega(u_1)=\Omega(u_2)=\pm1$ stattfinden, während zwischen ihnen $\Omega(u)$ von ±1 verschieden wäre; im ersten Falle hätte das eine Polynom eine mehrfache Nullstelle, und im zweiten hätten wir zwei Nullstellen des einen Polynoms ohne eine Nullstelle des anderen zwischen ihnen; beide Möglichkeiten widersprechen der Eigenschaft der Nullstellen des gesuchten Polynoms $f(x)$.

Ähnlich sehen wir, dass im zweiten Intervalle die Anzahlen der Nullstellen unserer Polynome, die den Ungleichungen des § 3 genügen können, gleich $m-q-1$, $m-q$ sind. Folglich erhalten wir in beiden Intervallen für das eine Polynom $m-1$ Nullstellen und für das andere m Nullstellen, die den Ungleichungen von § 3 genügen. Die Summe ist kleiner als $2m+1$.

Diese Überlegung zeigt, dass im betrachteten Falle die Polynome (12_2) keine Lösung liefern, folglich muss diese Lösung dem Produkt der Polynome (12_1) gleich sein, und in der Tat zeigt hier eine ähnliche Überlegung, dass im Intervalle $(-1, \alpha)$ die Polynome $U_m(x)$ und $V_{m+1}(x)$ je $m-q$ Nullstellen haben, während im Intervalle $(\beta, 1)$ die entsprechende Anzahlen q, $q+1$ sind, wobei die Ungleichungen von § 3 stattfinden.

Zweiter Fall: $0 < \sigma < K$, p — gerade Zahl.

In diesem Falle erkennen wir nach ähnlichen Überlegungen, dass die Lösung der Aufgabe dem Produkt der Polynome (12_2) gleich ist, und ist $p=2q$, so hat die Lösung der Aufgabe im Intervalle $(-1, \alpha)$

$$2m-2q+1$$

Nullstellen.

Die Polynome (12_1) geben in diesem Falle keine Lösung.

Dritter Fall: $(2m+2)\rho \equiv 0 \pmod{K}$.

Wir haben hier einen Grenzfall, wie des ersten, so auch des zweiten Falles.

Daher bekommen wir hier zwei Lösungen:

$$f_1(x) = A\sqrt{\frac{x-\alpha}{(x+1)(x-\beta)(x-1)}}\left\{\left[\frac{H(\rho-u)}{H(\rho+u)}\right]^{2m+2} - \left[\frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)}\right]^{2m+2}\right\},$$

$$f_2(x) = A\sqrt{\frac{x-\beta}{(x+1)(x-\alpha)(x-1)}}\left\{\left[\frac{H(\rho-u)}{H(\rho+u)}\right]^{2m+2} - \left[\frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)}\right]^{2m+2}\right\}.$$

Diese Lösungen haben die Gestalt

$$f_1(x) = (x-\alpha)\varphi(x),$$
$$f_2(x) = (x-\beta)\varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ ein Polynom $(n-1)$-ten Grades ist, und sind verschieden; man sieht leicht, dass unsere Aufgabe im betrachteten Falle unendlich viele Lösungen

$$(x-\vartheta)\varphi(x) \qquad (\alpha \leqslant \vartheta \leqslant \beta)$$

hat.

Unter diesen Lösungen wollen wir die folgende herausgreifen

$$f_0(x) = A\frac{x-\gamma}{\sqrt{(x+1)(x-\alpha)(x-\beta)(x-1)}}\left\{\left[\frac{H(\rho-u)}{H(\rho+u)}\right]^{2m+2} - \left[\frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)}\right]^{2m+2}\right\},$$

wo

$$\gamma = \alpha + \frac{2sn\rho\cdot cn\rho}{dn\rho}\frac{\Theta'(\rho)}{\Theta(\rho)}$$

ist (diese Zahl liegt[8] zwischen α und β).

Die Bedeutung dieser speziellen Wahl besteht darin, dass[8]

$$\frac{2(x-\gamma)}{\sqrt{(1-\alpha)(1+\beta)}} = \frac{H'(u-\rho)}{H(u-\rho)} - \frac{H'(u+\rho)}{H(u+\rho)}.$$

Folglich ist

$$f_0(x) = B\frac{d}{dx}\left\{\left[\frac{H(\rho-u)}{H(\rho+u)}\right]^{2m+2} + \left[\frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)}\right]^{2m+2}\right\}, \tag{13}$$

und da

$$(2m+2)\rho = pK$$

ist, so unterscheidet sich das in den Klammern stehende Polynom nur um einen konstanten Faktor von dem Polynom

$$T_{2m+2}(x; p, k).$$

welches ich in meinen früheren Arbeiten[3]) untersucht habe. Dieses Polynom war in vielen Richtungen dem Tchébys heffschen Polynome $T_n(x) = \cos n \arccos x$ ähnlich; jetzt, haben wir noch eine mit $T_n(x)$ gemeinsam Eigenschaft dieses Polynoms erhalten.

Bemerkung.

Eine leichte Rechung zeigt, dass der Koeffizient B in der Formel (13 den Wert[7])

$$B = \frac{1}{(2m+2)\,4^{m+1}}\left[\frac{\Theta(0)\,\Theta_1(0)}{\Theta(\rho)\,\Theta_1(\rho)}\right]^{4m+4} = \frac{\tau^{2m+2}}{2m+2} \tag{13$_1$}$$

hat, ferner ist

$$\int\limits_E |f_0(x)|\,dx = B\int\limits_{x<E}\left|d\left\{\left[\frac{H(\rho-u)}{H(\rho+u)}\right]^{2m+2}+\left[\frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)}\right]^{2m+2}\right\}\right| =$$

$$= 2B\int\limits_0^{\pi}|d\cos(2m+2)v| = 2B\int\limits_0^{(2m+2)\pi}|d\cos v| =$$

$$= 2B\cdot(2m+2)\cdot 2\cdot\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}|d\cos u| = 4B(2m+2). \tag{13$_2$}$$

Nun folgt aus dem Fundamentalsatze über Polynome minimaler Abweichung, dass $f_0(x)$ in E in bezug auf die Belegung

$$\frac{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}{|x-\gamma|}$$

unter allen Polynomen der Gestalt $x^{2m+1}+p_1x^{2m}+\ldots$ im Tschébyscheffschen Sinne am wenigsten von Null abweicht, wobei die Abweichung den Wert

$$2B(2m+2)$$

hat.

Daher besteht für $(2m+2)\rho \equiv 0 \pmod{K}$ die genaue Beziehung von S. N. Bernstein

$$\mathrm{Min}\int\limits_E |x^{2m+1}+p_1x^{2m}+\ldots+p_{2m+1}|\,dx =$$

$$= 2\,\mathrm{Min}\left\{\mathop{\mathrm{Max}}_{x<E}\left|(x^{2m+1}+p_1x^{2m}+\ldots+p_{2m+1})\frac{\sqrt{(1-x^2)(\alpha-x)(\beta-x)}}{x-\gamma}\right|\right\} =$$

$$= 2\,\mathrm{Min}\left\{\mathop{\mathrm{Max}}_{x<E}|x^{2m+2}+q_1x^{2m+1}+\ldots+q_{2m+2}|\right\}.$$

§ 6. Wir haben im vorigen § unsere Aufgabe vollständig gelöst für den Fall $n = 2m+1$.

Das Resultat kann man noch anders ausdrücken wozu wir einige Bezeichnungen einführen wollen. Es sei α fest, dagegen sei k als veränderliches Argument und K als seine Funktion betrachtet; man denke sich die Gleichung

$$\alpha = 1 - 2\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{p}{2m+2}K, k\right) \tag{14}$$

[7]) Die Grösse

$$\tau = \frac{1}{2}\left[\frac{\Theta(0)\,\Theta_1(0)}{\Theta(\rho)\,\Theta_1(\rho)}\right]^2$$

ist der transfinite Durchmesser (M. Fekete) der Punktmenge E [vgl. [3])].

Im Speziellfalle

$$\alpha = -\beta$$

besteht die Gleichung

$$\tau = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{2}.$$

n bezug k gelöst, wobei p eine der Zählen $1, 2, \ldots, q$ bedeutet, wo $q < 2m+2$ ie grösste natürliche Zahl ist, für welche (14) noch zu einem positiven chten Bruch k führt (ist also $\cos\frac{\pi\mu}{2m+2} \leqslant \alpha$, so kann q nicht grösser als sein).

Wir erhalten so die Grössen $k_1, k_2, \ldots, k_q$ und nach der Formel (7) finden wir dann entsprechende Werte für β

$$\beta_q < \beta_{q-1} < \ldots < \beta_1 < \beta_0 = 1$$

Alsdann können wir, $\beta_{q+1} = \alpha$ gesetzt, behaupten, dass für

$$\beta_{2j} < \beta < \beta_{2j-1} \qquad (j = 1, 2, \ldots;\ 2j \leqslant q+1)$$

unsere Aufgabe eine einzige Lösung besitzt, welche vermöge der Formeln (12_1) gegeben wird; für

$$\beta_{2j+1} < \beta < \beta_{2j} \qquad (j = 0, 1, \ldots;\ 2j+1 \leqslant q+1)$$

existiert ebenfalls nur eine Lösung, aber sie wird gegeben vermöge der Formeln (12_2); und nur für

$$\beta = \beta j$$

gibt es unendlich viele Lösungen, unter welchen eine ebenso mit den „elliptischen" Polynomen verbunden ist wie die Lösung der Korkine-Zolotareffschen Aufgabe mit dem trigonometrischen Polynom $\cos n \arccos x$.

Es ist nicht schwer asymptotische (falls $m \to \infty$) Abschätzungen für

$$\operatorname{Min} \int_E |\, x^{2m+1} + p_1 x^{2m} + \ldots + p_{2m+1} \,|\, dx$$

anzugeben, wenn α und β feste Zahlen bedeuten.

Für jedes m kann man zwei Zahlen $\beta_{j+1}^{(m)}$, $\beta_j^{(m)}$ finden derart, dass

$$\beta_{j+1}^{(m)} \leqslant \beta \leqslant \beta_j^{(m)}$$

und dabei wird

$$\lim_{m\to\infty} \beta_j^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \beta_{j+1}^{(m)} = \beta \qquad (j = j_{(m)})$$

Ist aber

$$G_{2m+1}(b) = \operatorname{Min} \left\{ \int_{-1}^{\alpha} |\, x^{2m+1} + p_1 x^{2m} + \ldots \,|\, dx + \int_b^1 |\, x^{2m+1} + p_1 x^{2m} + \ldots \,|\, dx \right\}.$$

so haben wir offenbar

$$G_{2m+1}(\beta) \geqslant G_{2m+1}(\beta_j^{(m)})$$
$$G_{2m+1}(\beta_{j+1}^{(m)}) \geqslant G_{2m+1}(\beta)$$

und daher besteht die Ungleichung

$$\left[\frac{\Theta(0; k_j)\,\Theta_1(0; k_j)}{\Theta\left(\frac{j}{2m+2} K_j; k_j\right)\Theta_1\left(\frac{j}{2m+2} K_j; k_j\right)}\right]^{4(m+1)} \leqslant 2^{2m}\, G_{2m+1}(\beta) \leqslant$$
$$\leqslant \left[\frac{\Theta(0; k_{j+1})\,\Theta_1(0; k_{j+1})}{\Theta\left(\frac{j+1}{2m+2} K_{j+1}; k_{j+1}\right)\Theta_1\left(\frac{j+1}{2m+2} K_{j+1}; k_{j+1}\right)}\right]^{4(m+1)}$$

Daraus folgt ohne Mühe, dass für eine Folge

$$m_1, m_2, \ldots,$$

für welche $\sigma \to 0$ die asymptotische Gleichung

$$G_{2m+1}(\beta) \sim \frac{1}{2^{2m}} \left[\frac{\Theta(0)\,\Theta_1(0)}{\Theta(\rho)\,\Theta_1(\rho)}\right]^{4(m+1)}$$

stattfindet.

§ 7. Es bleibt uns noch Formeln für gerades $n\,(=2m)$ anzugeben. Die Lösung der Aufgabe hat hier auch entweder die Gestalt

$$f(x) = A\sqrt{\frac{x-\beta}{(x+1)(x-\alpha)(x-1)}}\left\{\left[\frac{H(\rho-u)}{H(\rho+u)}\right]^{2m+1}\frac{\Theta_1^2(u+\overline{2m+1}\rho)}{\Theta_1^2(u)} - \left[\frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)}\right]^{2m+1}\frac{\Theta_1^2(u-\overline{2m+1}\rho)}{\Theta_1^2(u)}\right\}$$

oder:

$$f(x) = B\sqrt{\frac{x-\alpha}{(x+1)(x-\beta)(x-1)}}\left\{\left[\frac{H(\rho-u)}{H(\rho+u)}\right]^{2m+1}\frac{\Theta^2(u+\overline{2m+1}\rho)}{\Theta^2(u)} - \left[\frac{H(\rho+u)}{H(\rho-u)}\right]^{2m+1}\frac{\Theta^2(u-\overline{2m+1}\rho)}{\Theta^2(u)}\right\}$$

und zwar die erste, falls in der Beziehung

$$(2m+1)\rho = pK + \sigma \qquad (0 \leqslant \sigma \leqslant K)$$

die ganze Zahl p — gerade ist und die zweite, falls p — ungerade ist.

Узагальнення однієї мінімум-задачі Коркина-Золотарева

Н. АХІЄЗЕР (*Харків*)

РЕЗЮМЕ

В статті подано розв'язання в еліптичних функціях такої задачі: *Серед усіх поліномів вигляду*

$$P_n(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n$$

знайти той, для якого вираз

$$\int_{-1}^{\alpha} |P_n(x)|\,dx + \int_{\beta}^{1} |P_n(x)|\,dx$$

має мінімум, при чому числа α, $\beta\,(-1 < \alpha < \beta < 1)$ *задано.*