Über polynomische Entwickelungen.

Von

Georg Faber in München.

Der Satz, daß eine analytische Funktion $F(x)$, die in einem einfach zusammenhängenden von einer stetigen Kurve begrenzten endlichen Gebiete S der komplexen Ebene regulär ist, daselbst durch eine Reihe von Polynomen dargestellt werden kann, ist schon mehrfach bewiesen worden*); doch war die große Mannigfaltigkeit und Willkür, die bei diesen Entwickelungen noch möglich ist, einem genaueren Studium besonderer polynomischer Reihen eher hinderlich als förderlich.

Im folgenden werde ich nun den obigen Satz auf einem andern Wege beweisen, indem ich von der speziellen Annahme ausgehe, das Gebiet S sei ein einfach zusammenhängendes ganz im Endlichen gelegenes Kontinuum, dessen Begrenzung C aus einem *einzigen regulären analytischen Zuge***) bestehe. Unter dieser Voraussetzung zeige ich:

Jede in S reguläre analytische Funktion $F(x)$ läßt sich daselbst auf eine Weise durch eine Reihe

$$\sum_0^\infty a_\nu P_\nu(x) \tag{1}$$

darstellen; $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \cdots$ bedeutet dabei eine unendliche Reihe von Polynomen ($P_i(x)$ vom i^{ten} Grade; $P_0 = -1$); und zwar sollen die Koeffizienten der Potenzen von x in jenen Polynomen ausschließlich von dem

*) cf. Runge, acta math. 6 (1885); Hilbert, Gött. Nachr. 1897. Verwandtschaft mit den oben folgenden Sätzen zeigen insbesondere auch diejenigen, die Herr Painlevé am 24. Jan. 1898 der französ. Akademie ohne Beweis mitgeteilt hat.

**) Die Definition hievon s. u. a. in Picard's traité d'an. t. II. chap. X, 2; diesem Kapitel (s. bes. §§ 4 u. 7) entnehme man auch den Beweis des folgenden von Herrn Schwarz herrührenden Satzes, auf den oben sogleich Bezug genommen wird: Die Funktion $\psi(z)$, welche ein Gebiet, zu dessen Begrenzung das reguläre analytische Kurvenstück C gehört, auf einen Kreis abbildet, ist regulären Verhaltens und umkehrbar in allen inneren Punkten von C.

betrachteten Regularitätsbereiche S, dagegen die a_ν von der besonderen Wahl der zu entwickelnden Funktion abhängen.

Besteht das Gebiet S aus dem Innern eines Kreises mit dem Mittelpunkte $x = a$, so reduziert sich $P_\nu(x)$ auf $-(x-a)^\nu$; noch engere Beziehungen zwischen den Reihen (1) und der gewöhnlichen Taylorschen Reihe werden sich im folgenden ergeben.

Es sei nun

$$z = \psi(\tau) \tag{2}$$

eine Funktion, welche das unendliche Gebiet der z-Ebene außerhalb C auf das Innere des Einheitskreises der τ-Ebene abbildet, und zwar so, daß dem Punkte $z = \infty$ der Punkt $\tau = 0$ entspricht. Die Funktion $\psi(\tau)$ hat demnach einen einfachen Pol im Nullpunkte, verhält sich aber sonst regulär im Einheitskreise; $\psi(\tau)$ läßt sich also darstellen in der Form:

$$z = \psi(\tau) = \frac{a}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau), \tag{3}$$

wo $\mathfrak{P}(\tau)$ eine Potenzreihe von τ mit nur positiven Potenzen bedeutet, die für $|\tau| < 1$ konvergiert. Da wir aber die Kurve C als aus einem einzigen regulären analytischen Zuge bestehend vorausgesetzt haben, kann $\mathfrak{P}(\tau)$ auf dem Einheitskreise keinen singulären Punkt haben*); es konvergiert daher $\mathfrak{P}(\tau)$ für $|\tau| < 1 + \varrho_1$ $(0 < \varrho_1)$, und es läßt sich ein ϱ $(0 < \varrho \leqq \varrho_1)$ angeben, sodaß, falls $\sigma < \varrho$ ist den Kreisen

$$|\tau| = 1 + \sigma$$

der τ-Ebene in der z-Ebene geschlossene Kurven $C_{1+\sigma}$ ohne Doppelpunkt entsprechen, die ganz innerhalb $C (= C_{1+0})$ verlaufen. (Den Kreisen $|\tau| = 1 - \sigma'$ $(0 < \sigma' < 1)$ entsprechen ganz außerhalb C verlaufende Kurven $C_{1-\sigma'}$.)

Falls $F(x)$ eine im Innern von S reguläre Funktion bedeutet, ist nach dem Cauchyschen Integralsatze

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C'} \frac{F(z)}{z - x}\, dz \tag{4}$$

für jeden Punkt im Innern von C', falls C' seinerseits wieder ganz innerhalb S verläuft; für C' werde eine der obigen Kurven $C_{1+\sigma}$ gewählt. Das Integral auf der rechten Seite von (4) transformiert man, indem man für z aus (2) $\psi(\tau)$ einsetzt, dadurch geht (4) über in

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K_{1+\sigma}} \frac{F(\psi\tau)}{\psi(\tau) - x} \frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\, d\tau; \tag{5}$$

---

*) S. die Anm. **) p. 389.

Die Integration ist zu erstrecken in der τ Ebene über die Peripherie des Kreises $|\tau| = 1 + \sigma$ und zwar im Sinne des Uhrzeigers.

Ehe ich auf diese Formel zurückkomme, schalte ich eine Untersuchung der in (5) unter dem Integralzeichen vorkommenden Funktion τ und x:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{\psi(\tau) - x} \tag{6}$$

ein. Es ist dies die erzeugende Funktion für unsere Polynome, welche bei der Entwickelung von (6) nach Potenzen von τ als Koeffizienten auftreten. $\psi(\tau)$ wird nie gleich x, solange, wie vorausgesetzt werden möge, x innerhalb C_ω $(0 < \omega < 1 + \varrho)$ und $|\tau| < \omega$ bleibt*). Im Punkte $\tau = 0$ hat $\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}$ einen Pol zweiter Ordnung, während $\frac{1}{\psi(\tau) - x}$ dort von der ersten Ordnung Null wird; demnach hat der Ausdruck (6), als Funktion von τ betrachtet einen einfachen Pol im Nullpunkte — und zwar mit dem Residuum -1 —, ist aber im übrigen regulär mindestens in einem mit dem Radius ω um den Nullpunkt beschriebenen Kreise. Man hat daher die in diesem Kreise giltige Entwickelung:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{\psi(\tau) - x} = -\frac{1}{\tau} + \sum_0^\infty {}^\nu P_{\nu+1}(x)\,\tau^\nu. \tag{7}$$

Es ist leicht zu zeigen, daß P_ν ein Polynom ν^{ten} Grades in x ist; wenn nämlich allgemein $\mathfrak{P}(\tau)$, $\mathfrak{P}_1(\tau)$, $\mathfrak{P}_2(\tau)$, $\cdots$ nur positive Potenzen enthaltende Potenzreihen von τ bedeuten, so ist:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{\psi(\tau) - x} &= \left(-\frac{a}{\tau^2} + \mathfrak{P}_1(\tau)\right) \cdot \frac{1}{\frac{a}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau) - x} \\ &= -\frac{1}{\tau} + \frac{\tau\mathfrak{P}_1(\tau) + \mathfrak{P}(\tau) - x}{a + \tau\mathfrak{P}(\tau) - \tau x} = -\frac{1}{\tau} + \frac{\mathfrak{P}_2(\tau) - x}{a + \tau\mathfrak{P}(\tau) - \tau x}. \end{aligned} \tag{8}$$

In dem Nenner auf der rechten Seite von (8) kommt x einmal mit τ multipliziert, sonst aber nicht mehr vor; entwickelt man daher $\frac{1}{a + \tau\mathfrak{P}(\tau) - \tau x}$ nach Potenzen von τ, so enthält der Koeffizient von τ^μ als höchste Potenz von x die μ^{te}; multipliziert man noch mit dem Zähler $\mathfrak{P}_2(\tau) - x$, so steigt der nun entstehende Koeffizient von τ^μ i. e. $P_{\mu+1}(x)$ in x bis zum $(\mu + 1)^{\text{ten}}$ Grade an.

Die Anwendung des Cauchyschen Koeffizientensatzes auf die Reihe

---

*) Es sei nochmals daran erinnert, daß C_ω diejenige Kurve der x-Ebene bedeutet, welche vermöge der Relation $x = \psi(t)$ dem um den Nullpunkt der t-Ebene mit dem Radius ω beschriebenen Kreise K_ω entspricht.

in (7) ergibt, falls G eine bestimmte endliche Zahl bedeutet, und die Bedingung $0 < \omega' < \omega < 1 + \varrho$ erfüllt ist, für alle x innerhalb und auf C_ω:

$$(9) \qquad |P_{\nu+1}(x)| < \frac{G}{(\omega')^\nu}.$$

Daraus folgt schon, daß die Reihe auf der rechten Seite von (7) für alle x innerhalb und auf C_ω und für alle τ, die der Bedingung

$$0 \leqq |\tau| \leqq \omega' < \omega$$

genügen, *gleichmäßig* konvergiert; hievon werden wir später bei Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes Gebrauch machen.

Zu einer in gewisser Hinsicht genaueren Aussage, als sie in Ungleichung (9) enthalten ist, und zugleich zu einer *unteren* Grenze für $|P_\nu(x)|$ gelangt man folgendermaßen:

Man betrachte in dem Gebiete $|t| < 1 + \varrho$, $|\tau| < 1 + \varrho$ die Funktion der beiden unabhängigen Variabeln t und τ:

$$(10) \qquad \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\psi(\tau) - \psi(t)}.$$

Gibt man der Variablen τ einen endlichen festen Wert, dem absoluten Betrage nach $< 1 + \varrho$, so hat (10) als Funktion von t betrachtet, im Punkte $t = \tau$ einen einfachen Pol, während die Funktion von t:

$$(10\text{b}) \qquad \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\psi(\tau) - \psi(t)} - \frac{1}{\tau - t}$$

für irgend ein τ $(0 < |\tau| < 1 + \varrho)$ und alle $|t| < 1 + \varrho$ regulären Verhaltens ist.

In ihrer Abhängigkeit von τ betrachtet ist die Funktion (10b) überall regulär außer im Nullpunkte, wo sie einen einfachen Pol mit dem Residuum -1 hat, was auch t sein möge $(0 < |t| < 1 + \varrho)$. Die Funktion der zwei Variabeln t und τ

$$(10\text{c}) \qquad \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \frac{1}{\psi(\tau) - \psi(t)} - \frac{1}{\tau - t} + \frac{1}{\tau}$$

ist daher regulär in dem Kontinuum $|\tau| < 1 + \varrho$, $|t| < 1 + \varrho$*), also eine nur positive Potenzen enthaltende Reihe

$$(10\text{d}) \qquad \mathfrak{P}(t, \tau) = \sum_0^\infty {}^\mu \, \mathfrak{P}_{\mu+1}(t)\, \tau^\mu;$$

es ist also

$$(11) \qquad \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{\psi(\tau) - \psi(t)} = \frac{1}{\tau - t} - \frac{1}{\tau} + \mathfrak{P}(t, \tau).$$

*) Bedenken könnte nur noch der Punkt $t = \tau = 0$ erregen; diese fallen aber weg, da bei Funktionen mehrerer Variabler isolierte Singularitäten nicht auftreten können.

Setzt man ferner $|t| > |\tau|$ voraus, so gilt die Entwickelung:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{1}{\psi(\tau)-\psi(t)} = -\frac{1}{\tau} + \sum_0^\infty{}^\mu \left(-\frac{1}{t^{\mu+1}} + \mathfrak{P}_{\mu+1}(t)\right)\tau^\mu. \tag{12}$$

Substituiert man hier auf der linken Seite x für $\psi(t)$ — x ist ein Punkt außerhalb $C_{1+\varrho}$ —, und vergleicht die Potenzen von τ in dieser Entwickelung mit derjenigen der oben gefundenen Formel:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\,\frac{1}{\psi(\tau)-x} = -\frac{1}{\tau} + \sum_0^\infty{}^\mu P_{\mu+1}(x)\,\tau^\mu, \tag{7}$$

so findet man

$$P_\mu(x) = -\frac{1}{t^\mu} + \mathfrak{P}_\mu(t) \quad (0<|t|<1+\varrho;\ x \text{ außerhalb } C_{1+\varrho}). \tag{13}$$

Da die Funktion $\mathfrak{P}(t, \tau)$ für alle $|t| < 1+\varrho$, $|\tau| < 1+\varrho$ regulären Verhaltens ist, so existiert für alle t und τ eines Bereiches T, der ganz innerhalb dieses Kontinuums liegt, eine endliche obere Grenze G, sodaß

$$|\mathfrak{P}(t,\tau)| < G \tag{14}$$

ist.

Man kann T so wählen, daß das Gebiet $|t| < 1+\varrho'$, $|\tau| < 1+\varrho'$, wenn nur $\varrho' < \varrho$, ganz innerhalb T liegt. Aus dem Cauchyschen Koeffizientensatze schließt man daher:

$$|\mathfrak{P}_\mu(t)| < \frac{G}{(1+\varrho')^\mu}. \tag{15}$$

Wenn ω um eine endliche Zahl kleiner als $1+\varrho$ ist, so kann man sich ϱ' so gewählt denken, daß auch $\omega < 1+\varrho' < 1+\varrho$ ist, daß also $\alpha = \frac{\omega}{1+\varrho'}$ ein echter Bruch ist. Dies vorausgesetzt folgt aus Gleichung (13) und Ungleichung (15) für alle x auf C_ω:

$$\left(\frac{1}{\omega}\right)^\mu - \frac{G}{(1+\varrho')^\mu} < |\mathfrak{P}_\mu(x)| < \left(\frac{1}{\omega}\right)^\mu + \frac{G}{(1+\varrho')^\mu} \tag{16}$$

oder

$$\left(\frac{1}{\omega}\right)^\mu (1-G\alpha^\mu) < |P_\mu(x)| < \left(\frac{1}{\omega}\right)^\mu (1+G\alpha^\mu). \tag{17}$$

Wählt man nun μ so groß, daß $G\alpha^\mu$ kleiner als $\delta\omega$ wird, wo δ eine gegebene beliebig kleine positive Zahl bedeutet, so erhält man, wenn man aus den drei Gliedern der Ungleichung (17) die μ^{te} Wurzel zieht und die für positive $\varepsilon < 1$ giltigen Formeln $1-\varepsilon < (1-\varepsilon)^{\frac{1}{\mu}}$; $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\mu}} < 1+\varepsilon$ beachtet:

(18) $$\frac{1}{\omega} - \delta < |P_\mu(x)|^{\frac{1}{\mu}} < \frac{1}{\omega} + \delta$$

d. h. aber

(19) $\lim\limits_{\mu=\infty} \sqrt[\mu]{|P_\mu(x)|} = \frac{1}{\omega}$ *gleichmäßig für alle x auf C_ω* $(0 < \omega < 1 + \varrho)$.

Daneben beachte man Ungleichung (9), die sofort zur folgenden Aussage führt:

(20) $\overline{\lim\limits_{\mu=\infty}} \sqrt[\mu]{|P_\mu(x)|} < \frac{1}{\omega}$ *für irgend ein x im Innern von C_ω.*

§ 2.

Es folgt nun eine Untersuchung von Reihen

(21) $$\sum a_\nu P_\nu(x).$$

Die Gleichung (19) und Ungleichung (20) zeigen schon, daß eine solche Reihe die wesentlichsten Konvergenzeigenschaften mit der Potenzreihe

$$\sum a_\nu x^\nu$$

gemein haben muß. Ich kann mich daher beim Beweise der folgenden Sätze kurz fassen, da dieselben großenteils nur Übertragungen von in der Theorie der Taylorschen Reihe geläufigen Schlüssen sind.

Es kommt vor allem auf den $\overline{\lim} \sqrt[\nu]{|a_\nu|}$ an. Erreicht oder überschreitet derselbe den Wert $1 + \varrho$, so läßt sich über die Konvergenz der Reihe $\sum a_\nu P_\nu(x)$ einstweilen gar nichts aussagen. Ist derselbe aber gleich ω, wo $\omega < 1 + \varrho$ ist, so folgt aus den Relationen (19) und (20) sofort*):

Die Reihe $\sum a_\nu P_\nu(x)$ konvergiert absolut und gleichmäßig in jedem Gebiete, das ganz innerhalb C_ω liegt und stellt also daselbst eine analytische Funktion dar; außerhalb C_ω divergiert $\sum a_\nu P_\nu(x)$, während sich über das Verhalten auf C_ω ohne spezielle Annahme über die a_ν keine Aussagen machen lassen (genau wie bei der gewöhnlichen Potenzreihe).

Umgekehrt läßt sich auch jede innerhalb C_ω reguläre analytische Funktion $F(x)$ in eine Reihe $\sum a_\nu P_\nu(x)$ entwickeln.

Zum Beweise, der unter der Annahme $\omega = 1$ geführt werden möge, gehe man auf die Formel (5) p. 390 zurück:

(5) $$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{K_{1+\sigma}} \frac{F(\psi\tau)}{\psi(\tau) - x} \frac{d\psi(\tau)}{d\tau} d\tau.$$

---

*) cf. Hadamard, la série de Taylor p. 18.

Nach dem p. 392 Bewiesenen konvergiert für irgend ein x im Innern von $C_{1+\sigma}$ und für alle τ vom absoluten Betrage $1+\sigma$ die Reihe

$$\frac{1}{\psi(\tau)-x}\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}=-\frac{1}{\tau}+\sum_0^\infty{}^\nu P_{\nu+1}(x)\,\tau^\nu \tag{7}$$

gleichmäßig.

Setzt man daher die Reihe auf der rechten Seite von (7) in (5) ein, so darf man gliedweise integrieren und erhält:

$$F(x)=\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu P_\nu(x), \tag{22}$$

$$a_\nu=\frac{1}{2\pi i}\int_{K_{1+\sigma}} F(\psi(\tau))\,\tau^{\nu-1}\,d\tau \tag{23}$$

zunächst für alle x im Innern von $C_{1+\sigma}$; doch gilt die Entwickelung (22) auch für alle x im Innern von $C\ (=C_1)$; denn einerseits kann σ beliebig klein gewählt werden, andrerseits ist der Wert des Integrals (23) für a_ν unabhängig davon, über welchen Kreis $K_{1+\sigma}$ $(0<\sigma<\varrho)$ es geführt wird; denn die Integranden sind in dem Kreisringe $1<|\tau|<1+\varrho$ reguläre analytische Funktionen von τ.

Ferner behaupte ich: *Die innerhalb C_ω $(0<\omega<1+\varrho)$ giltige Entwickelung*

$$F(x)=\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu P_\nu(x) \tag{22}$$

ist nur auf eine Weise möglich; d. h. besteht Gleichung (22) und gleichzeitig Gleichung:

$$F(x)=\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu' P_\nu(x), \tag{22b}$$

so folgt darans

$$a_\nu=a_\nu' \qquad (\nu=0,1,2,\cdots). \tag{24}$$

Führt man in (22) und (22b) für x vermöge der Substitution

$$x=\psi(t)=\frac{a}{t}+\mathfrak{P}(t) \qquad (\omega<|t|<1+\varrho)$$

die Variable t ein, wodurch $P_\nu(x)$ nach (13) p. 393 übergeht in $\frac{-1}{t^\nu}+\mathfrak{P}_\nu(t)$, so erhält man durch Gleichsetzen der rechten Seiten von (22) und (22b) die Identität:

$$\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu\left(\frac{-1}{t^\nu}+\mathfrak{P}_\nu(t)\right)=\sum_0^\infty{}^\nu a_\nu'\left(\frac{-1}{t^\nu}+\mathfrak{P}_\nu(t)\right) \qquad (\omega<|t|<1+\varrho). \tag{25}$$

Beachtet man noch, daß die Reihen

$$\sum a_\nu P_\nu(x) = \sum a_\nu \left(-\frac{1}{t^\nu} + \mathfrak{P}_\nu(t)\right)$$

und

$$\sum a_\nu' P_\nu(x) = \sum a_\nu' \left(\frac{-1}{t^\nu} + \mathfrak{P}_\nu(t)\right)$$

im wesentlichen wie Potenzreihen, also jedenfalls für irgend welche t von gleichem zwischen ω und $1+\varrho$ liegenden absoluten Betrage *gleichmäßig* konvergieren, so lehrt der Weierstraßsche Doppelreihensatz, daß man die rechte und linke Seite von (25) je in eine Laurentsche Reihe

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{\nu} A_\nu t^\nu \tag{26}$$

entwickeln darf, und da die Entwickelung in eine Laurentsche Reihe bekanntlich nur auf eine Weise möglich ist, müssen die Koeffizienten A_ν die gleichen sein, ob man nun durch Entwickelung der rechten oder der linken Seite von (25) zu (26) gelangt ist. Nun ergibt aber die linke Seite von (25)

(26b) $\quad A_{-\nu} = -a_\nu,\quad$ die rechte dagegen
$\quad A_{-\nu} = -a_\nu',$

woraus die behauptete Identität $a_\nu = a_\nu'$ folgt.

Daraus schließt man weiter:

Die durch die im Innern von C_ω konvergente außerhalb divergente Entwickelung $\sum a_\nu P_\nu(x)$ dargestellte Funktion $F(x)$ hat auf C_ω mindestens eine singuläre Stelle. Denn wäre dies nicht der Fall, so wäre $F(x)$ im Innern einer C_ω ganz umschließenden Kurve $C_{\omega'}$ $(\omega' < \omega)$ regulär und könnte daher nach dem Satze p. 394 durch eine innerhalb $C_{\omega'}$ konvergente Reihe $\sum a_\nu' P_\nu(x)$ dargestellt werden, die nach dem vorigen Satze mit der Reihe $\sum a_\nu P_\nu(x)$ identisch sein müßte, was der Voraussetzung, daß $\sum a_\nu P_\nu(x)$ nur im Innern von C_ω konvergiert, widerstreitet.

Die Ableitungen der Funktion $F(x) = \sum a_\nu P_\nu(x)$ können durch gliedweise Differentiation erhalten werden:

$$F'(x) = \sum a_\nu P_\nu'(x); \qquad F''(x) = \sum a_\nu P_\nu''(x) \quad \text{usw.} \tag{27}$$

Zum Beweise beachte man, daß

$$F'(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{1+\sigma}} \frac{F(z)}{(z-x)^2}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{K_{1+\sigma}} \frac{F(\psi(\tau))}{(\psi(\tau)-x)^2}\,\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\,d\tau$$

ist, und daß für irgend ein x im Innern von $C_{1+\sigma}$ und für alle τ auf $K_{1+\sigma}$ die Reihe

$$(28)\qquad \frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\,\frac{1}{(\psi(\tau)-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{1}{\psi(\tau)-x}\right) = \sum \frac{dP_{\nu+1}(x)}{dx}\,\tau^\nu$$

gleichmäßig konvergiert. Man erhält daher für die Funktion $F'(x)$ eine nach Polynomen $P_\nu'(x)$ fortschreitende Reihe mit den Koeffizienten a_ν, analog für $F''(x)$ usw. Jedem der vorhergehenden Sätze über Reihen $\sum a_\nu P_\nu(x)$ steht ein übereinstimmender über Reihen

$$\sum a_\nu P_\nu'(x),\quad \sum a_\nu P_\nu''(x) \text{ usw.}$$

zur Seite.

Hiermit ist übrigens die Möglichkeit von Polynomenfolgen, die zu derartigen Entwickelungen Anlaß geben, noch lange nicht erschöpft. Bedeutet

$$(29)\qquad \mathfrak{P}(\tau) = c_0 + c_1\tau + c_2\tau^2 + \cdots,$$

eine beliebige für $|\tau| < 1+\varrho$ konvergierende Potenzreihe, so hätte man z. B. auch

$$(30)\qquad \tau\cdot\mathfrak{P}(\tau)\,\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{1}{\psi(\tau)-x}$$

als erzeugende Funktion gewisser Polynome

$$(31)\qquad \Pi_\nu(x) = c_0P_\nu(x) + c_1P_{\nu-1}(x) + \cdots + c_{\nu-1}P_1(x) + c_\nu P_0$$

wählen können, in derselben Weise wie oben $\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{1}{\psi(\tau)-x}$ die erzeugende Funktion der $P_\nu(x)$ war. Die Polynome $\Pi_\nu(x)$ haben mit den $P_\nu(x)$ viele Eigenschaften gemein und sind insbesondere in gleicher Weise zur Entwickelung analytischer Funktionen in Reihen $F(x) = \sum \alpha_\nu P_\nu(x)$ brauchbar; doch sind hier im allgemeinen die Koeffizienten α_ν nicht eindeutig bestimmt*).

Es scheint hier vielmehr folgender Satz zu bestehen, dessen vollständiger Beweis mir allerdings noch nicht gelungen ist.

Hat $\mathfrak{P}(\tau)$ für $0 < |\tau| < 1+\varrho$ n Nullstellen mit den absoluten Beträgen $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$, so gibt es gerade n von einander unabhängige**) Entwickelungen der Null in Reihen $\sum \alpha_\nu \Pi_\nu(x)$, deren Konvergenzgrenzen resp. die Kurven $C_{\omega_1}, C_{\omega_2}, \cdots, C_{\omega_n}$ sind. Im Falle also $\mathfrak{P}(\tau)$ sich auf die Form $\tau^\nu e^{\mathfrak{P}_1(\tau)}$ ($|\tau| < 1+\varrho$) bringen läßt, was z. B. für $\mathfrak{P}(\tau) = \frac{1}{\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}}$ zutrifft,

*) Man vergleiche damit die Entwickelungen und Sätze des Herrn Frobenius, Crelles Journ. 73 (1871).

**) Definition bei Frobenius a. a. O.

wäre auch jetzt die Entwickelung einer Funktion $F(x)$ in eine Reihe $\sum \alpha_\nu \Pi_\nu(x)$ nur auf eine Weise möglich.

Endlich behaupte ich

Eine mit willkürlichen Koeffizienten a_ν, die nur der Bedingung

$$\overline{\lim} \sqrt[\nu]{|a_\nu|} = \omega < 1 + \varrho$$

zu genügen haben, angeschriebene Reihe $\sum a_\nu P_\nu(x)$ hat die Kurve C_ω zur natürlichen Grenze.

Da die mit willkürlichen Koeffizienten angeschriebene Potenzreihe $\sum a_\nu t^{-\nu}$ stets ihren Konvergenzkreis zur natürlichen Grenze hat, ist dieser Satz eine unmittelbare Konsequenz des folgenden:

Betrachtet man gleichzeitig die innerhalb C_ω giltige Entwickelung:

$$F(x) = \sum a_\nu P_\nu(x) \tag{32}$$

und die außerhalb K_ω konvergente Potenzreihe:

$$\Phi(t) = \sum a_\nu t^{-\nu} \tag{33}$$

und läßt man durch die Relation $x = \psi(t)$ den Kreis K_ω und die Kurve C_ω einander punktweise entsprechen, *so ist irgend ein Punkt x_0 auf C_ω dann und nur dann ein singulärer für $F(x)$, wenn der ihm entsprechende Punkt t_0 ein singulärer für $\Phi(t)$ ist.*

Und zwar entspricht einem Pole n^{ter} Ordnung ein ebensolcher, einer wesentlich singulären Stelle wieder eine wesentlich singuläre Stelle und einem Verzweigungspunkte n^{ter} oder unendlich hoher Ordnung wieder ein solcher n^{ter} resp. unendlich hoher Ordnung.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich wieder durch die Einführung der Variabeln t in $\sum a_\nu P_\nu(x)$ vermöge der Substitution

$$x = \frac{a}{t} + \mathfrak{P}(t).$$

Man erhält (cf. p. 396):

$$\sum a_\nu P_\nu(x) = -\sum a_\nu t^{-\nu} + \mathfrak{P}_1(t) = -\Phi(t) + \mathfrak{P}_1(t), \tag{34}$$

wo $\mathfrak{P}_1(t)$ für $|t| < 1 + \varrho$ und $\Phi(t)$ für $|t| > \omega$ konvergiert.

Liegt t_0 auf K_ω und ist $x_0 = \psi(t_0)$, so gilt in einem gewissen Kreise um den Punkt $t = t_0$ die Entwickelung

$$x - x_0 = \alpha_1(t - t_0) + \alpha_2(t - t_0)^2 + \cdots \tag{35}$$

($\alpha_1 \neq 0$, da die Konformität der Abbildung im Bereiche der Kurve C_ω nicht unterbrochen ist).

Da $\mathfrak{P}_1(t)$ für $|t| < 1 + \varrho$ konvergiert, so kann man $\mathfrak{P}_1(t)$ jedenfalls nach Potenzen von $(t - t_0)$ entwickeln (da ja $|t_0| = \omega < 1 + \varrho$): $\mathfrak{P}_1(t) = \mathfrak{P}_1(t \mid t_0)$.

Das gleiche gilt von $\Phi(t)$, wenn der Punkt $t = t_0$ ein regulärer für $\Phi(t)$ ist. Es gilt also in letzterem Falle (s. 34):

$$F(x) = \sum a_\nu P_\nu(x) = \mathfrak{P}_2(t-t_0). \tag{36}$$

Nun läßt sich die Gleichung (35) nach $(t-t_0)$ auflösen, wodurch man erhält:

$$t - t_0 = \beta_1(x-x_0) + \beta_2(x-x_0)^2 + \cdots \tag{37}$$

für eine gewisse Umgebung des Punktes $x = x_0$ $\left(\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1}\text{ usw.}\right)$.

Führt man diesen Wert von $t - t_0$ in $\mathfrak{P}_2(t-t_0)$ (36) ein, so erhält man für $F(x) = \sum a_\nu P_\nu(x)$ eine nach steigenden Potenzen von $(x-x_0)$ fortschreitende in einem gewissen Bezirke konvergente Reihe. Man sieht also $x = x_0$ ist für $F(x)$ ein regulärer Punkt, falls es $t = t_0$ für $\Phi(t)$ ist,

Geht man umgekehrt von der Voraussetzung aus, daß sich $F(x)$ nach steigenden Potenzen von $(x-x_0)$, also auch von $t - t_0$ entwickeln läßt, so ergibt sich das gleiche von $\Phi(t) = -F(x) + \mathfrak{P}_1(t \mid t_0)$.

Demnach sind die Punkte t_0 für $\Phi(t)$ und x_0 für $F(x)$ gleichzeitig regulär oder singulär. Ist ein ganzes Stück des Kreises K_ω regulär oder singulär, so gilt das gleiche von dem entsprechenden Stücke der Kurve C_ω.

Statt wie oben geschehen anzunehmen, daß $\Phi(t)$ sich im Punkte $t = t_0$ regulär verhält, hätte man eine Entwickelung der Form

$$\sum_{-n}^{\infty}{}^{\nu} c_\nu(t-t_0)^\nu \text{ oder der Form } \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} c_\nu(t-t_0)^\nu \text{ oder eine Reihe } \sum c_\nu(t-t_0)^{\frac{\nu}{n}} \tag{38}$$

voraussetzen können und hätte genau wie oben für $F(x)$ Reihen

$$\sum_{-n}^{\infty}{}^{\nu} c_\nu'(x-x_0)^\nu \quad \text{resp.} \quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} c_\nu'(t-t_0)^\nu \quad \text{resp.} \quad \sum c_\nu'(t-t_0)^{\frac{\nu}{n}} \tag{39}$$

gefunden und umgekehrt. Man schließt daraus, daß nur gleichzeitig $F(x)$ in x_0 und $\Phi(t)$ in t_0 einen Pol oder einen Verzweigungspunkt n^{ter} Ordnung oder eine wesentlich singuläre Stelle haben können.

Falls endlich $t = t_0$ ein isolierter Verzweigungspunkt unendlich hoher Ordnung für $\Phi(t)$ ist, so bleibt für $F(x)$ nur das gleiche Verhalten an der Stelle $x = x_0$ übrig. Damit ist der in Rede stehende Satz bewiesen*).

---

*) Es läßt sich noch zeigen, daß wenn $\Phi(t)$ in einem Punkte des Konvergenzkreises K_ω konvergiert, $F(x)$ in dem entsprechenden Punkte C_ω ebenfalls konvergiert und umgekehrt (cf. (13) und (15)). Auch der Abelsche Satz und dessen von Herrn Stolz gegebene Verallgemeinerung über die gleichmäßige Konvergenz bis in die Grenze hinein lassen sich ohne besondere Schwierigkeit übertragen (Abel, Oeuvres I p. 223; Stolz, Schlömilchs Z. 29, p. 127). Ich unterdrücke der Kürze halber diese Beweise.

Beispiele. Wir haben Ausdrücke der Form

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{1}{\psi(\tau)-x}+\frac{1}{\tau}$$

wo $\psi(t)=\frac{a}{\tau}+\mathfrak{P}(\tau)$ ist, nach Potenzen von τ zu entwickeln. Der einfachste Fall wäre $\mathfrak{P}(\tau)=\text{const.}=b$ zu setzen; $z=\psi(\tau)$ ist dann eine lineare Funktion von τ und das Innere des Einheitskreises der τ-Ebene wird auf das Äußere eines Kreises K mit dem Mittelpunkte $x=b$ der x-Ebene konform abgeleitet. Die auf diese Weise sich ergebende polynomische Entwickelung für das Innere von K ist mit der Taylorschen Reihe identisch; es ist nämlich:

$$\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{1}{\psi(\tau)-x}+\frac{1}{\tau}=-\frac{\frac{x-b}{a}}{1-\tau\frac{x-b}{a}},$$

also

$$P_\nu(x)=-\frac{(x-b)^\nu}{a^\nu}.$$

Betrachtet man dagegen den nächst einfachen Ansatz:

$$z=\psi(\tau)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau}+\tau\right),$$

so entspricht dem Innern der Kreise $|\tau|=\text{const}\ (<1)$ das Äußere von konfokalen Ellipsen der z-Ebene mit den Brennpunkten $+1$ und -1; setzt man also

$$f(\tau)=\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\cdot\frac{1}{\psi(\tau)-x}+\frac{1}{\tau}=\sum_0^\infty{}_\nu P_{\nu+1}(x)\,\tau^\nu,$$

so läßt sich jede im Inneren einer Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 reguläre analytische Funktion in eine Reihe $\sum\limits_0^\infty{}_\nu a_\nu P_\nu(x)$ entwickeln. Diese Polynome $P_\nu(x)$ lassen sich leicht bestimmen. Es ist

$$f(\tau)=\frac{2\tau-2x}{1-2x\tau+\tau^2}=\frac{1}{\tau-(x+\sqrt{x^2-1})}+\frac{1}{\tau-(x-\sqrt{x^2-1})}$$

$$f^{(\nu)}(\tau)=\frac{(-1)^\nu\nu!}{\left(\tau-(x+\sqrt{x^2-1})\right)^{\nu+1}}+\frac{(-1)^\nu\cdot\nu!}{\left(\tau-(x-\sqrt{x^2-1})\right)^{\nu+1}}.$$

$P_\nu(x)$ ist nach Definition gleich $\frac{f^{(\nu-1)}(0)}{(\nu-1)!}$, also

$$P_\nu(x)=\frac{-1}{(x+\sqrt{x^2-1})^\nu}+\frac{-1}{(x-\sqrt{x^2-1})^\nu}$$
$$=-\left[\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^\nu+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^\nu\right]^{*)}.$$

*) In der Entwickelung von Funktionen, die in einer Ellipse mit den Brennpunkten ± 1 regulär sind, nach diesen Polynomen ist Herr Picard auf anderem

Setzt man hierin $x = \cos\varphi$, so ist $P_\nu(x) = -2\cos\nu\varphi$; die Gleichung $P_\nu(x) = 0$ hat also ν reelle Wurzeln, die sämtlich zwischen -1 und $+1$ liegen. Die Entwickelung von $P_\nu(x)$ nach Potenzen von x lautet:

für gerades ν: $$P_\nu(x) = (-1)^{\frac{\nu+2}{2}}\, 2\left(1 + \frac{x^2}{2!}(-\nu^2) + \frac{x^4}{4!}(-\nu^2)(2^2-\nu^2) + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{x^\nu}{\nu!}(-\nu^2)(2^2-\nu^2)\cdots(\overline{\nu-2}^2-\nu^2)\right),$$

für ungerades ν: $$P_\nu(x) = (-1)^{\frac{\nu+1}{2}}\, 2\nu\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!}(1-\nu^2) + \frac{x^5}{5!}(1-\nu^2)(3^2-\nu^2) + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{x^\nu}{\nu!}(1-\nu^2)(3^2-\nu^2)\cdots(\overline{\nu-2}^2-\nu^2)\right).$$

Wählt man dagegen als erzeugende Funktion (s. die Bemerkung p. 398/399):

$$\frac{1}{2\tau}\,\frac{1}{\psi(\tau)-x} = \frac{1}{1-2\tau x+\tau^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(\frac{1}{\tau-(x-\sqrt{x^2-1})} - \frac{1}{\tau-(x-\sqrt{x^2-1})}\right)$$
$$= \sum_0^\infty{}^{\nu}\, \Pi_\nu(x)\,\tau^\nu,$$

so erhält man

$$\Pi_\nu(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left((x+\sqrt{x^2-1})^{\nu+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{\nu+1}\right) = \frac{\sin(\nu+1)\varphi}{\sin\varphi},$$

wobei wieder $x = \cos\varphi$ gesetzt ist. Die Koeffizienten $\Pi_\nu(x)$ s. bei Schlömilch, Alg. An. p. 245 (2. Aufl.).

Die Funktion $\frac{1}{\sqrt{2\tau(\psi(\tau)-x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-2\tau x+\tau^2}}$ ist bekanntlich die erzeugende Funktion der Legendreschen Polynome, nach denen man auch Funktionen, die innerhalb einer der obigen konfokalen Ellipsen regulär sind, entwickeln kann. Diese Polynome subsumieren sich zunächst nicht unter die vorausgeschickte allgemeine Theorie. Inwieweit sich dies trotzdem durch Modifikation und Erweiterung dieser Theorie erreichen läßt, möchte ich einer späteren Untersuchung vorbehalten.

Als letztes Beispiel sollen diejenigen Polynome $P_\nu(x)$ betrachtet werden, die zu Lemniskaten gehören, deren Brennpunkte wieder die Punkte $x = \pm 1$ seien; Die Rolle der Kurve $C_{1+\varrho}$ wird hier von der Lemniskate mit Doppelpunkt übernommen, deren Gleichung lautet:

$$((\xi-1)^2+\eta^2)((\xi+1)^2+\eta^2) = 1.$$

Die Funktion $\psi(\tau)$ ist jetzt die folgende:

$$(1)\quad z = \psi(\tau) = \frac{1}{\tau}\sqrt{1+\tau^2} = \frac{1}{\tau}\left(1 + \frac{\tau^2}{2} - \frac{1\cdot 1}{1\cdot 2}\left(\frac{\tau^2}{2}\right)^2 + \frac{1\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{\tau^2}{2}\right)^3 - + \cdots\right).$$

Wege gelangt, traité d'an. t. II, pag. 288; cf. auch Heine, Kugelfunktionen, Bd. I, pag. 198.

Die Gleichung (1) nach τ aufgelöst gibt:

$$(2) \qquad \tau = \frac{1}{\sqrt{(z+1)(z-1)}};$$

den Kreisen $|\tau| = \text{const.}$ entsprechen also in der z-Ebene Kurven von der Eigenschaft, daß das Produkt der Entfernungen $\overline{1z}$, $-\overline{1z}$ gleich einer Konstanten ist; das sind aber die obigen Lemniskaten.

Wir haben nun folgende Funktion nach Potenzen von τ zu entwickeln:

$$\begin{aligned}\frac{d\psi(\tau)}{d\tau}\frac{1}{\psi(\tau)-x}+\frac{1}{\tau} &= \frac{\dfrac{2\tau}{\sqrt{1+\tau^2}}-x}{\sqrt{1+\tau^2}-\tau x}\\ &= \left(\frac{2\tau}{1+\tau^2}-\frac{x}{\sqrt{1+\tau^2}}\right)\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\tau x}{\sqrt{1+\tau^2}}}\\ &= 2\sum_1^\infty{}_\nu\, \tau^\nu x^{\nu-1}(1+\tau^2)^{\frac{-\nu-1}{2}} - \sum_0^\infty{}_\nu\, \tau^\nu x^{\nu+1}(1+\tau^2)^{\frac{-\nu-1}{2}}.\end{aligned}$$

Indem man alle hier auftretenden Potenzen von $(1+\tau)^2$ nach der binomischen Reihe entwickelt, und dann die Koeffizienten gleicher Potenzen von τ zusammenfaßt, erhält man:

$$\begin{aligned}-P_{2\nu}(x) &= x^{2\nu} + x^{2\nu+2}\left(\binom{-\nu+1}{1}-2\right) + x^{2\nu-4}\left(\binom{-\nu+2}{2}-2\binom{-\nu+1}{1}\right)\\ &\qquad + x^{2\nu-6}\left(\binom{-\nu+3}{3}-2\binom{-\nu+2}{2}\right)\\ &\qquad + \cdots + x^2\left(\binom{-1}{\nu-1}-2\binom{-2}{\nu-2}\right)-2\binom{-1}{\nu-1}\\ &= x^{2\nu}+\sum_1^\nu{}_k(-1)^k\frac{\nu+k}{\nu}\binom{\nu}{k}x^{2\nu-2k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-P_{2\nu+1}(x) &= x^{2\nu+1} + x^{2\nu-1}\left(\binom{\frac{-2\nu+1}{2}}{1}-2\right) + x^{2\nu-3}\left(\binom{\frac{-2\nu+3}{2}}{2}-2\binom{\frac{-2\nu+1}{2}}{1}\right)\\ &\qquad + x^{2\nu-5}\left(\binom{\frac{-2\nu+5}{2}}{3}-2\binom{\frac{-2\nu+3}{2}}{2}\right)\\ &\qquad + \cdots + x^3\left(\binom{\frac{-3}{2}}{\nu-1}-2\binom{\frac{-5}{2}}{\nu-2}\right)+x\left(\binom{-\frac{1}{2}}{\nu}-2\binom{-\frac{3}{2}}{\nu-1}\right)\\ &= x^{2\nu+1}+\sum_1^\nu{}_k(-1)^k\frac{2\nu+2k+1}{2\nu+1}\,\frac{(2\nu+1)(2\nu-1)(2\nu-3)\cdots(2\nu-2k+3)}{2^k\cdot k!}\,x^{2\nu+1-2k}.\end{aligned}$$

Zu einfacher gebauten Ausdrücken gelangt man, wenn man von der Bemerkung p. 398/399 Gebrauch machend als erzeugende Funktion die folgende benutzt:

$$\frac{\psi(\tau)}{\psi(\tau)-x} = \frac{1}{1-\frac{\tau x}{\sqrt{1+\tau^2}}} = \sum_0^\infty{}^{\nu}\, x^\nu \tau^\nu (1+\tau^2)^{\frac{-\nu}{2}}.$$

Es ergibt sich

$$\Pi_\nu(x) = x^\nu + x^{\nu-2}\binom{\frac{-\nu+2}{2}}{1} + x^{\nu-4}\binom{\frac{-\nu+4}{2}}{2} + \cdots.$$

§ 3.

Bisher spielte der Punkt ∞ als Pol der Polynome eine ausgezeichnete Rolle; durch die Substitution $\left.\frac{1}{z-\alpha}\right| z$ kann man dieselbe einem beliebigen im Endlichen gelegenen Punkte α zuerteilen; man gelangt so ohne weiteres zu folgender Verallgemeinerung:

C sei eine geschlossene reguläre analytische Kurve auf der Riemannschen Kugelfläche, S eines der beiden Continua, in welche die Kugel durch C geteilt wird, α irgend ein Punkt des andern Continuums; dann läßt sich jede in S reguläre analytische Funktion $F(x)$ in eine Reihe

$$F(x) = \sum_0^\infty{}^{\nu}\, a_\nu P_\nu\left(\frac{1}{x-\alpha}\right)$$

entwickeln.

Ferner besteht folgender Satz:

Wenn das Gebiet S besteht aus der Kugelfläche mit Ausnahme von zwei Continuen S_1 und S_2, die von den regulären analytischen Kurven C_1 und C_2 begrenzt sind, und wenn α_1 ein beliebiger Punkt von S_1, α_2 ein solcher von S_2 ist, so läßt sich jede in S reguläre analytische Funktion in der Form

$$\sum{}^{\nu}\, a_\nu^{(1)} P_\nu^{(1)}\left(\frac{1}{x-\alpha_1}\right) + \sum{}^{\nu}\, a_\nu^{(2)} P_\nu^{(2)}\left(\frac{1}{x-\alpha_2}\right)$$

darstellen. Ein neuer Beweis ist nicht nötig, da nach dem Cauchyschen Satze

$$F(x) = \int_{C_1} \frac{F(z)}{z-x}\,dz + \int_{C_2} \frac{F(z)}{z-x}\,dz,$$

wo die Integrationen so zu nehmen sind, daß das Gebiet S zur linken bleibt; in den beiden Integralen ist nur das Differential $\frac{dz}{z-x}$ ebenso wie oben zu transformieren.

Genau die entsprechende Entwickelung gilt natürlich, wenn das Regularitätsgebiet S von $F(x)$ aus einem n fach zusammenhängenden Continuum besteht.

Eine Erweiterung der Theorie dieses Aufsatzes nach einer anderen Richtung hin läßt sich bewerkstelligen, indem man die bisherige wesentliche Voraussetzung fallen läßt, daß die Funktion $\psi(\tau)$ welche das Äußere der gegebenen Kurve C auf das Innere des Einheitskreises abbildet, auf dem letzteren keinen singulären Punkt habe.

Diese Voraussetzung war bisher eine wesentliche. Falls nämlich — um ein ganz extremes Beispiel anzuführen — $\psi(\tau)$ sich nicht über den Einheitskreis festsetzen läßt, während die darzustellende Funktion die Kurve C zur natürlichen Grenze hat, so versagt zwar durchaus nicht die Definition der Polynome $P_\nu(x)$, wohl aber vollständig die durch (23) gegebene Darstellung der a_ν. Es scheint mir nun, daß man durch Kontinuitätsbetrachtungen, indem man $\psi(\tau)$ durch passend gewählte Funktionen approximiert und dann zur Grenze übergeht, auch im allgemeinsten Falle die wichtigsten ausgezeichneten Eigenschaften der Reihen $\sum a_\nu P_\nu(x)$ beweisen kann.

Doch will ich mit Verzicht auf diese Eigenschaften hier nur zeigen, daß eine Funktion $F(x)$, die in einem von irgend einer stetigen sich selbst nicht schneidenden geschlossenen Kurve C begrenzten Gebiete S sich regulär verhält, in eine Reihe von Polynomen entwickelt werden kann, welche in jedem Gebiete, das ganz innerhalb S liegt, gleichmäßig gegen $F(x)$ konvergiert.

Man betrachte zu diesem Zwecke eine unendliche Reihe geschlossener Kurven $C_1, C_2, \cdots$ von folgenden Eigenschaften:

1) Jede Kurve C_i besteht aus einem einzigen regulären analytischen Zuge. (Das von C_i begrenzte Gebiet möge S_i heißen.)

2) C_{i+1} verläuft ganz außerhalb C_i.

3) $\lim\limits_{i=\infty} C_i = C$*).

Die in S_i giltige Entwickelung der in S regulären analytischen Funktion $F(x)$ laute:

$$F(x) = \sum_0^\infty {}_\nu\, a_\nu^{(i)} P_\nu^{(i)}(x) \qquad \text{(cf. p. 394).}$$

*) Es ist wohl nicht nötig, diese von selbst verständliche Ausdrucksweise durch Anschreiben einiger Ungleichungen zu präzisieren; die Existenz der oben verlangten Kurven C_i läßt sich auf verschiedene Weisen einsehen; man beachte z. B. daß Herr Jordan (cours d'an. I, p. 92ff. (1893)) die Kurve C durch ganz im Innern derselben verlaufende Polygone approximiert; das Innere (oder auch das Äußere) eines solchen Polygons kann nun auf das Innere des Einheitskreises der x'-Ebene abgebildet werden; das Abbild eines Kreises der x'-Ebene mit dem Radius $1-\varepsilon$ gibt nun, falls ε genügend klein gewählt ist, und auch das Polygon schon nahe genug an der Kurve C verläuft eine Approximation der letzteren von der gewünschten Art.

Ferner sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ irgend eine Folge positiver der Null zustrebender Zahlen; man bestimme $m_1, m_2, \cdots$ so, daß

$$(1) \qquad \left| F(x) - \sum_0^{m_n} {}^{\nu}\, a_\nu^{(n)} P_\nu^{(n)}(x) \right| < \varepsilon_n$$

ist für alle x innerhalb S_{n-1}. Es sei

$$(2) \qquad H_n(x) = \sum_0^{m_n} {}^{\nu}\, a_\nu^{(n)} P_\nu^{(n)}(x)$$

und

$$(3) \qquad \begin{aligned} G_1(x) &= H_1(x), \\ G_n(x) &= H_n(x) - H_{n-1}(x) \qquad (n > 1); \end{aligned}$$

$G_n(x)$ ist ein Polynom m_n^{ten} Grades in x und

$$(4) \qquad \sum_1^{\infty} {}^{\nu}\, G_\nu(x)$$

ist eine in jedem Gebiete, das ganz innerhalb C liegt, gleichmäßig gegen $F(x)$ konvergente Reihe. Denn

$$(5) \qquad \left| F(x) - \sum_1^{n} {}^{\nu}\, G_\nu(x) \right| = |F(x) - H_n(x)| < \varepsilon_n \quad \text{(nach (1))}$$

für alle x in S_{n-1}; durch Wahl von n kann aber sowohl erreicht werden, daß ε_n beliebig klein wird, als daß sich S_{n-1} von S beliebig wenig unterscheidet.

Noch eine kleine Modifikation möge angebracht werden: von den drei Bedingungen, denen die Kurven C_i zu genügen haben, möge die dritte dahin abgeändert werden, daß $\lim C_i = L$ wird. L bedeutet dabei auf der Riemannschen Kugel das Stück $(1, \infty)$ der positiven reellen Achse; die Kurven C_i kann man sich als sphärische Ellipsen mit den Brennpunkten 1 und ∞ auf der Riemannschen Kugel denken.

Man sieht auf diese Weise ein, daß jede auf der längs L aufgeschnittenen Kugel reguläre analytische Funktion $F(x)$ sich in eine Reihe von Polynomen

$$F(x) = \sum_1^{\infty} {}^{\nu}\, G_\nu(x)$$

entwickeln läßt, die in jedem endlichen Gebiete, dessen Begrenzung keinen

Punkt mit L gemein hat, gleichmäßig konvergiert. Speziell möge für $F(x)$ die Funktion $\frac{1}{1-x}$ gewählt werden:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty {}_\nu\, G_\nu(x), \tag{6}$$

wo

$$G_n(x) = \sum_0^{m_n} {}_\nu\, \gamma_\nu^{(n)} x^\nu. \tag{7}$$

Von dieser polynomischen Entwickelung von $\frac{1}{1-x}$ ist, wie Herr Borel*) gezeigt hat, nur noch ein Schritt zu folgendem Theoreme des Herrn Mittag-Leffler**):

Von jedem singulären Punkte α der durch die Taylorsche Reihe:

$$a_0 + a_1 x + a_1 x^2 + \cdots$$

definierten Funktion $F(x)$ möge der geradlinige Schnitt L_α, dessen Verlängerung durch den Nullpunkt gehen würde, ins Unendliche geführt werden; das so entstehende Continuum heißt der zu $F(x)$ gehörige Stern. Der Satz des Herrn Mittag-Leffler behauptet nun:

$F(x)$ kann in dem Sterne dargestellt werden durch die polynomische Entwickelung

$$F(x) = \sum_0^\infty {}_\nu\, g_\nu(x), \tag{8}$$

die in jedem endlichen ganz innerhalb des Sterns gelegenen Gebiete gleichmäßig konvergiert, und zwar ist

$$g_n(x) = \sum_0^{m_n} {}_\nu\, \gamma_\nu^{(n)} a_\nu x^\nu. \tag{9}$$

(Die γ sind die gleichen wie in (7), also von den a_ν und α völlig unabhängig.)

Beweis nach Herrn Borel (a. a. O.): Nach (7) gilt, solange $y = \frac{x}{z}$ auf ein endliches ganz außerhalb der reellen Achse $1 - \infty$ der y-Ebene gelegenes Gebiet beschränkt bleibt,

$$\frac{1}{1-\frac{x}{z}} = \sum_0^\infty {}_\nu\, G_\nu\left(\frac{x}{z}\right). \tag{10}$$

*) Ann. éc. norm. 10 (1899).

**) acta math. 23 (1899).

Die Voraussetzung über $\frac{x}{z}$ ist bei festem z mit der folgenden identisch:

(11) x muß auf ein endliches Gebiet beschränkt bleiben, dem kein Punkt der Geraden L_z angehört (auch nicht als Begrenzung).

Ist z nicht fest, so muß diese Bedingung für alle in Betracht kommenden L_z erfüllt sein.

Ist nun innerhalb des obigen Sterns eine geschlossene Kurve C gelegen, die das Gebiet S begrenzt, so soll für S die gleichmäßige Konvergenz der Entwickelung (8) bewiesen werden. Man denke sich zu dem Zwecke eine ganz außerhalb S, aber noch ganz innerhalb des Sterns verlaufende geschlossene den Nullpunkt umschließende Kurve C_2 gezogen, sodaß die Verlängerungen der vom Nullpunkte nach den Punkten der C_2 gezogenen radii vectores über C_2 hinaus ganz außerhalb S verlaufen. Dann trifft die Bedingung (11) für alle z auf C_2 und alle x in S zu und es besteht für $n \geqq n'$ und für alle diese x und z die Ungleichung:

$$(12) \qquad \left| \frac{1}{1-\frac{x}{z}} - \sum_1^n {}_\nu\, G_\nu\left(\frac{x}{z}\right) \right| < \varepsilon.$$

Nun ist aber nach dem Cauchyschen Satze:

$$(13) \qquad F(x) = \int_{C_2} \frac{1}{1-\frac{x}{z}} \frac{F(z)}{z}\, dz.$$

Hier setzt man für $\frac{1}{1-\frac{x}{z}}$ die Reihe (10) ein und erhält:

$$(14) \quad F(x) = \sum_1^n {}_\nu \int_{C_2} \frac{F(z)}{z} G_\nu\left(\frac{x}{z}\right) dz + \int_{C_2} \frac{F(z)}{z} \left(\frac{1}{1-\frac{x}{z}} - \sum_1^n {}_\nu\, G_\nu\left(\frac{x}{z}\right) \right) dz.$$

Das Maximum von $\left|\frac{F(z)}{z}\right|$ auf C_2 sei G, die Bogenlänge von C_2 sei L, dann ist nach (12) für $n \geqq n'$:

$$(15) \quad \left| F(x) - \sum_1^n {}_\nu \int_{C_2} \frac{F(z)}{z} G_\nu\left(\frac{x}{z}\right) dz \right| < \varepsilon \int_{C_2} \left|\frac{F(z)}{z}\right| |dz| < \varepsilon \cdot G \cdot L$$

gleichmäßig für alle x in S. Beachtet man noch, daß

$$(16) \qquad \int_{C_2} \frac{F(z)}{z^{m+1}}\, dz = a_m,$$

und setzt diesen Wert in (15) ein, so hat man die oben behauptete in S, d. i. in einem beliebigen ganz innerhalb des Sterns gelegenen Gebiete gleichmäßig konvergente Entwickelung:

$$F(x) = \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu}\, g_\nu(x),$$

wo

$$g_n(x) = \sum_{1}^{m_n}{}_{\nu}\, \gamma_\nu^{(n)} a_\nu x^\nu.$$

München, April 1902.