$$\frac{1}{I}\,[K - \tfrac{1}{2}\Delta_2\,(\log I)]$$

vorhanden ist.

Wir wollen schliesslich noch die folgende Bemerkung hinzufügen.

Jede zwei Flächen können aufeinander konform abgebildet werden. Wenn es sich aber um konforme Abbildungen gewisser besonderer Art handelt, so kann dies nicht der Fall sein. Im Zusammenhange mit den früheren Ausführungen kann nämlich die Frage behandelt werden, welchen Bedingungen zwei Flächen genügen müssen, damit sie derart aufeinander konform abgebildet werden könnten, dass die Gleichheit:

$$I\,ds^2 = I'\,ds'^2$$

bestehe. Die Antwort kann in analoger Weise wie für die Isometrie zweier Flächen erhalten werden. Auf die Einzelheiten gehen wir indessen nicht näher ein.

W. SIERPIŃSKI.

Dowód elementarny twierdzenia Weierstrass'a i wzoru interpolacyjnego Borel'a.

(Démonstration élémentaire du théorème de Weierstrass et de la formule d'interpolation de M. Borel).

W pracy niniejszej pragnę przedstawić w sposób jaknajbardziej elementarny dowód twierdzenia Weierstrassa (że każda funkcya, ciągła w danym przedziale, daje się w tym przedziale rozwinąć na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów), tudzież ogólnego wzoru interpolacyjnego Borela.

1. Funkcya $|x|$ jako granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcyj wymiernych.

Twierdzenie. Dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$ mamy przy wszelkiem naturalnem n nierówność:

$$0 \leqslant |x| - x\,\frac{(1+x)^n - 1}{(1+x)^n + 1} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Dowód. Połóżmy

$$|x| - x\,\frac{(1+x)^n - 1}{(1+x)^n + 1} = r_n.$$

Rozważymy osobno przypadki: $x \geqslant 0$, oraz $x < 0$.

1) $x \geqslant 0$. Mamy tu $|x| = x$, zatem:

$$r_n = \frac{2x}{(1+x)^n + 1}.$$

Dla $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ będzie oczywiście licznik naszego wyrażenia nieujemny i nie większy od $\frac{2}{\sqrt{n}}$, mianownik zaś większy od jedności, zatem:

$$0 \leqslant r_n < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Dla $\frac{1}{\sqrt{n}} < x \leqslant 1$ mamy:

$$(1+x)^n > \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n > 1+\frac{n}{\sqrt{n}} > \sqrt{n};$$

mianownik naszego wyrażenia jest tu więc większy od $\sqrt{n}$, a że licznik jest dodatni oraz $\leqslant 2$, więc:

$$0 < r_n < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

2) $x < 0$. Mamy teraz $|x| = -x$, stąd:

$$r_n = \frac{-2x(1+x)^n}{(1+x)^n+1}.$$

Dla $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant x < 0$ zachodzą oczywiście nierówności:

$$0 \leqslant -2x(1+x)^n < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

oraz

$$(1+x)^n+1 \geqslant 1,$$

skąd:

$$0 \leqslant r_n < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Dla $-1 \leqslant x < -\frac{1}{\sqrt{n}}$ (co oczywiście jest możliwe tylko w razie $n>1$), mamy:

$$0 \leqslant -2x(1+x)^n < 2,$$

oraz:

$$0 \leqslant (1+x)^n < \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}-1}\right)^n} < \frac{1}{1+\frac{n}{\sqrt{n}-1}} < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

zatem znowu:

$$0 \leqslant r_n < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Twierdzenie nasze możemy więc uważać za udowodnione w zupełności. Zastępując w niem x przez $\frac{x}{s}$ i mnożąc wszystkie nierówności przez liczbę naturalną s, otrzymujemy następujący

Wniosek. Przy wszelkich naturalnych n i s zachodzi dla $-s \leqslant x \leqslant s$ nierówność:

$$0 \leqslant |x| - x\frac{(s+x)^n - s^n}{(s+x)^n + s^n} < \frac{2s}{\sqrt{n}} \tag{1}$$

Niech teraz (a, b) oznacza dany przedział. Wyznaczmy liczbę naturalną s tak, iżby było

$$s \geqslant |a| \quad \text{oraz} \quad s \geqslant |b|.$$

Dla $a \leqslant x \leqslant b$ będziemy mieli tembardziej $-s \leqslant x \leqslant s$, zatem i nierówność (1), skąd w jednej chwili

$$|x| = \lim_{n=\infty} x\frac{(s+x)^n - s^n}{(s+x)^n + s^n}$$

Wzór ten przedstawia funkcyę $|x|$ w przedziale (a, b) jako granicę jednostajnie zbieżnego ciągu funkcyj wymiernych.

Uwaga. Z nierówności (1) moglibyśmy też z łatwością wnioskować że przy wszelkiem rzeczywistem x mamy:

$$|x| = \lim_{\varkappa=\infty} x\frac{(\varkappa+x)^{\varkappa^3} - \varkappa^{\varkappa^3}}{(\varkappa+x)^{\varkappa^3} + \varkappa^{\varkappa^3}},$$

przyczem ciąg, stojący pod znakiem granicy jest zbieżny jednostajnie w każdym skończonym przedziale. Nie moglibyśmy jednak o nim powiedzieć, że jest zbieżny jednostajnie w przedziale $(-\infty, +\infty)$.

2. Rozwijanie funkcyi wymiernej na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów.

Niech $\frac{\vartheta(x)}{\psi(x)}$ oznacza daną funkcyę wymierną, zaś (a, b) — dany przedział, czyli zbiór wartości x, spełniających nierówności $a \leqslant x \leqslant b$.

Chcąc w przedziale (a, b) rozwijać naszą funkcyę na szereg wielomianów, musimy przedewszystkiem założyć, że jej mianownik, czyli wielomian $\psi(x)$, nie zamienia się w tym przedziale nigdzie na zero. Ze znanych twierdzeń Algebry wynika, że w takim razie znak funkcyi $\psi(x)$ musi być w przedziale (a, b) stały, a moduł jej stale niemniejszy od pewnej liczby dodatniej δ. Bez ujmy dla ogólności naszych rozważań możemy zakładać, że w naszym przedziale stale wielomian $\psi(x)$ jest dodatni, gdyż w przeciwnym razie wystarczyłoby pomnożyć licznik i mianownik naszej funkcyi przez -1.

Zakładamy więc, że dla $a \leqslant x \leqslant b$ mamy stale:

$$\psi(x) \geqslant \delta, \tag{2}$$

gdzie δ jest liczbą dodatnią, niezależną od x.

W przedziale skończonym wielomian całkowity jest zawsze funkcyą ograniczoną: możemy więc w każdym razie wyznaczyć taką liczbę dodatnią d, od x niezależną, że w naszym przedziale będzie stale:

$$\psi(x) \leqslant 2d + \delta. \tag{3}$$

Podobnież wyznaczymy liczbę $M > 0$, niezależną od x, taką, iż w całym naszym przedziale:

$$|\vartheta(x)| \leqslant M \tag{4}$$

Wobec nierówności (2) i (3) mamy w całym przedziale (a, b):

$$-d \leqslant d + \delta - \psi(x) \leqslant d,$$

skąd

$$\left|\frac{d+\delta-\psi(x)}{d+\delta}\right| \leqslant \frac{d}{d+\delta},$$

oraz

$$\left|\frac{d+\delta-\psi(x)}{d+\delta}\right|^m \leqslant \left(\frac{d}{d+\delta}\right)^m = \frac{1}{\left(1+\frac{\delta}{d}\right)^m} < \frac{1}{1+m\frac{\delta}{d}} < \frac{d}{m\delta} \tag{5}$$

Mamy, dalej, tożsamość:

$$\frac{\vartheta(x)}{\psi(x)} = \frac{\vartheta(x)}{d+\delta} \sum_{x=0}^{m-1} \left(\frac{d+\delta-\psi(x)}{d+\delta}\right)^x + \frac{\vartheta(x)}{\psi(x)} \left(\frac{d+\delta-\psi(x)}{d+\delta}\right)^m$$

(z warunkiem, że $(\ )^0$ mamy zastąpić przez 1).

Lecz, w myśl nierówności (2), (4) i (5):

$$\left|\frac{\vartheta(x)}{\psi(x)} \left(\frac{d+\delta-\psi(x)}{d+\delta}\right)^m\right| < \frac{Md}{m\delta^2}.$$

Mamy więc dla $a \leqslant x \leqslant b$ nierówność:

$$\left|\frac{\vartheta(x)}{\psi(x)} - \sum_{x=0}^{m=1} \frac{\vartheta(x)}{d+\delta} \left(\frac{d+\delta-\psi(x)}{d+\delta}\right)^x\right| < \frac{Md}{m\delta^2}, \tag{6}$$

przy wszelkiem naturalnem m.

Stąd w jednej chwili wynika rozwinięcie naszej funkcyi w przedziale (a, b) na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów całkowitych:

$$\frac{\vartheta(x)}{\psi(x)} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\vartheta(x)}{d+\delta} \left(\frac{d+\delta-\psi(x)}{d+\delta}\right)^x.$$

Mamy więc następujące

Twierdzenie. K a ż d a f u n k c y a w y m i e r n a, k t ó r e j m i a n o w n i k w e w n ą t r z d a n e g o s k o ń c z o n e g o p r z e d z i a ł u, a n i d l a j e g o g r a n i c, n i e z a m i e n i a s i ę n a z e r o, d a j e s i ę w t y m p r z e d z i a l e r o z w i n ą ć n a j e d n o s t a j n i e z b i e ż n y s z e r e g w i e l o m i a n ó w c a ł k o w i t y c h.

Przyjmijmy, w szczególności: $a = -s$, $b = s$,

$$\vartheta(x) = x[(s+x)^n - s^n], \quad \psi(x) = (s+x)^n + s^n,$$

gdzie s i n są dwie dane liczby naturalne.

Z łatwością sprawdzimy, że można tu przyjąć:

$$\delta = s^n, \quad d = 2^{n-1}s, \quad M = (2^n - 1)s^{n+1}.$$

Wobec nierówności (1) i (6) mamy więc:

$$\left|\,|x| - \sum_{x=0}^{m-1} \frac{x[(s+x)^n - s^n]}{(2^{n-1}+1)s^n} \left(\frac{2^{n-1}s - (s+x)^n}{(2^{n-1}+1)s^n}\right)^x\right| < \frac{2s}{\sqrt{n}} + \frac{2^{n-1}(2^n-1)s}{m} \tag{7}$$

— przy wszelkich naturalnych s, n, m, dla $-s \leqslant x \leqslant s$.

Niech teraz (a, b) oznacza dany przedział, ε — daną liczbę dodatnią. Wyznaczmy kolejno liczby naturalne s, n i m, tak aby spełnione były nierówności:

$$s \geqslant |a|, \quad s \geqslant |b|,$$

$$n \geqslant \frac{16s^2}{\varepsilon^2},$$

$$m \geqslant \frac{2^n(2^n-1)s}{\varepsilon},$$

oraz oznaczmy przez $W(x)$ wielomian całkowity

$$W(x) = \sum_{x=0}^{m-1} \frac{x[(s+x)^n - s^n]}{(2^{n-1}+1)s^n} \left(\frac{2^{n-1}s^n - (s+x)^n}{(2^{n-1}+1)s^n}\right)^x. \tag{8}$$

Będziemy mogli powiedzieć, że dla $a \leqslant x \leqslant b$ mamy stale:

$$\big|\,|x| - W(x)\big| < \varepsilon.$$

3. Rozwijanie funkcyi ciągłej na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów.

Połóżmy

$$\varphi(x) = \left|\frac{x+1}{2}\right| + \left|\frac{x-1}{2}\right| - |x| \tag{9}$$

Dla $x \leqslant -1$ mamy oczywiście:

$$\varphi(x) = -\frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{2} + x = 0;$$

dla $-1 \leqslant x \leqslant 0$:

$$\varphi(x) = \frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{2} + x = 1 + x;$$

dla $0 \leqslant x \leqslant 1$:

$$\varphi(x) = \frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{2} - x = 1 - x;$$

dla $x \geqslant 1$:

$$\varphi(x) = \frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{2} - x = 0.$$

Mamy więc:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } |x| \geqslant 1, \\ 1+x & \text{dla } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1-x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases} \tag{10}$$

Niech teraz $f(x)$ oznacza funkcyę dowolną, ciągłą dla

$$-1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Połóżmy przy wszelkiem danem naturalnem q:

$$f_q(x) = \sum_{p=-q}^{q} f\left(\frac{p}{q}\right) \varphi(qx - p). \tag{11}$$

W razie $|qx - p| \geqslant 1$ będzie, w myśl wzorów (10), czynnik $\varphi(qx-p)=0$; wystarczy więc, we wzorze (11) zatrzymać tylko te składniki, dla których p spełnia nierówności: $-1 < qx - p < 0$, lub nierówności: $0 \leqslant qx - p < 1$.

W pierwszym przypadku otrzymujemy dla p nierówności

$$qx < p \leqslant qx + 1, \quad \text{dające:} \quad p = \mathrm{E}\,qx + 1,$$

w drugim zaś przypadku mamy:

$$qx - 1 < p \leqslant qx, \quad \text{skąd:} \quad p = \mathrm{E}\,qx.$$

W myśl wzorów (10) odpowiednie wartości funkcyi φ będą:

$$\varphi(qx - \mathrm{E}\,qx - 1) = qx - \mathrm{E}\,qx, \quad \text{oraz} \quad \varphi(qx - \mathrm{E}\,qx) = 1 - qx + \mathrm{E}\,qx$$

Wzór (11) sprowadza się więc do wzoru:

$$f_q(x) = f\left(\frac{\mathrm{E}\,qx}{q}\right)(1 - qx + \mathrm{E}\,qx) + f\left(\frac{\mathrm{E}\,qx+1}{q}\right)(qx - \mathrm{E}\,qx)$$

$$= f\left(\frac{\mathrm{E}\,qx}{q}\right) + \left[f\left(\frac{\mathrm{E}\,qx+1}{q}\right) - f\left(\frac{\mathrm{E}\,qx}{q}\right)\right](qx - \mathrm{E}\,qx) \tag{12}$$

Załóżmy teraz, że q wzrasta nieograniczenie. Mamy oczywiście:

$$|qx - \mathrm{E}\,qx| < 1, \quad \left|\frac{\mathrm{E}\,qx}{q} - x\right| < \frac{1}{q}, \quad \frac{\mathrm{E}\,qx+1}{q} - \frac{\mathrm{E}\,qx}{q} = \frac{1}{q}.$$

Wobec tych nierówności oraz zakładanej ciągłości funkcyi $f(x)$ dla $-1 \leqslant x \leqslant 1$, można do danej liczby dodatniej ε dobrać liczbę q_0 taką, iżby dla $q > q_0$ było stale

$$\left|f\left(\frac{\mathrm{E}\,qx}{q}\right) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{oraz} \quad \left|f\left(\frac{\mathrm{E}\,qx+1}{q}\right) - f\left(\frac{\mathrm{E}\,qx}{q}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

skąd, wobec wzoru (12):

$$|f_q(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{dla} \quad |x| \leqslant 1, \quad q > q_0, \tag{13}$$

przyczem liczba q_0 nie zależy od x.

Dowodzi to, że ciąg $f_q(x)$ w przedziale $(-1, +1)$ jednostajnie zmierza do $f(x)$.

Przyjmijmy teraz, przy danem naturalnem q:

$$s = 2q, \qquad n = 16 s^2 q^4, \qquad m = 2^n (2^n - 1) s q^2$$

i wyznaczmy wielomian $W(x)$ ze wzoru (8). Dla $|x| \leqslant 1$ oraz $p = 0$, $\pm 1, \pm 2, \ldots \pm q$, będziemy oczywiście mieli:

$$\left|\frac{qx - p + 1}{2}\right| \leqslant s, \quad \left|\frac{qx - p - 1}{2}\right| \leqslant s, \quad |qx - p| \leqslant s,$$

zatem, w myśl wzoru (7):

$$\left|\left|\frac{qx - p \pm 1}{2}\right| - W\left(\frac{qx - p \pm 1}{2}\right)\right| < \frac{1}{q^2}$$

oraz

$$\left| \, | \, qx - p \, | - W(qx - p) \right| < \frac{1}{q^2},$$

skąd, oznaczając przez $P_{p,q}(x)$ wielomian całkowity

$$P_{p,q}(x) = W\left(\frac{qx-p+1}{2}\right) + W\left(\frac{qx-p-1}{2}\right) - W(qx-p),$$

możemy dla $|x| \leqslant 1$ napisać, wobec (9):

$$\left| \varphi(qx-p) - P_{p,q}(x) \right| < \frac{3}{q^2} \tag{14}$$

przy wszelkiem naturalnem q, oraz $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm q$.

Oznaczmy przez A granicę górną modułów funkcyi ciągłej $f(x)$ w przedziale $(-1, +1)$. Będzie stale $\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leqslant A$, zatem, wobec (11) i (14):

$$\left| f_q(x) - \sum_{p=-q}^{q} f\left(\frac{p}{q}\right) P_{p,q}(x) \right| < \frac{3A(2q+1)}{q^2} \tag{15}$$

Oznaczmy przez $\Pi_q(x)$ wielomian całkowity:

$$\Pi_q(x) = \sum_{p=-q}^{q} f\left(\frac{p}{q}\right) P_{p,q}(x).$$

Można będzie oczywiście wyznaczyć liczbę q_1, niezależną od x i taką, żeby dla $q > q_1$ było stale

$$\frac{3A(2q+1)}{q^2} < \varepsilon, \qquad \text{zatem } |f_q(x) - \Pi_q(x)| < \varepsilon.$$

Wobec nierówności (13) będziemy dla wszystkich q, większych jednocześnie od q_0 i q_1 mieli:

$$|f(x) - \Pi_q(x)| < 2\varepsilon,$$

co dowodzi, że ciąg wielomianów $\Pi_q(x)$ w przedziale $(-1, +1)$ jednostajnie zmierza do $f(x)$.

Stąd wnosimy natychmiast o rozwinięciu funkcyi $f(x)$ w przedziale $(-1, +1)$ na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów całkowitych:

$$f(x) = \Pi_1(x) + (\Pi_2(x) - \Pi_1(x)) + (\Pi_3(x) - \Pi_2(x)) + \ldots\ldots$$

Możemy więc wypowiedzieć następujące

Twierdzenie Weierstrassa. Każda funkcya $f(x)$, ciągła wewnątrz przedziału $(-1, +1)$ i dla jego granic, daje się w tym przedziale rozwinąć na jednostajnie zbieżny szereg wielomianów całkowitych.

Przejście od przedziału $(-1, +1)$ do jakiegokolwiek przedziału skończonego byłoby natychmiastowe.

Wzór

$$f(x) = \lim_{q=\infty} \sum_{p=-q}^{q} f\left(\frac{p}{q}\right) P_{p,q}(x)$$

nosi nazwę **ogólnego wzoru interpolacyjnego Borela** [1].

Wielomiany $P_{p,q}(x)$ mogą być wyznaczone raz na zawsze, a wzór Borela pozwala wyznaczać wartości każdej danej funkcyi ciągłej w przedziale $(-1, +1)$, jeżeli tylko znamy jej wartości dla argumentów wymiernych w tym przedziale. Podane wyżej wzory pozwoliłyby nam nawet wyraźnie wypisać wielomian $P_{p,q}(x)$.

Twierdzenie Weierstrassa i wzór interpolacyjny Borela dają się z łatwością uogólnić na funkcye wielu zmiennych. Rozpatrzymy bliżej tylko przypadek funkcyi dwuch zmiennych, pozostawiając zbadanie przypadku ogólnego czytelnikowi.

Niech $f(x, y)$ będzie funkcyą ciągłą dla $|x| \leqslant 1$ oraz $|y| \leqslant 1$ względem obu zmiennych.

Połóżmy:

$$f_q(x, y) = \sum_{p'=q}^{q} \sum_{p''=q}^{q} f\left(\frac{p'}{q}, \frac{p''}{q}\right) \varphi(qx - p') \varphi(qy - p'')$$

Z łatwością obliczymy, podobnie jak wyżej, że

$$f_q(x, y) = f\left(\frac{\mathrm{E}qx}{q}, \frac{\mathrm{E}qy}{q}\right)$$

$$+ (qx - \mathrm{E}qx)(1 - qy + \mathrm{E}qy) \left[f\left(\frac{\mathrm{E}qx+1}{q}, \frac{\mathrm{E}qy}{q}\right) - f\left(\frac{\mathrm{E}qx}{q}, \frac{\mathrm{E}qy}{q}\right) \right]$$

$$+ (1 - qx + \mathrm{E}qx)(qy - \mathrm{E}qy) \left[f\left(\frac{\mathrm{E}qx}{q}, \frac{\mathrm{E}qy+1}{q}\right) - f\left(\frac{\mathrm{E}qx}{q}, \frac{\mathrm{E}qy}{q}\right) \right]$$

[1] E. Borel, Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes. Paris 1905, p. 80.

$$+ (qx - \mathrm{E}qx)(qy - \mathrm{E}qy)\left[f\left(\frac{\mathrm{E}qx+1}{q}, \frac{\mathrm{E}qy+1}{q}\right) - f\left(\frac{\mathrm{E}qx}{q}, \frac{\mathrm{E}qy}{q}\right)\right]$$

skąd, wobec zakładanej ciągłości funkcyi $f(x, y)$, z łatwością wnosimy, że dla $|x| \leqslant 1$ oraz $|y| \leqslant 1$ funkcya $f_q(x, y)$ jednostajnie zmierza do $f(x, y)$. Przechodząc wreszcie od funkcyj $\varphi(qx - p')$ oraz $\varphi(qy - p'')$ do odpowiednich przybliżeń przez wielomiany, dojdziemy do wniosku, że do każdej danej liczby dodatniej ε można dobrać wielomian całkowity $P(x, y)$ taki, iż dla $|x| \leqslant 1$ oraz $|y| \leqslant 1$ stale:

$$|f(x, y) - P(x, y)| < \varepsilon.$$

Stąd wynika natychmiast twierdzenie Weierstrassa dla funkcyj dwuch zmiennych.

G. A. MILLER.

Extension of a group by operators of orders two and four.

(Rozszerzenie grupy za pomocą operatorów rzędów 2 i 4).

It frequently happens that a group H of order h is extended by means of operators of orders two or four so as to obtain a group G of order $g = 2h$. For instance, the alternating group of order 12 is extended by 6 operators of order 2 and 6 operators of order 4 to obtain the symmetric group of order 24, and the cyclic group of order h may be extended by h operators of order 2 to obtain the dihedral group of order $2h$. The present article is devoted to a study of some groups which may be extended by operators of orders 2 or 4 so as to obtain a group whose order is the double of the order of the original group. Many questions relating to such groups remain unsolved, and the present brief article deals only with a few of the simpler cases.

A necessary and sufficient condition that a group H of order h may be extended by means of h operators of order 2 so as to obtain a group of order $2h$ is that H be abelian. This theorem results direclty from the known fact that the abelian group is the only group in which all the operators correspond to their inverses in an automorphism of the group. Hence the theory of extending groups by means of operators of order 2 is very simple, but if we extend a group by means of operators of order 4, or by means of operator of orders 2 and 4 the matter becomes very much more difficult.

Among the simplest cases is the one when H is extended by means of h operators of order 4 which have a common square. If the group G is obtained in this way it involves the group of order 2 generated by this common square as an invariant subgroup, and the corresponding quotient group co-